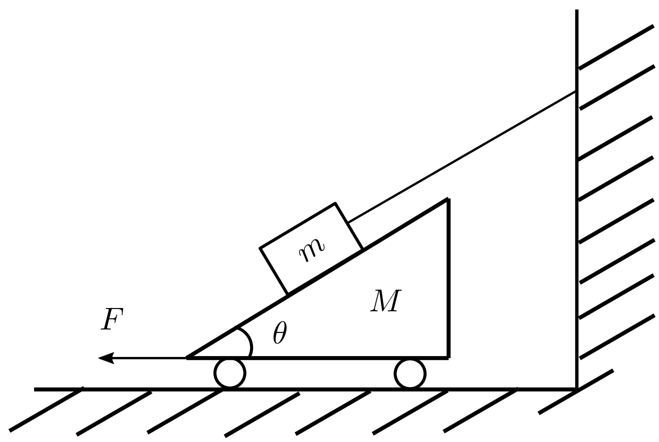
Eðlisfræði

Eðlisfræðideild II



Matthias Baldursson Harksen

Fastar

$g = 9{,}82\,\mathrm{m/s^2}$ $\quad M_{\mathrm{tungl}} = 7{,}35 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$ $\quad 1\,\mathrm{AU} = 1{,}50 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$

$c = 3{,}00 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}$ $\quad M_{\mathrm{jörð}} = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ $\quad G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}$

$v_{\mathrm{hljóð}} = 343\,\mathrm{m/s}$ $\quad M_{\mathrm{sól}} = 1{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ $\quad R_{\mathrm{jörð}} = 6371\,\mathrm{km}$

Stærðfræði

$$U_{\mathrm{hringur}} = 2\pi r, \quad A_{\mathrm{hringur}} = \pi r^2, \quad A_{\mathrm{kúla}} = 4\pi r^2, \quad A_{\mathrm{sívalningur}} = 2\pi r \ell, \quad V_{\mathrm{kúla}} = \tfrac{4\pi}{3} r^3, \quad V_{\mathrm{sívalningur}} = \pi r^2 \ell.$$

$$m\colon\ 10^{-3}, \quad \mu\colon\ 10^{-6}, \quad n\colon\ 10^{-9}, \quad p\colon\ 10^{-12}, \quad f\colon\ 10^{-15}, \quad k\colon\ 10^{3}, \quad M\colon\ 10^{6}, \quad G\colon\ 10^{9}, \quad T\colon\ 10^{12}.$$

Óvissureikningar

$$\Delta\,(A \pm B) = \Delta A + \Delta B, \quad \Delta\,(AB) = AB\left(\tfrac{\Delta A}{A} + \tfrac{\Delta B}{B}\right), \quad \Delta\left(\tfrac{A}{B}\right) = \tfrac{A}{B}\left(\tfrac{\Delta A}{A} + \tfrac{\Delta B}{B}\right), \ \Delta(f(x)) = f'(x)\Delta x.$$

Gangfræði

$$v_m = \tfrac{\Delta s}{\Delta t}, \quad a_m = \tfrac{\Delta v}{\Delta t}, \quad v = \tfrac{ds}{dt}, \quad a = \tfrac{dv}{dt}, \quad v = v_0 + at, \quad s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2, \quad 2a\Delta s = v^2 - v_0^2, \quad v_m = \tfrac{v_0 + v}{2}.$$

Kasthreyfing

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + v_0 \cos\theta t \\ y_0 + v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} - gt \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{pmatrix} = |\vec{v}_0| \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}.$$

Orka

$$E = K + U, \quad K = \tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{p^2}{2m}, \quad U_g = mgh, \quad U_k = \tfrac{1}{2} k x^2, \quad W = \vec{F} \cdot \vec{d} = F d \cos\gamma, \quad E_1 + W = E_2.$$

Skriðþungi

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad \vec{F} = \tfrac{d\vec{p}}{dt}, \quad p_{\mathrm{fyrir}} = p_{\mathrm{eftir}}.$$

Kraftar

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad F_g = mg, \quad F_k = -kx, \quad F_{\mathrm{nún}} = \mu \text{Þ}, \quad F_G = -\tfrac{G m_1 m_2}{r^2}.$$

Hringhreyfing

$$F_{\mathrm{mið}} = m\tfrac{v^2}{r} = m\omega^2 r, \quad \omega = \dot{\theta} = \tfrac{2\pi}{T} = 2\pi f, \quad v = \omega r = \tfrac{2\pi r}{T}, \quad a = \tfrac{v^2}{r}, \quad \tfrac{a^3}{T^2} = \tfrac{GM}{4\pi^2}, \quad U_G = -\tfrac{G m_1 m_2}{r}.$$

Fastar

$P_0 = 1\,\mathrm{atm} = 101{,}3\,\mathrm{kPa}$	$\rho_{\mathrm{loft}} = 1{,}23\,\mathrm{kg/m^3}$	$R = 8{,}315\,\mathrm{J/mól\,K}$	$R = 0{,}082\,\mathrm{atm\,L/mól\,K}$
$\beta_0 = 10\,\mathrm{dB}$	$\rho_{\mathrm{vatn}} = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$	$k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$	$c_{\mathrm{ljós}} = 3{,}00 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$
$I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$	$\rho_{\mathrm{ís}} = 920\,\mathrm{kg/m^3}$	$N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}\,1/\mathrm{mól}$	$c_{\mathrm{hljóð}} = 343\,\mathrm{m/s}$

Snúningsstöðujöfnur

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \quad \alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \quad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2, \quad \omega = \omega_0 + \alpha t, \quad 2\alpha\Delta\theta = \omega^2 - \omega_0^2, \quad \omega_m = \frac{\omega+\omega_0}{2}.$$

Hverfitregður

$$I_{\text{kúla}} = \tfrac{2}{5}mr^2, \quad I_{\text{stöng um enda}} = \tfrac{1}{3}m\ell^2, \quad I_{\text{stöng um miðju}} = \tfrac{1}{12}m\ell^2, \quad I_{\text{sívalningur}} = \tfrac{1}{2}mr^2, \quad I = I_{\mathrm{cm}} + md^2.$$

Snúningar

$$\tau = I\alpha = \vec{r} \times \vec{F} = r_\perp F = rF_\perp, \quad L = I\omega = \vec{r} \times \vec{p} = r_\perp p = rp_\perp, \quad K_{\text{snú}} = \tfrac{1}{2}I\omega^2, \quad L_{\text{fyrir}} = L_{\text{eftir}}, \quad W = \tau\Delta\theta.$$

Þrýstingur og flæðiefni

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad P = \frac{F}{A}, \quad F_{\text{upp}} = \rho V g, \quad P = P_0 + \rho g d, \quad \Phi = Av, \quad A_1 v_1 = A_2 v_2, \quad P_1 + \rho g h_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2.$$

Einföld sveifluhreyfing

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \quad x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = A\sin(\omega t + \phi), \quad \omega_{\text{gormur}} = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_{\text{pendúll}} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

Bylgjur

$$\ddot{\psi} = c^2\psi'', \quad \psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \varphi_0), \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad f = \frac{1}{T}, \quad c = \frac{\omega}{k} = \lambda f.$$

$$c_{\text{strengur}} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad c_{\text{hljóð}} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}, \quad \mu = \frac{m}{\ell}, \quad P = \frac{\Delta E}{\Delta t}, \quad I = \frac{P}{A}, \quad \beta = \beta_0 \log\left(\frac{I}{I_0}\right), \quad f = \left(\frac{c \pm v}{c \pm u}\right) f_0.$$

$$\lambda_n = \frac{2\ell}{n}, \quad f_n = nf_1, \quad \lambda_n = \frac{4\ell}{2n-1}, \quad f_n = (2n-1)f_1, \quad B = 2A\cos\left(\tfrac{k}{2}\Delta r\right), \quad \Delta r = n\lambda, \quad \Delta r = (n + \tfrac{1}{2})\lambda, \quad f_{\text{hviður}} = \Delta f.$$

Varmafræði

$$PV = Nk_B T = nRT, \quad Q_c = cm\Delta T, \quad Q_b = L_b m, \quad Q_g = L_g m.$$

$$K = \tfrac{3}{2}k_B T, \quad \Delta E = Q - W, \quad \Delta E = Cn\Delta T, \quad C = \tfrac{f}{2}R, \quad dW = PdV, \quad P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma, \quad \gamma = \frac{f+2}{f}, \quad \eta = \frac{W_{\text{út}}}{Q_{\text{inn}}}.$$

Fastar

$k = 8{,}98 \cdot 10^9\,\mathrm{N\,m^2/C^2}$ $\quad e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ $\quad \frac{e}{m_e} = 1{,}76 \cdot 10^{11}\,\mathrm{C/kg}$

$\epsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C^2/(N\,m^2)}$ $\quad m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ $\quad c_{\text{ljós}} = 3{,}00 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{T\,m/A}$ $\quad m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

Maxwellsjöfnurnar

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{inni}}}{\epsilon_0}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{inni}}.$$

Rafstöðufræði

$$\vec{F}_k = \frac{kq_1q_2}{r^2}\hat{r}, \quad U_k = \frac{kq_1q_2}{r}, \quad \vec{E}_Q = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}, \quad V_Q = \frac{kQ}{r} \quad \vec{F}_E = q\vec{E}, \quad U = qV, \quad \Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}, \quad u_E = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2.$$

$$E_{\text{plata}} = \frac{Q}{2\epsilon_0 A}, \quad E_{\text{plötuþéttir}} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}, \quad C_{\text{plötuþéttir}} = \epsilon_0 \frac{A}{d}, \quad U_{\text{plötuþéttir}} = \tfrac{Q^2}{2C}, \quad V_{\text{plötuþéttir}} = Ed, \quad \epsilon = \epsilon_{\text{efni}}\epsilon_0.$$

Rafsegulfræði

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3}, \quad \vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} = I\vec{\ell} \times \vec{B}, \quad B_{\text{vír}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad B_{\text{spóla}} = \frac{\mu_0 IN}{\ell} = \frac{\mu_0 I}{\text{þ}}, \quad L_{\text{spóla}} = \frac{\mu_0 N^2 A_{\text{spóla}}}{\ell}.$$

$$U_{\text{spóla}} = \tfrac{1}{2}LI^2, \quad u_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2, \quad RJ(t) = \mathcal{E}(t) = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad \Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A}, \quad \mu = \mu_{\text{efni}}\mu_0.$$

Rafrásir

$$\Delta V_C = \tfrac{Q}{C}, \quad \Delta V_R = IR, \quad \Delta V_L = L\tfrac{dI}{dt}, \quad P = I\Delta V, \quad I = \tfrac{dQ}{dt}, \quad R = \rho\tfrac{\ell}{A}, \quad R_{\text{rað}} = R_1 + R_2, \quad R_{\text{hlið}} = \left(\tfrac{1}{R_1} + \tfrac{1}{R_2}\right)^{-1}.$$

$$C_{\text{rað}} = \left(\tfrac{1}{C_1} + \tfrac{1}{C_2}\right)^{-1}, \quad C_{\text{hlið}} = C_1 + C_2, \quad L_{\text{rað}} = L_1 + L_2, \quad L_{\text{hlið}} = \left(\tfrac{1}{L_1} + \tfrac{1}{L_2}\right)^{-1}, \quad \Delta V_{\text{heild}} = 0, \quad I_{\text{inn}} = I_{\text{út}}.$$

Tímaþróun

Sveifluhreyfing: $\ddot{z} = -\omega^2 z \implies z(t) = z_{\max}\cos(\omega t + \varphi)$, Hrörnunarhreyfing: $\dot{z} = -\alpha z \implies z(t) = z_0 e^{-\alpha t}$.

RC-rás: $Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$, RL-rás: $I(t) = I_0 e^{-\frac{Rt}{L}}$, LC-rás: $Q(t) = Q_{\max}\cos(\omega t)$, $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

RCL-rás: $I(t) = I_0\cos(\omega t - \varphi)$, $I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}$, $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$, $X_L = \omega L$, $X_C = \frac{1}{\omega C}$, $\varphi = \arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)$.

Fastar

$1\,\mathrm{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$
$c = 3{,}00 \cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s} = 4{,}136 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{eV\,s}$
$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}05 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$

$1\,\mathrm{u} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 931{,}49\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c}^2}$
$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} = 0{,}511\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c}^2}$
$m_p = 1{,}673 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 938{,}3\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c}^2}$
$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

$\frac{e}{m_e} = 1{,}76 \cdot 10^{11}\,\mathrm{C/kg}$
$c_\gamma = 3{,}00 \cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Takmarkaða afstæðiskenningin

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad \ell = \frac{\ell_0}{\gamma}, \quad T = \gamma T_0, \quad \Delta x' = \gamma\,(\Delta x - v\Delta t), \quad \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right), \quad w = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}.$$

$$E = \gamma mc^2, \quad E_0 = mc^2, \quad K = (\gamma-1)mc^2, \quad p = \gamma mv, \quad E^2 - (pc)^2 = E_0^2 \quad (\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2, \quad E_{\text{ljós}} = hf.$$

Kjarna- og öreindafræði

$$^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{X} \xrightarrow{\alpha} {}^{\mathrm{A}-4}_{\mathrm{Z}-2}\mathrm{Y} + {}^{4}_{2}\alpha^{+2}, \quad {}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{X} \xrightarrow{\beta^-} {}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}+1}\mathrm{Y} + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_e \quad {}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{X} \xrightarrow{\beta^+} {}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}-1}\mathrm{Y} + \mathrm{e}^+ + \nu_e, \quad {}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{X} \xrightarrow{\gamma} {}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{X} + \gamma.$$

$$r = r_0 A^{1/3}, \quad r_0 = 1{,}2\,\mathrm{fm}, \quad N(t) = N_0 e^{-\lambda t}, \quad G(t) = -\frac{dN}{dt} = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = G_0 e^{-\lambda t}, \quad \tau = \frac{\ln(2)}{\lambda}, \quad H = \frac{w\Delta E}{m}$$

Ljós

$$n_{\text{efni}} = \frac{c}{c_{\text{efni}}}, \quad n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2, \quad c = \lambda f, \quad d\sin\theta_n = n\lambda, \quad y_n = \ell\tan\theta_n, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \quad \frac{H}{h} = \frac{b}{a}.$$

Skammtafræði

$$E_\gamma = hf = \frac{hc}{\lambda}, \quad p_\gamma = \frac{h}{\lambda}, \quad \lambda_{\mathrm{dB}} = \frac{h}{p}, \quad E_\gamma = E_0 + K_e, \quad E_n = \frac{h^2 n^2}{8m\ell^2}, \quad \Delta x\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta E\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta L\Delta\theta \geq \frac{\hbar}{2}.$$

$$r_n = r_1 n^2, r_1 = 0{,}529\,\text{Å} \quad v_n = \frac{v_1}{n}, v_1 = \alpha c, \alpha = \frac{1}{137} \quad E_n = \frac{E_1}{n^2}, E_1 = -13{,}6\,\mathrm{eV}.$$

Gríska stafrófið

Hér má sjá forngríska stafrófið í allri sinni dýrð:

Heiti	Tákn	Samsvarar
Alpha	A/α	A/a
Beta	B/β	B/b
Gamma	Γ/γ	G/g
Delta	Δ/δ	D/d
Epsilon	E/ϵ	E/e
Zeta	Z/ζ	Z/z
Eta	H/η	H/h
Theta	Θ/θ	Þ/þ
Iota	I/ι	I/i
Kappa	K/κ	K/k
Lambda	Λ/λ	L/l
Mu	M/μ	M/m
Nu	N/ν	N/n
Xi	Ξ/ξ	X/x
Omicron	O/o	O/o
Pi	Π/π	P/p
Rho	R/ρ	R/r
Sigma	Σ/σ	S/s
Tau	T/τ	T/t
Upsilon	Υ/υ	Y/y
Phi	Φ/ϕ	F/f
Chi	X/χ	X/x
Psi	Ψ/ψ	
Omega	Ω/ω	Ó/ó

Það ber síðan að minnast á að sumir stafirnir hafa fengið svokallaðar handskriftarútgáfur eins og

$$\phi/\varphi \qquad \rho/\varrho \qquad \epsilon/\varepsilon \qquad \theta/\vartheta$$

Til dæmis er φ meira notað en ϕ og ε er meira notað en ϵ.

Hvernig á að leysa eðlisfræðidæmi

Hér setjum við fram lista af hlutum sem er gott að hafa í huga þegar þið eruð að fást við eðlisfræðidæmi.

Skref 1. Lestu dæmið vandlega.

Skref 2. Teiknaðu skýra mynd (helst eins stóra og þú hefur pláss fyrir).

Skref 3. Áttaðu þig á stærðunum sem þú þekkir og stærðunum sem þú ert að reyna að finna og merktu á mynd.

Skref 4. Veldu hnitakerfi eða viðmiðunarkerfi.

Skref 5. Ákvarðaðu upphafsástand og lokaástand kerfisins sem þú ert að skoða.

Skref 6. Koma kraftar fyrir í verkefninu? Þá er alltaf góð hugmynd að teikna kraftamynd.

Skref 7. Er einhver varðveitt stærð? T.d. skriðþungi, orka eða hverfiþungi?

Skref 8. Gefðu öllum tölunum sem koma fyrir í verkefninu stærðfræðilegt tákn. (t.d. $g = 9{,}82\,\mathrm{m/s^2}$).

Skref 9. Leystu verkefnið táknrænt.

Að leysa táknrænt

Ef við erum að leysa verkefni þá er betra að leysa verkefnin stærðfræðilega með táknunum sem fyrir koma í verkefninu. Það er góð þumalputtaregla að reyna að bíða með það eins lengi og hægt er að setja inn tölurnar (og helst bara í svarinu).

- Það er fljótlegra. að margfalda táknin g og ℓ saman heldur en að margfalda saman stærðirnar sem að stæðirnar standa fyrir og slá það inn á reiknivélina. Stundum þurfum við að framkvæma fimm eða tíu slíkar margfaldanir til þess að leysa dæmið og það er fljótt að stela af manni tíma ef maður þarf alltaf að slá inn á reiknivélina í hvert skipti.

- Það er ólíklegra að maður geri klaufavillur. ef maður reiknar með táknum frekar heldur en með tölum. Þannig tekur maður út allar klaufavillur eins og að slá inn 8 á reiknivél þegar maður ætlaði að slá inn 9.

- Það er almennara. því ef tölunum er síðan breytt, t.d. $\ell = 2{,}4\,\mathrm{m}$ í staðinn fyrir $\ell = 1{,}3\,\mathrm{m}$ þá er táknræna svarið óbreytt.

- Við getum skoðað víddirnar. Eftir að við höfum leyst dæmið er miklu auðveldara fyrir okkur að átta okkur á því hvort að við höfum gert einhverjar klaufavillur á leiðinni með því að skoða víddirnar á svarinu okkar.

- Við getum skoðað jaðartilfelli. Það er miklu auðveldara að skoða hvað gerist t.d. ef við breytum horninu θ frá því að vera $22°$ í að vera $90°$.

Efnisyfirlit

1 Einingar **12**
1.1 Alþjóðlega einingakerfið 12
1.2 Staðalform og markverðir stafir 12
1.3 Fermi vandamál 13
1.4 Víddargreining 14
1.5 Dæmi 15

2 Óvissureikningar **16**
2.1 Formlegar reiknireglur við meðhöndlun óvissu 16
2.2 Sýnidæmi um óvissureikninga 18
2.3 Dæmi 19

3 Gangfræði **20**
3.1 Staða, hraði og hröðun 20
3.2 Usain Bolt 23
3.3 Föst hröðun og stöðujöfnurnar 24
3.4 Dæmi 25

4 Orka, skriðþungi og varðveislulögmál **30**
4.1 Hreyfiorka og stöðuorka 30
4.2 Árekstrar 32
4.3 Dæmi 34

5 Kasthreyfing **38**
5.1 Að kasta bolta yfir horni 39
5.2 Dæmi 40

6 Kraftar **42**
6.1 Útdráttur úr Principia eftir Newton 42
6.2 Lögmál Newtons 43
6.3 Nokkrir kraftar 44
6.4 Fleiri kraftar 46
6.5 Sýnidæmi 47
6.6 Dæmi 51

7 Tengsl krafta við varðveislulögmálin **56**
7.1 Vinna 56
7.2 Geymnir og ógeymnir kraftar 57
7.3 Stöðuorka 58
7.4 Orkuvarðveisla 59
7.5 Skriðþungavarðveisla 60
7.6 Sýnidæmi 60
7.7 Dæmi 61

8 Þyngdarlögmálið **64**
8.1 Þyngdarlögmál Newtons . . . 64
8.2 Hringhreyfing . . . 65
8.3 Þriðja lögmál Keplers fyrir hringhreyfingu . . . 67
8.4 Lögmál Keplers . . . 68
8.5 Sýnidæmi . . . 69
8.6 Dæmi . . . 73

9 Snúningar **76**
9.1 Hornstaða, hornhraði og hornhröðun . . . 76
9.2 Massamiðjan . . . 77
9.3 Hverfitregður og snúningsásar . . . 79
9.4 Hverfitregður algengra hluta . . . 81
9.5 Útleiðslur á nokkrum hverfitregðum . . . 82
9.6 Kraftvægi . . . 83
9.7 Hverfiþungi . . . 84
9.8 Snúningsorka . . . 84
9.9 Sýnidæmi . . . 86
9.10 Dæmi . . . 91

10 Flæðiefni og þrýstingur **99**
10.1 Eðlismassi . . . 99
10.2 Þrýstingur . . . 100
10.3 Staðalloftþrýstingur . . . 100
10.4 Lögmál Pascals . . . 101
10.5 Lögmál Arkímedesar . . . 101
10.6 Inngangur að vökvaaflfræði . . . 102
10.7 Samfeldnilögmálið . . . 102
10.8 Lögmál Bernoullis . . . 103
10.9 Dæmi . . . 104

11 Einföld sveifluhreyfing **107**
11.1 Ritháttur . . . 107
11.2 Einföld sveifluhreyfing . . . 108
11.3 Gormar . . . 109
11.4 Lóðréttur gormur . . . 110
11.5 Pendúll . . . 111
11.6 Flókin sveifluhreyfing (ítarefni) . . . 112
11.7 Dæmi . . . 113

12 Bylgjur **115**
12.1 Hvað er bylgja? . . . 115
12.2 Staðbylgjur á streng . . . 116
12.3 Hljóðbylgjur . . . 117
12.4 Að leysa bylgjujöfnuna . . . 118
12.5 Afl og styrkur . . . 119
12.6 Dopplerhrif . . . 120
12.7 Eigintíðnir og eiginsveifluhættir . . . 122
12.8 Bylgjusamliðun . . . 125
12.9 Hviður . . . 126
12.10 Tónlist (ítarefni) . . . 127
12.11 Chladni platan (ítarefni) . . . 129
12.12 Dæmi . . . 130

13 Varmafræði **136**
13.1 Varmaorka . . . 136
13.1.1 Bræðsluvarmi og gufunarvarmi . . . 136
13.2 Kjörgas . . . 137
13.3 Fyrsta lögmál varmafræðinnar . . . 139
13.4 Varmaferli . . . 139
13.5 Dæmi . . . 142

14 Rafsviðið **145**
14.1 Rafkraftalögmál Coulombs . . . 147
14.2 Rafsvið frá punkthleðslu . . . 148
14.3 Raftvískaut . . . 150
14.4 Lagrange-punktar . . . 151
14.5 Rafsviðið meðfram samhverfuás hringlaga gjarðar . . . 152
14.6 Rafsviðið frá óendanlega stórri plötu (*) . . . 154
14.7 Dæmi . . . 155

15 Lögmál Gauss **158**
15.1 Rafflæði . . . 159
15.2 Lögmál Gauss fyrir þyngdarsviðið (*) . . . 163
15.3 Dæmi . . . 165

16 Raforka og rafspenna **169**
16.1 Plötuþéttir . . . 171
16.2 Rafsvarar . . . 172
16.3 Orkuþéttleiki rafsviðsins . . . 173
16.4 Klassískur geisli rafeindarinnar (*) . . . 173
16.5 Dæmi . . . 175

17 Inngangur að rafrásum **180**
17.1 Íhlutir í rafrásir . . . 180
17.2 Lögmál Kirchoffs . . . 181
17.3 Spennufall . . . 182
17.4 Raðtenging og hliðtenging . . . 183
17.5 Drude-líkanið (*) . . . 187
17.6 Dæmi . . . 189

18 Segulsvið og lögmál Ampéres **194**
18.1 Dæmi . . . 202

19 Lögmál Faradays og spanstraumur **208**
19.1 Lögmál Faradays . . . 208
19.2 Sýnidæmi . . . 209
19.3 Sjálfspan í spólu . . . 210
19.4 Hvers vegna er riðstraumur málið? . . . 211
19.5 Dæmi . . . 212

20 Tímaþróun í rafrásum **215**
20.1 Jafnspennurásir (DC) . . . 215
20.1.1 RC-rás: . . . 215
20.1.2 LR-rás: . . . 217
20.1.3 LC-rás: . . . 219
20.1.4 RCL-rás: . . . 220
20.2 Riðspennurásir (AC) . . . 221
20.3 Dæmi . . . 223

21 Saga atómsins **227**
21.1 Hið agnarsmáa kemur í skömmtum 227
21.2 Thomson uppgötvar rafeindina 228
21.3 Olíudropatilraun Millikan og Fletchers 230
21.4 Gullþynnutilraun Rutherfords 231
21.5 Chadwick uppgötvar nifteindina 233
21.6 Staðallíkanið 235

22 Afstæðiskenningin **238**
22.1 Inngangur 238
22.2 Frumsendur afstæðiskenningarinnar 240
22.3 Tímalenging 241
22.4 Lengdarstytting 242
22.5 Lorentz-ummyndanir 243
22.6 Óbreyttna tímarúmsvegalengdin 243
22.7 Tímarúmsmyndir 244
22.8 Hraðasamlagning 246
22.9 Dopplerhrif fyrir ljós 246
22.10Skriðþungi, orka og kraftur 247
22.11Nálganir 249
22.12Dæmi 250

23 Ljós **254**
23.1 Lögmál Snells 254
23.2 Alspeglun 256
23.3 Upprifjun: Einföld sveifluhreyfing og bylgjusamliðun 256
23.4 Tveggja raufa tilraun Youngs: Ljóssamliðun 258
23.5 Margar raufar 260
23.6 Ein rauf: Ljósbognun 260
23.7 Bæði samliðunarmynstur og bognunarmynstur 261
23.8 Linsur og geislagangsmyndir 262
23.9 Safnlinsur: Raunveruleg mynd 262
23.10Safnlinsur: Ímynduð mynd 263
23.11Dreifilinsur 264
23.12Dæmi 265

24 Kjarneðlisfræði **269**
24.1 Stærð kjarnans 269
24.2 Geislavirkni 270
24.3 Kjarnaorka og stöðugleiki frumefna 272
24.4 Mismunandi gerðir af jónandi geislun ($\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ og $\boldsymbol{\gamma}$ geislun) 273
24.4.1 $\boldsymbol{\alpha}$-geislun 273
24.4.2 $\boldsymbol{\beta}$-geislun 274
24.4.3 Gamma-geislun 274
24.5 Dæmi 275

25 Inngangur að skammtafræði **279**
25.1 Sögulegur inngangur 279
25.2 Glerpíputilraun Faradays 280
25.3 Ljósröfunartilraunin og útskýring Einsteins 281
25.4 Efnisbylgjur de Broglie 282
25.5 Klassískur líftími atómsins (*) 283
25.6 Bohr-líkanið 284
25.7 Óendanlegur mættisbrunnur 285
25.8 Dæmi 287

Kafli 1

Einingar

1.1 Alþjóðlega einingakerfið

Alþjóðlega einingakerfið eða SI-kerfið hefur sjö grunneiningar sem sjá má í töflu (10.1). Við ritum oft forskeyti fyrir framan stærðir SI-kerfisins til að lýsa betur stærðargráðu hlutarins sem um ræðir. Forskeytin má sjá í töflu (1.2).

Mælistærð	**Skammstöfun**	**Eining**
Lengd	m	Metri
Tími	s	Sekúnda
Massi	kg	Kílógramm
Hiti	K	Kelvin
Efnismagn	mol	Mól
Rafstraumur	A	Amper
Ljósstyrkur	cd	Kandela

Tafla 1.1: Grunneiningar alþjóðlega einingakerfisins.

Forskeyti	**Skammstöfun**	**Gildi**
tera	T	10^{12}
giga	G	10^{9}
mega	M	10^{6}
kilo	k	10^{3}
hecto	h	10^{2}
deka	da	10
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}

Tafla 1.2: Helstu forskeyti alþjóðlega einingakerfisins.

Til dæmis tölum við um millimetra (mm), kílógrömm (kg) og nanósekúndur (ns). Við bætum þessum forskeytum líka fyrir framan mælistærðir sem ekki eru grunneiningar SI-kerfisins. Til dæmis tölum við um terabæti (TB), desilítra (dL) og megaviku (MV). Takið eftir því að grunneiningin fyrir massa, kílógramm, er skilgreind með forskeyti ólíkt hinum grunneiningum SI-kerfisins. Út frá þessum einingum getum við skilgreint allar afleiddar stærðir SI einingakerfisins, t.d. getum við skilgreint lítrann þannig að $1000\,\mathrm{L}$ jafngildi $1\,\mathrm{m}^3$.

1.2 Staðalform og markverðir stafir

Allar mælingar í eðlisfræði fela í sér einhverja óvissu. Við getum til dæmis verið með óvissu vegna þess að mælitækin okkar eru ekki nógu góð, t.d. er mesta nákvæmni sem venjuleg reglustika getur sýnt upp á 1 mm. Það þýðir að ef við mælum stærð með reglustiku sem 12,3 cm þá erum við í rauninni að fullyrða að raunveruleg lengd reglustikunnar sé því næst að vera 12,3 cm miðað við mælikvarða reglustikunar. Ef við hefðum notað nákvæmara mælitæki, eins og t.d. millimetramæli sem hefur mælióvissu upp á 0,1 mm þá hefðum við kannski sagt að lengd reglustikunnar væri 12,34 cm (og þá hefðum við verið að námunda niður miðað við mælingu með reglustikunni). Þannig þegar við segjum að reglustikan hafi lengdina 12,3 cm þá erum við í rauninni að fullyrða að hún hafi lengd sem er einhverstaðar inni á bilinu frá 12,25 cm upp í 12,35 cm. Svo við erum í rauninni að fullyrða að raunveruleg lengd reglustikunnar sé $12{,}30 \pm 0{,}05$ cm. En þar sem að við hefðum getað farið línuvilt á reglustikunni þegar við framkvæmdum mælinguna þá er öruggara og fallegra að stækka matið okkar á óvissunni og við segjum þess vegna iðulega að lengdin sé gefin með $12{,}3 \pm 0{,}1$ cm , þ.e. við tvöföldum oftast mælióvissuna til öryggis.

Það tíðkast í raunvísindum að setja fram mælingar á staðalformi. Segjum að við höfum einhverja tölu a sem hefur n marktæka stafi. Þegar við setjum töluna a fram á staðalformi þá skrifum við hana þannig að:

$$a = b_1, b_2 \cdots b_n \cdot 10^c \; [k]$$

þar sem $[k]$ táknar samsetningu af grunneiningum SI-kerfisins. Sem dæmi þá myndu 12,3 cm = 0,123 m á staðalformi. Ástæðan er sú að staðalformið hefur ýmsa kosti. Fyrst ber að nefna að það gefur okkur hugmynd um óvissuna í mælingunni. Annar kostur er sá að það verður miklu auðveldara að vinna með tugveldin, þannig sparar maður sér oft mikla inslætti í reiknivélar.

1.3 Fermi vandamál

Ítalski eðlisfræðingurinn og nóbelsverðlaunahafinn Enrico Fermi var þekktur fyrir að geta gefið ótrúlegustu nálganir á flóknum dæmum út frá nánast engum upplýsingum. Sagan segir að þegar fyrsta kjarnorkusprengjan, Trinity, var sprengd, 16. júlí árið 1945 í Los Alamos, Nýju Mexikó, þá hafi Fermi verið búinn að rífa niður blað sem hann sleppti síðan þegar höggbylgjan barst frá sprengjunni. Út frá því hversu langt blaðsnifsin bárust mat hann sem svo að stærð sprengjunnar væri af stærðargráðunni 10 kílótonn af TNT, sem er ekki í fjærri lagi frá viðteknu gildi, 22 kílótonn. Það getur verið mikilvægur eiginleiki að læra slumpreikninga Fermis. Þá brjótum við niður dæmið í mörg minni skref og leysum hvert skref með ágiskun. Útkomman verður síðan merkilega nákvæm. Frægt Fermi vandamál (sem hefur t.d. birst í atvinnuviðtölum hjá Google) er eftirfarandi spurning:

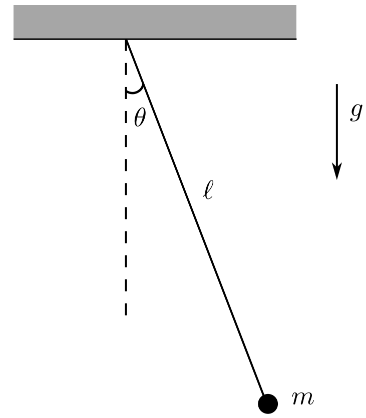
- *Hvað eru margir píanóstillarar í Chicago borg?*

Nú þurfum við að brjóta niður vandamálið. Í einhverjum skilningi er hægt að segja að því meira sem við brjótum verkefnið niður því nákvæmari veðrur niðurstaðan okkar. Til dæmis gætum við byrjað á því að giska á hversu margir búa yfir höfuð í Chicago. Við gætum giskað á að þar búi um 5 milljón manns (nákvæma talan er samt 2,7 milljónir). Við gætum síðan reynt að meta fjölda þeirra sem eiga píanó í Chicago borg. Það eru frekar fjölskyldur heldur en einstaklingar sem eiga píanó og það er eflaust svona fimmta hver fjölskylda sem á píanó. Ef hver fjölskylda hefur fjóra einstaklinga þá höfum við að heildarfjöldi píanóa í Chicago borg er:

$$\underbrace{5.000.000}_{\text{Chicagobúar}} \quad \cdot \quad \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}}_{\text{píanófjölskyldur}} \quad = 250.000.$$

Svo í heildina eru 250.000 píanó í Chicago borg. Það þarf síðan að stilla píanó á 5 ára fresti svo það þarf að stilla 50.000 píanó á ári. Ef það tekur 4 tíma að stilla píanó þá nær reyndur píanóstillir að stilla 2 píanó á einum degi miðað við 8 tíma vinnuviku. Hann vinnur síðan í 300 daga á ári með fríum svo einn píanóstillir nær að stilla 600 píanó á ári. En þá eru $50.000/600 = 83$ píanóstillarar í Chicago borg. Þetta passar líka ágætlega við það að á Íslandi eru 6 píanóstillarar en $83 \cdot 300.000/5.000.000 \approx 5$.

1.4 Víddargreining



Mynd 1.1: Pendúll, þ.e.a.s. massi, m, sem hangir í bandi af lengd ℓ í þyngdarsviði með þyngdarhröðun g.

Víddargreining er afar öflugt tól sem við munum beita mikið síðar. Það er bæði notað til þess að giska á ný lögmál og til þess að staðfesta að þau lögmál sem við höfum séu samkvæm sjálfum sér. Sem stendur þá þekkið þið ekki nógu mikið af afleiddum einingum (eins og t.d. eininguna fyrir kraft, Newton, eða eininguna fyrir orku, Joule) og því verður fyrsta umfjöllunin okkar heldur lausleg - í rauninni ætlum við bara að taka eitt dæmi.

Hugsum okkur að við viljum meta sveiflutíma pendúls, T. Fyrir þau ykkar sem langar til að spurja: „Hvað er pendúll?" þá mæli ég með að skoða mynd 1.1 hér til hægri. Pendúll er semsagt massi, m, sem hangir úr bandi af lengd ℓ og sveiflast fram og til baka í þyngdarsviði með þyngdarhröðun g. Víddargreining gæti alveg eins heitið einingargreining því það er í rauninni það sem við erum að gera. Við erum að pússla saman einingunum á stærðunum þannig að þær passi saman. Það bara vill þannig til að víddargreining hljómar eins og að það sé merkilegra heldur en einingargreining svo við veljum það nafn frekar. Við ætlum semsagt að skoða víddirnar á eftirfarandi stærðum í þessu dæmi: Massinn m, Sveiflutíminn, T, lengdin ℓ og þyngdarhröðunin g. Þegar við viljum taka fram víddirnar þ.e.a.s. einingarnar á einhverri stærð þá gerum við það með hornklofum, eins og t.d. í þessu tilviki þá höfum við:

$$[T] = \mathrm{s}, \qquad [m] = \mathrm{kg}, \qquad [\ell] = \mathrm{m}, \qquad [g] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Þar sem að einu stærðirnar sem koma fyrir í þessu dæmi eru þessar fjórar þá getum við fullyrt að til séu fastar α, β og γ þannig að:

$$T = m^\alpha \ell^\beta g^\gamma$$

Reyndar, er þetta tæknilega séð ekki alveg rétt, því það er líka eitthvað hæði á einingarlausa horninu θ svo tæknilega séð ættum við að segja að til sé fall $f(\theta)$ þannig að:

$$T = f(\theta)\, m^\alpha \ell^\beta g^\gamma$$

Við skulum hunsa fallið $f(\theta)$ í bili og einbeita okkur að því að ákvarða fastana α, β og γ út frá einingunum. Við tökum núna hornklofa báðum megin (þ.e.a.s einingar/víddir) og höfum að:

$$[T] = [m]^\alpha\, [\ell]^\beta\, [g]^\gamma \iff \mathrm{s} = \mathrm{kg}^\alpha \mathrm{m}^\beta \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)^\gamma$$

Ef við tökum núna saman veldin hægra megin og vinstra megin þá sjáum við að:

$$\mathrm{s}^1 \mathrm{kg}^0 \mathrm{m}^0 = \mathrm{s}^{-2\gamma} \mathrm{kg}^\alpha \mathrm{m}^{\beta+\gamma}$$

Með því að bera saman stig og stuðla þá sjáum við að við höfum fengið eftirfarandi jöfnuhneppi:

$$\begin{cases} -2\gamma = 1 \\ \alpha = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

En út frá því ályktum við að lausnin sé $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ og því höfum við sýnt að sveiflutíminn hlítur að vera gefinn með:

$$T = f(\theta)\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Fallið $f(\theta)$ reynist síðan (hefði kannski verið hægt að giska á það?) vera $f(\theta) = 2\pi$ fyrir einfaldan pendúl, en þá er sveiflutíminn gefinn með:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

1.5 Dæmi

Einingar, markverðir stafir og staðalform

Dæmi 1.1. Við Evrópubúarnir búum svo vel að hafa alist upp með SI-einingakerfið og notum því metra í daglegu tali. En víðsvegar um heiminn notar fólk aðrar (óheppilegar) lengdareiningar enn þann dag í dag. Við skulum skoða nokkrar þeirra hér í töflu 1.3 hér fyrir neðan:

Stærð	**Enska**	**Skammstöfun**	**Jafngildir**
Þumlungar	Inch	in	2,54 cm
Fet	Feet	ft	30,5 cm
Álnir	Ell	el	49,1 cm
Yardar	Yard	yd	91,44 cm
Mílur	Mile	mi	1,609 km

Tafla 1.3: Aðrar einingar sem notaðar eru víðsvegar í heiminum.

Breytið eftirfarandi stærðum yfir á staðalform:

(a) 6 ft 6 in **(b)** 410 mi **(c)** 120 álnir vaðmáls **(d)** 100 yards

Dæmi 1.2. Breytið eftirfarandi stærðum yfir á staðalform:

(a) 286,6 mm **(b)** 760 mg **(c)** 22,5 nm **(d)** 62,1 ps

Dæmi 1.3. Þorgeir er mikill hlaupagarpur. Hann lætur alltaf iPodinn sinn mæla vegalengdirnar sem hann hleypur. Því miður kann hann ekki að breyta stillingunum í honum svo iPodinn er alltaf stilltur á mílur. Ef hann ætlar að hlaupa 16,0 km hversu margar mílur á hann þá að hlaupa?

Dæmi 1.4. Hversu margar sekúndur eru í einu ári?

Dæmi 1.5. Meðalfjarlægðin milli jarðarinnar og sólarinnar kallast stjarnfræðieining og er táknuð með 1 AU sem jafngildir 149,6 milljón kílómetrum. Setjið fram stjarnfræðieininguna á staðalformi.

Dæmi 1.6. Ljósár, er þrátt fyrir nafnið, lengdarmælieining og jafngildir vegalengdinni sem ljósið ferðast á einu ári. Ef hraði ljósins er $c = 3{,}00 \cdot 10^8$ m/s, hver er þá lengd eins ljósárs, 1 ly, á staðalformi?

Dæmi 1.7. Hversu margar stjarnfræðieiningar eru í einu ljósári?

Fermi vandamál

Dæmi 1.8. Hversu margir tennisboltar kæmust fyrir inni í flugvél?

Dæmi 1.9. Hversu margar hárgreiðslur eru útfærðar á hverju ári í Bandaríkjunum?

Dæmi 1.10. Hversu margir lítrar af vatni eru í Atlantshafinu?

Dæmi 1.11. Hverjar eru árstekjur Dominos á Íslandi?

Dæmi 1.12. Hvað eru margir lítrar af vatni í Tjörinni í Reykjavík?

Kafli 2

Óvissureikningar

2.1 Formlegar reiknireglur við meðhöndlun óvissu

Skilgreining 2.1. Við segjum að $A \pm \Delta A$ sé **mælistærð** ef A og ΔA hafa sömu vídd.

Dæmi um mælistærð væri til dæmis lengd þumlungs, mæld með reglustiku sem $3{,}8 \pm 0{,}2\,\mathrm{cm}$, eða lengd fótar mæld með reglustiku sem $26{,}8 \pm 0{,}5\,\mathrm{cm}$. Við viljum skilja hvaða óvissu 10 þumlungar hafa gefið að við vitum lengdina á einum þumlungi með óvissu. Við viljum líka skilja hver óvissan er við samlagningu og frádrátt mælistærða, t.d. er hæð Michael Jordans iðulega sögð vera 6 fet og 6 þumlungar. Hvernig eigum við að meta óvissuna í slíkum afleiddum stærðum? Að lokum þurfum við síðan að átta okkur á því hver óvissan verður þegar við margföldum saman stærðir eða deilum þeim. Til dæmis ef við myndum vilja reikna rúmmál hlutar.

Regla 2.2. Látum $A \pm \Delta A$ og $B \pm \Delta B$ vera mælistærðir og látum k vera fasta. Þá gildir að:

(i) $k(A \pm \Delta A) = kA \pm k\Delta A$.

(ii) $(A \pm \Delta A) + (B \pm \Delta B) = (A + B) \pm (\Delta A + \Delta B)$.

(iii) $(A \pm \Delta A) - (B \pm \Delta B) = (A - B) \pm (\Delta A + \Delta B)$.

(iv) $(A \pm \Delta A)(B \pm \Delta B) = AB \pm AB\left(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}\right)$.

(v) $\frac{A \pm \Delta A}{B \pm \Delta B} = \frac{A}{B} \pm \frac{A}{B}\left(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}\right)$.

Sönnun. Við gerum þetta koll af kolli:

(i) Við tengjum mælistærðina $A \pm \Delta A$ við talnabilið $[A - \Delta A, A + \Delta A]$. Þegar við skölum allar tölurnar á þessu talnabili með k fáum við talnabilið $[k(A - \Delta A), k(A + \Delta A)] = [kA - k\Delta A), kA + k\Delta A)]$ en þar með höfum við sýnt að $k(A \pm \Delta A) = kA \pm k\Delta A$.

(ii) Við erum núna að leggja saman bilin $[A - \Delta A, A + \Delta A]$ og $[B - \Delta B, B + \Delta B]$ en þá fáum við einmitt:

$$[A - \Delta A, A + \Delta A] + [B - \Delta B, B + \Delta B] = [A + B - \Delta A - \Delta B, A + B + \Delta A + \Delta B]$$

En það er jafngilt því að $(A \pm \Delta A) + (B \pm \Delta B) = (A + B) \pm (\Delta A + \Delta B)$.

(iii) Við erum núna að draga bilið $[B - \Delta B, B + \Delta B]$ frá billinu $[A - \Delta A, A + \Delta A]$ en þá er lægsta útkoman einmitt fengin með því að taka lægstu töluna í menginu $[A - \Delta A, A + \Delta A]$, þ.e. $A - \Delta A$ og draga frá henni stærstu töluna í menginu $[B - \Delta B, B + \Delta B]$, þ.e. $B + \Delta B$. Því er lægsta talan í nýja menginu: $A - B - \Delta A - \Delta B$. Stærsta hugsanlega útkoman í nýja menginu er fengin með því að taka stærstu töluna í fyrra menginu, þ.e. $A + \Delta A$ og draga frá henni minnstu töluna í síðara menginu, þ.e. $B - \Delta B$

en þá fáum við einmitt að stærsta talan í nýja menginu er $A - B + \Delta A + \Delta B$ en þar með höfum við sýnt að:

$$[A - \Delta A, A + \Delta A] - [B - \Delta B, B + \Delta B] = [A - B - (\Delta A + \Delta B), A - B + (\Delta A + \Delta B)]$$

En það er jafngilt því að $(A \pm \Delta A) - (B \pm \Delta B) = (A - B) \pm (\Delta A + \Delta B)$.

(iv) Lægsta útkomman er fengin með því að taka lægri töluna á hvoru bilanna fyrir sig og margfalda þær saman svo við höfum að neðri mörk bilsins eru gefin með:

$$(A - \Delta A)(B - \Delta B) = AB - \Delta A\, B - A\, \Delta B + \Delta A\, \Delta B \approx AB - \Delta A\, B - A\Delta B$$

Þar sem við höfum notað að bæði ΔA og ΔB eru litlar stærðir svo við getum hunsað stærðina $\Delta A\, \Delta B$ því margfeldi tveggja lítilla talna er þá þá örlítil tala. Stærsta útkomman er fengin með því að margfalda saman stærri tölurnar tvær, en þá höfum við einmitt að:

$$(A + \Delta A)(B + \Delta B) = AB + \Delta A\, B + A\, \Delta B + \Delta A\, \Delta B \approx AB + \Delta A\, B + A\Delta B$$

Þar sem við höfum aftur nýtt okkur að $\Delta A \Delta B$ er lítil stærð. Við höfum því að margfeldi bilanna gefur:

$$[AB - \Delta A\, B - A\Delta B; AB + \Delta A\, B + A\Delta B] = \left[AB - AB\left(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}\right); AB + AB\left(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}\right)\right]$$

Þar sem við höfum tekið AB út fyrir sviga í seinni liðnum. Þetta er jafngilt því að:

$$(A \pm \Delta A)(B \pm \Delta B) = AB \pm AB\left(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}\right)$$

(v) Við þurfum nú að nota nálgunina $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ en hún gildir fyrir lítil x. Við tökum eftir því að stærðin $\Delta B/B$ er lítil svo við höfum þá að:

$$\frac{1}{B \pm \Delta B} = \frac{1}{B}\left(1 \pm \frac{\Delta B}{B}\right)^{-1} \approx \frac{1}{B}\left(1 \mp \frac{\Delta B}{B}\right)$$

En þá fáum við samkvæmt margföldunarreglunni í lið (iv) að:

$$\frac{A \pm \Delta A}{B \pm \Delta B} \approx (A \pm \Delta A)\left(\frac{1}{B} \pm \frac{\Delta B}{B^2}\right) = \frac{A}{B} \pm \frac{A}{B}\left(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B/B^2}{1/B}\right) = \frac{A}{B} \pm \frac{A}{B}\left(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}\right).$$

□

Aðferðina sem við notuðum til þess að sanna síðasta liðin má gera formlegri með svokölluðum Taylor-nálgunum en þannig má til dæmis meta hvort að nálgunin sé góð eða ekki. Við setjum fram almennu reiknireglunna en hún er aðeins til yndisauka á þessu stigi málsins:

Regla 2.3. Látum f vera samfellt, diffranlegt fall og $A \pm \Delta A$ vera mælistærð. Þá gildir að:

$$f(A \pm \Delta A) \approx f(A) \pm f'(A)\Delta A$$

þar sem að f' táknar afleiðu fallsins f.

Til frekari skýringar þá höfum við fyrir fallið $f(x) = 1/x$ að $f'(x) = -1/x^2$ en þá höfum við einmitt að:

$$f(B \pm \Delta B) = \frac{1}{B \pm \Delta B} \approx \frac{1}{B} \pm \frac{1}{B^2}\Delta B.$$

Sem var einmitt það sem við notuðum í útleiðslunni á lið (v) í setningu 2.2 hér á undan.

2.2 Sýnidæmi um óvissureikninga

Sýnidæmi 2.1. Við tökum vatn við upphafshitastig $T_1 = 18{,}5 \pm 0{,}3\,°\mathrm{C}$ og hitum það upp þar til það hefur náð lokahitastigi $T_2 = 22{,}0 \pm 0{,}3\,°\mathrm{C}$. Hver er hitastigsbreytingin, $T_2 - T_1$, með óvissu?

Lausn: Takið eftir því hvað ritháttturinn okkar er óheppilegur því við notum Δ bæði fyrir breytingu og óvissu! Þess vegna nota sumir litla δ fyrir óvissu í staðinn. Við höfum þá að hitastigsbreytingin er:

$$T_2 - T_1 = 3{,}5 \pm 0{,}6\,°\mathrm{C}$$

Sýnidæmi 2.2. Lítum á flöt sem hefur lengd $\ell \pm \Delta\ell = 1{,}50 \pm 0{,}02\,\mathrm{m}$ og breidd $b \pm \Delta b = 20 \pm 1\,\mathrm{cm}$. Ákvarðið flatarmál flatarins, $A \pm \Delta A$, með óvissu.

Lausn: Við höfum þá að:

$$A \pm \Delta A = (\ell \pm \Delta\ell)(b \pm \Delta b) = \ell b \pm \ell b \left(\frac{\Delta\ell}{\ell} + \frac{\Delta b}{b}\right)$$

Við athugum að: $A = \ell b = 1{,}50\,\mathrm{m} \cdot 20\,\mathrm{cm} = 1{,}50\,\mathrm{m} \cdot 0{,}20\,\mathrm{m} = 0{,}30\,\mathrm{m}^2$ og

$$\Delta A = \ell b \left(\frac{\Delta\ell}{\ell} + \frac{\Delta b}{b}\right) = 0{,}30\,\mathrm{m}^2 \left(\frac{0{,}02\,\mathrm{m}}{1{,}50\,\mathrm{m}} + \frac{1\,\mathrm{cm}}{20\,\mathrm{cm}}\right) = 0{,}019\,\mathrm{m}^2$$

En þar með ályktum við að $A \pm \Delta A = 0{,}30 \pm 0{,}02\,\mathrm{m}^2$. Takið eftir að við námunduðum óvissuna upp þar sem það hefur enga merkingu að skrifa $0,30 \pm 0,019\,\mathrm{m}^2$. Í rauninni ákvarðast fjöldi markverðra stafa í útkommunni á stærð óvissunnar.

Sýnidæmi 2.3. Hlaupari nokkur hleypur vegalengd, $s = 100{,}0 \pm 0{,}2\,\mathrm{m}$, á tíma, $t = 9{,}85 \pm 0{,}06\,\mathrm{s}$. Ákvarðið meðalhraða hlauparans, $v_m = \frac{s}{t}$, í hlaupinu með óvissu.

Lausn: Við fáum að:

$$\begin{aligned} v_m \pm \Delta v_m &= \frac{s \pm \Delta s}{t \pm \Delta t} = \frac{s}{t} \pm \frac{s}{t}\left(\frac{\Delta s}{s} + \frac{\Delta t}{t}\right) \\ &= \frac{100{,}0\,\mathrm{m}}{9{,}85\,\mathrm{s}} \pm \frac{100{,}0\,\mathrm{m}}{9{,}85\,\mathrm{s}}\left(\frac{0,2}{100,0} + \frac{0,06}{9,85}\right) \\ &= 10{,}15\,\mathrm{m/s} \pm 0{,}08\,\mathrm{m/s} \\ &= 10{,}2 \pm 0{,}1\,\mathrm{m/s}. \end{aligned}$$

Takið eftir að hlutfallsóvissur eru alltaf víddarlausar stærðir svo við getum sleppt því að skrifa einingar þar.

Sýnidæmi 2.4. Lítum á rör með geisla $r = 5{,}2 \pm 0{,}2\,\mathrm{cm}$ og lengd $\ell = 63 \pm 2\,\mathrm{cm}$. Ákvarðið rúmmál rörsins, $V \pm \Delta V$.

Lausn: Við höfum þá að:

$$V \pm \Delta V = \pi r^2 \ell \pm \pi r^2 \ell \left(\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta\ell}{\ell}\right) = 5{,}352 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \pm 5{,}82 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^3 = (5{,}4 \pm 0{,}6) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3.$$

Sýnidæmi 2.5. Látum mælistærðina $x \pm \Delta x$ vera gefna. Ákvarðið óvissuna í stærðinni x^n.

Lausn: Við höfum þá að $f(x) = x^n$, en $f'(x) = nx^n$ svo við ályktum að:

$$(x \pm \Delta x)^n = f(x \pm \Delta x) = f(x) \pm f'(x)\Delta x = x^n \pm nx^{n-1}\Delta x = x^n \pm nx^n \frac{\Delta x}{x}.$$

Sýnidæmi 2.5. Látum mælistærðina $\theta \pm \Delta\theta$ vera gefna. Ákvarðið óvissuna í stærðunum $\sin(\theta)$ og $\cos(\theta)$.

Lausn: Við höfum þá að $f(\theta) = \sin(\theta)$, en $f'(\theta) = \cos(\theta)$ svo við ályktum að:

$$\sin(\theta \pm \Delta\theta) = f(\theta \pm \Delta\theta) = f(\theta) \pm f'(\theta)\Delta\theta = \sin\theta \pm \cos(\theta)\Delta\theta.$$

Eins fæst fyrir $g(\theta) = \cos(\theta)$ að:

$$\cos(\theta \pm \Delta\theta) = g(\theta \pm \Delta\theta) = g(\theta) \pm g'(\theta)\Delta\theta = \cos\theta \pm \sin(\theta)\Delta\theta.$$

Takið eftir því að hér þarf óvissan í horninu θ að vera mæld í radíónum (annars passa víddirnar ekki).

2.3 Dæmi

Dæmi 2.1. Árið 240 f.Kr. mældi gríski stærðfræðingurinn Eratosþenes ummál jarðar. Niðurstaða hans var að ummál jarðar væri 250.000 ± 10.000 skeið. Skeiðið er lengdarmælieining sem notuð var í Grikklandi til forna og eitt skeið samsvarar $158\,\mathrm{m}$. Setjið fram niðurstöðu Eratosþenesar ásamt óvissu með einingunni km og segið til um hvort rétt gildi á ummáli jarðar, $40.075\,\mathrm{km}$, sé innan óvissumarkanna.

Dæmi 2.2. Halldór Kiljan Laxness er að velta fyrir sér hversu mörgum bókum hann geti komið fyrir í sundlauginni sinni við Gljúfrastein. Rúmmál einnar bókar er $V_{\text{bók}} = 1270 \pm 50\,\mathrm{cm}^3$ en rúmmál sundlaugarinnar er $V_{\text{laug}} = lbd$ þar sem $l = 10{,}0 \pm 0{,}1\,\mathrm{m}$ er lengd, $b = 4{,}5 \pm 0{,}1\,\mathrm{m}$ er breidd og $d = 2{,}1 \pm 0{,}1\,\mathrm{m}$ er dýpt sundlaugarinnar. Hversu mörgum bókum kemur skáldið fyrir í sundlauginni sinni?

Dæmi 2.3. Rétthyrnd járnplata mælist $330 \pm 4\,\mathrm{mm}$ á lengd og $170 \pm 2\,\mathrm{mm}$ á breidd.

(a) Reiknið ummál plötunnar með óvissu og skráið með réttum fjölda markverðra stafa.

(b) Reiknið flatarmál plötunnar með óvissu og skráið með réttum fjölda markverðra stafa.

Dæmi 2.4. Sívalningur hefur lengd $\ell = 22{,}0 \pm 0{,}5\,\mathrm{cm}$, geisla $r = 2{,}5 \pm 0{,}1\,\mathrm{cm}$ og massa $m = 3500 \pm 5\,\mathrm{g}$. Finnið eðlismassa sívalingsins með óvissu.

Dæmi 2.5. Hafdís var að hita $m = 100 \pm 2\,\mathrm{g}$ af vatni. Upphafshitastig vatnsins var $T_1 = 7{,}3 \pm 0{,}2\,°\mathrm{C}$ en lokahitastig þess er $T_2 = 85{,}0 \pm 0{,}2\,°\mathrm{C}$. Eðlisvarmi vatns er $c_{\text{vatn}} = 4{,}186\,\mathrm{kJ/kg°C}$. Notið jöfnuna $Q = c_{\text{vatn}} m \Delta T$ til þess að finna hversu mikinn varma $Q \pm \Delta Q$ hún þurfti til þess a hita vatnið. Skráið svarið með óvissu og réttum fjölda markverðra stafa.

Dæmi 2.6. Bergljót vaknar á ókunnuglegum stað. Hún dregur því þá ályktun að henni hafi verið rænt af geimverum. Bergljót er vel undirbúin fyrir slíkar aðstæður og hefur því ávallt með sér gorm með gormstuðul k. Hún festir massa $m = 5{,}0 \pm 0{,}1\,\mathrm{kg}$ við gorminn og lætur hann sveiflast í lóðrétta stefnu. Hún veit að á jörðinni gildir að $k = 4\pi^2 \frac{m}{T^2}$ þar sem T er umferðartími sveiflunnar.

(a) Bergljót mælir umferðartíma sveiflunnar sem $T = 3{,}0 \pm 0{,}5\,\mathrm{s}$. Reiknið gormstuðulinn með óvissu og skráið niðurstöðuna með óvissu og réttum fjölda markverðra stafa.

(b) Bergljót hefur mælt gormstuðul gormsins í tilraunastofunni sinni heima og veit að gormurinn hennar hefur gormstuðulinn $30 \pm 2\,\mathrm{N/m}$. Sýna mælingar Bergljótar fram á að henni hafi verið rænt af geimverum?

Dæmi 2.7. Þegar tvö viðnám R_1 og R_2 eru hliðtengd nýtur heildarviðnámið, R_{heild}, í rásinni eftirfarandi jöfnu:

$$\frac{1}{R_{\text{heild}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Látum nú $R_1 = 25{,}4 \pm 0{,}5\,\Omega$ og $R_2 = 17{,}8 \pm 0{,}5\,\Omega$. Hvert er þá heildarviðnámið, R_{heild} í rásinni?

Dæmi 2.8. Fræg er sagan af Arkímedesi og krúnu Hiero II Sýrakúsukonungs. Hiero hafði fengið gullsmið nokkurn til þess að smíða kórónu handa sér. En fúskarinn blandaði silfri í blönduna og hélt eftir hluta gullsins. Útaf undarlegri lögun kórónunnar reyndist erfitt að mæla rúmmál hennar (og þar með eðlismassa hennar). Það var ekki fyrr en Arkímedes uppgötvaði sniðuga leið til þess að mæla rúmmál óreglulegra hluta með því að sökkva þeim í vatn sem það komst upp um svikahrappinn. Sagan segir að Arkímedes hafi eftir uppgötvunina hlaupið nakinn um stræti Sýrakúsu og öskrað: „Eureka!" sem á forngrísku merkir „Ég hef fundið". Eðlismassi gulls er $\rho_{\text{gull}} = 19{,}30 \pm 0{,}01\,\mathrm{g/cm}^3$ en eðlismassi volframs (einnig nefnt þungsteinn) er $\rho_{\text{volfram}} = 19{,}25 \pm 0{,}01\,\mathrm{g/cm}^3$. Vegna þess hve litlu munar á eðlisþyngd málmanna tíðkast það í dag að fúskarar komi fyrir volfram inni í gullstöngum. Ein gullstöng vegur undir venjulegum kringumstæðum $1000 \pm 1\,\mathrm{g}$. Segjum að $1\,\mathrm{g}$ af gulli kosti $8514\,\mathrm{kr}$ á meðan $1\,\mathrm{g}$ af volfram kosti $48\,\mathrm{kr}$. Hversu mikið geta fúskrarnir grætt á því að skipta út volframi fyrir gull per stöng? Gerum ráð fyrir að þeir séu sniðugir og reyni að halda eðlismassa blöndunnar innan óvissumarka gullsins.

Kafli 3

Gangfræði

Helsta markmið aflfræðinnar er að ákvarða staðsetningu hluta sem fall af tíma. Á síðari hluta 19. aldar á William Thomson (einnig þekktur sem Lord Kelvin) að hafa sagt að það væri ekkert eftir til þess að uppgötva í eðlisfræði lengur. Það eina sem eðlisfræðingar ættu eftir ógert væri að reikna fleiri aukastafi með betri mælitækjum og nálgunum. Honum skjátlaðist sem betur fer hrapalega!

3.1 Staða, hraði og hröðun

Við skulum byrja á því að tala um einvíða hreyfingu. Það er mikilvægt að nefna að það er alltaf hægt að snúa hnitakerfinu þannig að hreyfing hlutarins sé aðeins í eina vídd.

> **Skilgreining 3.1.** Lítum á hlut sem hreyfist í einni vídd. **Staðsetning** hlutarins er táknuð með s. Við skrifum stundum $s(t)$ til þess að taka fram að staðsetningin s sé fall af tíma, t. Við notum iðulega ritháttinn s_0 til þess að tákna **upphafsstaðsetningu** hlutarins. **Færsla** hlutarins frá staðsetningu s_1 til s_2 er táknuð með $\Delta s = s_2 - s_1$.

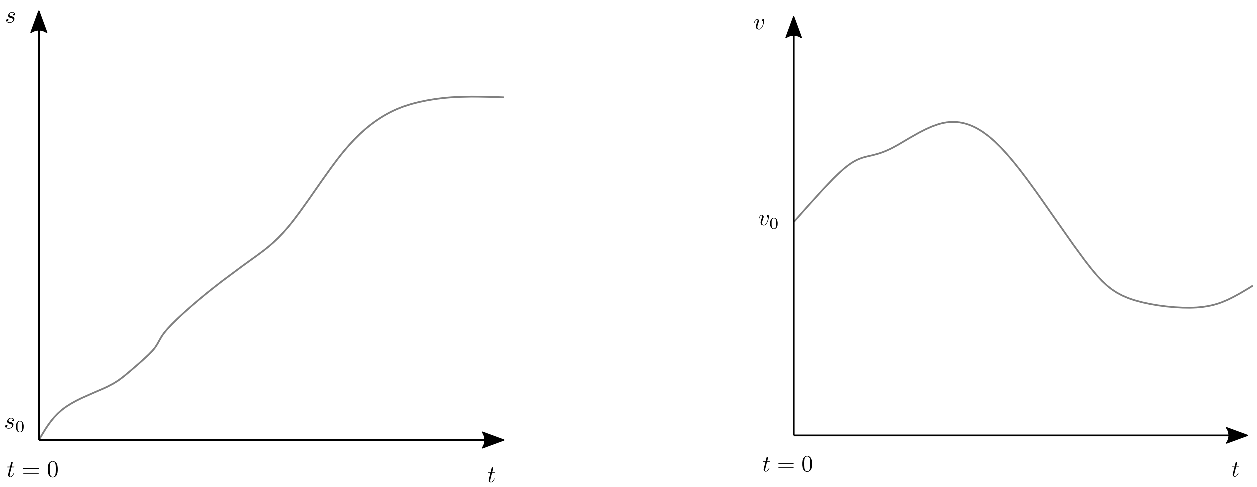
Takið eftir að upphafsstaðsetningin er miðuð við tímann þar sem við byrjum mælingu. Okkur er frjálst að stilla klukkurnar okkar þannig að hún sýnir upphafstímann sem $t_0 = 0$ þegar hluturinn er í upphafsstaðsetningu sinni. Það er mjög hentugt þar sem að við höfum einungis áhuga á breytingu í tíma, þ.e.a.s. $\Delta t = t - t_0$, en þá með því að velja $t_0 = 0$ þá höfum við að $\Delta t = t$.

Okkur er því bæði frjálst að stilla klukkurnar okkar á $t = 0$ og að velja hnitakerfið okkar þannig að $s_0 = 0$.

Þegar við hugsum um orðið hraði, þá tengjum við það iðulega við upplifuna okkar af því í daglegu tali sem er oftast í tengslum við bíla og önnur farartæki, t.d rafmagnshlaupahjólin frá Hopp. Við hugsum um það sem mælikvarða á það hversu fljót við erum á milli tveggja staða s_a og s_b. Ef við keyrum hratt þá komumst við fljótt á staðinn! Það sem fólk gleymir að taka inn í reikninginn er að það skiptir líka gríðarlega miklu máli hvort að við séum að breyta hraðanum okkar á leiðinni. Við erum til dæmis mjög lengi að hlaupa maraþon ef við tökum okkur tveggja tíma lúr í miðju hlaupi. Breyting í hraða nefnist hröðun. Ef engin hröðun verkar á farartækið þá tölum við um að það ferðist með jöfnum hraða. Ef við keyrum með jöfnum hraða 90 km/klst þá er auðvelt að áætla hversu lengi við erum á leiðinni til Selfossar sem er í 60 km fjarlægð. Það er því eðlilegt að skilgreina (sérstaklega miðað við einingarnar)

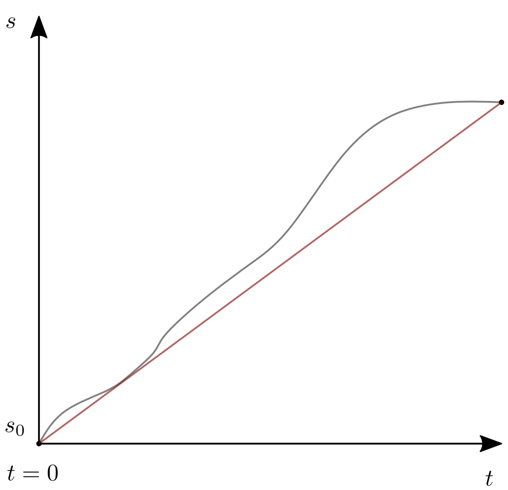
> **Skilgreining 3.2.** Lítum á hlut sem ferðast frá upphafsstaðsetningu s_0 til s_1 á tíma t. **Meðalhraði** hlutarins, v_m, er þá skilgreindur þannig að:
>
> $$v_m := \frac{s_1 - s_0}{t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Hinsvegar þá keyrum við ekki alltaf með jöfnum hraða. Því miður virkar umferðin ekki nema að sumir stoppi stundum á rauðu ljósi. Þess vegna er skilgreining að ofan ekkert sérlega góð. Til þess að betrumbæta hana þá getum við skoðað meðalhraðan á styttri tímabilum. Þegar tímabilið Δt verður örlítið (og þar með líka vegalengdin Δs) þá fáum við það sem kallast augnablikshraði hlutarins, sem er það sem við köllum einfaldlega hraða hlutarins. Það er hraðinn sem þið sjáið í mælaborði bílsins. Til þess að útskýra þetta nánar skulum við kynna tvö afar hentug tól, þ.e.a.s. stöðu-tíma grafið og hraða-tíma grafið.

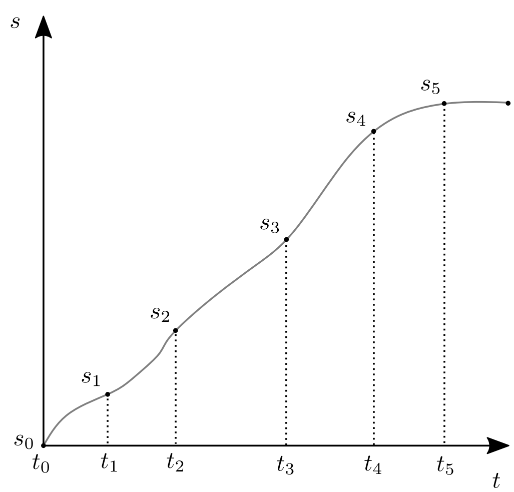


Mynd 3.1: Hér má sjá vinstra meginn stöðu sem fall af tíma og hægra meginn hraða sem fall af tíma.

Á stöðu-tíma grafinu þá teiknum við stöðu hlutar, s, sem fall af tíma t. Við teiknum það oft þannig að $s_0 = 0$ við $t = 0$ eins og sést á mynd **??** hér að ofan. Á hraða-tíma grafinu þá teiknum við hraða hlutarins, v, sem fall af tíma t. Við getum hinsvegar ekki eins auðveldlega skilgreint upphafshraðann v_0 þannig að hann sé núll (það er samt hægt en þá þurfum við að tala um afstæða hreyfingu!). Dæmi um slíkt graf má sjá á mynd **??** hér að ofan.

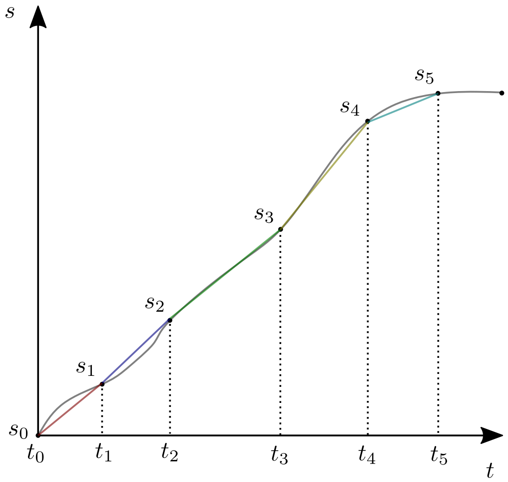


(a) Á þessu stöðu-tíma grafi táknar rauða línan feril hlutar sem hefði haft fastan meðalhraða.

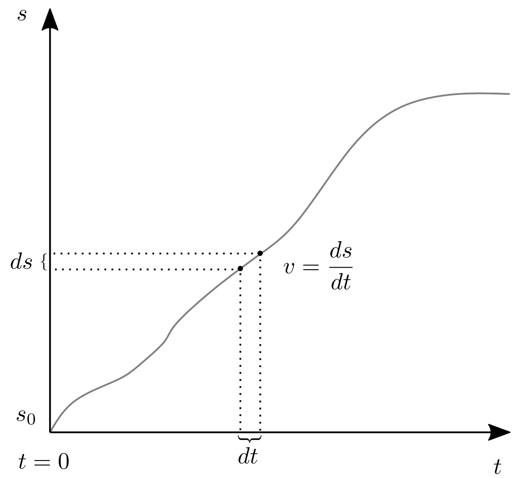


(b) Til að fá nákvæmara mat á hraðann þá er heildartíminn brotinn niður í minni tímabil.

Mynd 3.2: Vinstra meginn sést munurinn á hlut sem ferðast með breytilegum hraða og hlut sem ferðast með föstum hraða. Hægra meginn sést sami ferill þar sem við bætt við skiptipunktum til að minnka tímabilið.



(a) Því minni tímabil sem við veljum, því betra mat á raunverulegan hraða hlutarins.



(b) Hraðinn er skilgreindur sem hallatalan í sérhverjum punkti á stöðu-tíma grafi.

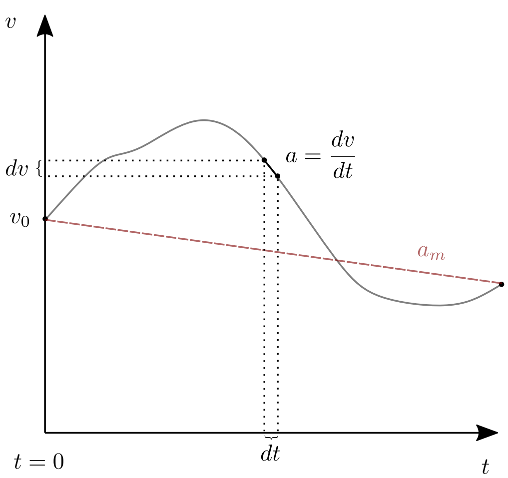
Mynd 3.3: Með því að stöðugt minnka tímabilið þá fæst nákvæmara mat á punkthraða hlutarins.

Skilgreining 3.3. Við skilgreinum **hraða** hlutar sem hallatölu snertils við stöðu-tímagrafið, þ.e.

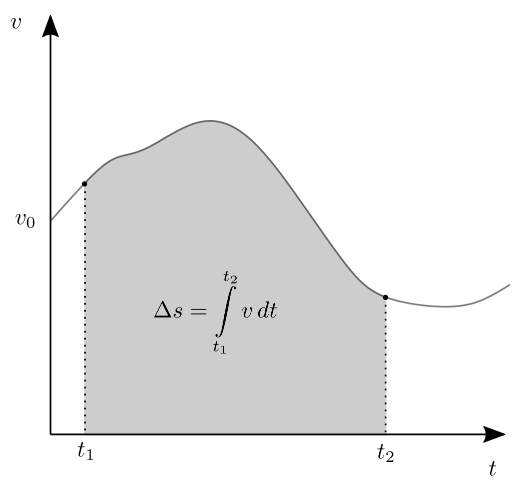
$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Skilgreining 3.4. Við skilgreinum **hröðun** hlutar sem hallatölu snertils við hraða-tímagrafið, þ.e.

$$a = \frac{dv}{dt}.$$



(a) Á þessu hraða-tíma grafi sést bæði augnablikshröðunin a og meðalhröðunin a_m.



(b) Flatarmálið undir hraða-tíma ferlinum jafngildir breytingu í stöðu hlutarins.

Mynd 3.4: Vinstri: Augnablikshröðun/meðalhröðun. Hægri: Samsvörun flatarmáls undir ferli við færslu.

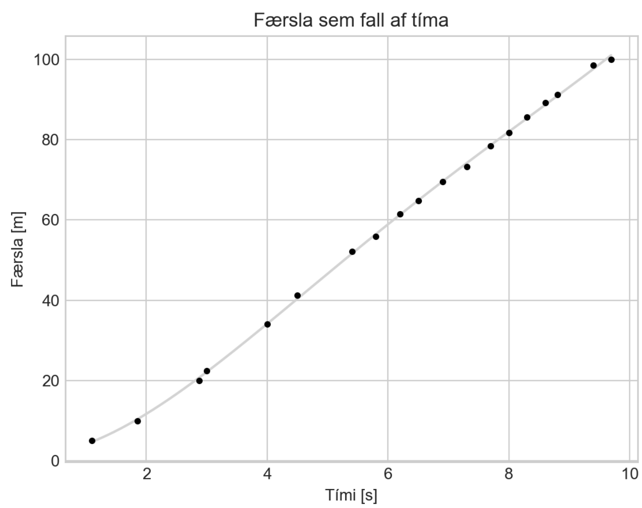
Lögmál 3.5. Flatarmálið undir ferli hraða-tíma grafsins jafngildir færslunni.

3.2 Usain Bolt

Þið kannist eflaust við það að Usain Bolt sé fljótasti maður heims. Til þess að skýra stöðu-tíma og hraða-tíma gröfin nánar þá má sjá gögn sem lýsa hlaupi hans á Ólympíuleikunum í Beijing árið 2008 hér fyrir neðan. Í myndbandsupptökum af hlaupinu þá sést hvernig Usain Bolt hægir á sér síðustu 20 m hlaupsins. Það sést einnig greinilega á hraða-tíma grafinu hér fyrir neðan. Margir hafa velt fyrir sér hversu hratt hann hefði getað hlaupið ef hann hefði ekki hægt á sér síðustu metrana í því hlaupi.

Vegalengd [m]	**Tími** [s]
5.0 ± 0.5	1.10 ± 0.01
10.0 ± 0.5	1.85 ± 0.01
20.0 ± 0.5	2.87 ± 0.01
34.0 ± 0.4	4.00 ± 0.01
41.3 ± 0.5	4.50 ± 0.01
52.1 ± 0.5	5.40 ± 0.01
55.9 ± 0.5	5.80 ± 0.01
61.5 ± 0.5	6.20 ± 0.01
64.8 ± 0.4	6.50 ± 0.01
69.6 ± 0.2	6.90 ± 0.01
73.3 ± 0.2	7.30 ± 0.01
81.7 ± 0.2	8.00 ± 0.01
85.6 ± 0.2	8.30 ± 0.01
89.2 ± 0.2	8.60 ± 0.01
91.3 ± 0.2	8.80 ± 0.01
98.6 ± 0.2	9.40 ± 0.01
100.0 ± 0.1	9.69 ± 0.01

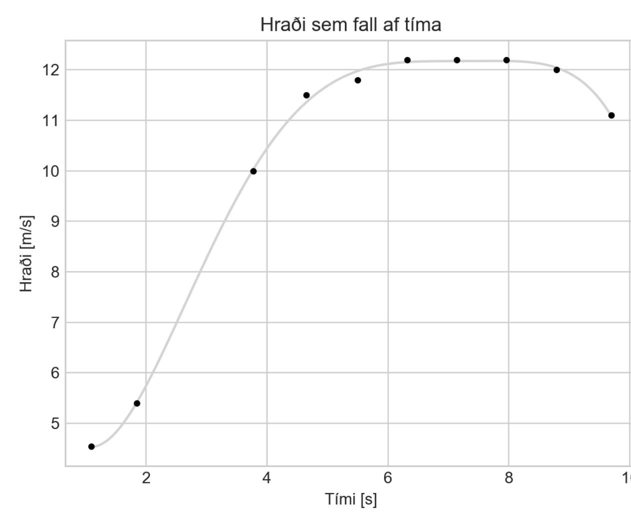
Tafla 3.1: Tafla með mælingum Bolts.



Tafla 3.2: Graf sem sýnir stöðu Bolts sem fall af tíma.

Meðalhraði [m/s]	**Tími** [s]
4.54	1.10
5.40	1.85
10.0	3.78
11.5	4.65
11.8	5.50
12.2	6.32
12.2	7.14
12.2	7.96
12.0	8.79
11.1	9.69

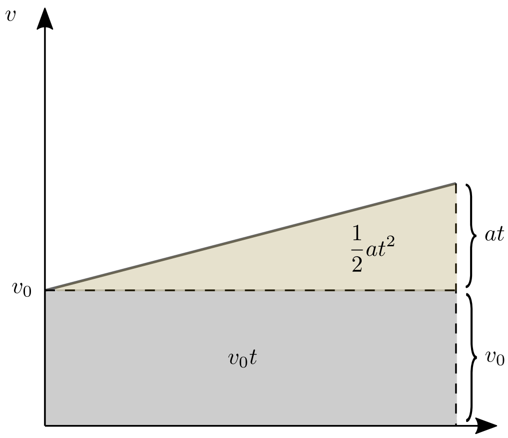
Tafla 3.3: Mælingar á meðalhraða Bolts.



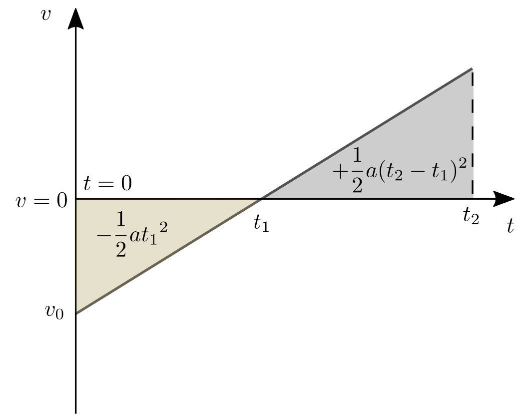
Tafla 3.4: Graf sem sýnir meðalhraða Bolts sem fall af tíma.

3.3 Föst hröðun og stöðujöfnurnar

Við skulum núna skoða sértilfellið þegar hröðun hlutarins, a, er föst. Þið gætuð haldið að það væri afskaplega óáhugavert tilvik, en það er afskaplega mikilvægt. Til dæmis er þyngdarhröðun jarðar, $g = 9{,}82\,\mathrm{m/s^2}$, föst. Helsti kosturinn við að skoða fasta hröðun er að það einfaldar lögun hraða-tíma grafsins afskaplega mikið og það samanstendur aðeins af beinum línum (sem þýðir að það er auðvelt að reikna flatarmálið undir ferlinum).



(a) Hraða-tíma graf hlutar sem ferðast með fastri hröðun a.



(b) Hraða-tíma graf með neikvæðan upphafshraða v_0 og fasta hröðun a.

Mynd 3.5: Hraða-tíma gröf með fastri hröðun a.

Lögmál 3.6. Lítum á hlut sem er upphaflega staddur í s_0 og hefur upphafshraða v_0. Gerum ráð fyrir að hluturinn verði fyrir fastri hröðun a. Látum s tákna stöðu hlutarins og v tákna hraða hlutarins eftir tímann t. Þá gilda stöðujöfnurnar:

(i) $v = v_0 + at$.

(ii) $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

(iii) $2a\Delta s = v^2 - v_0^2$.

Útleiðsla: Með mynd 3.5a í huga þá athugum við að:

(i) Þar sem hröðunin er föst er hún jöfn meðalhröðuninni, þ.e.a.s. $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ en það þýðir einmitt að $\Delta v = a\Delta t$ sem er það sama og að segja að $v - v_0 = at$, þ.e. $v = v_0 + at$.

(ii) Með lögmál 3.5 í huga þá hefjumst við handa við að reikna flatarmálið undir hraða-tíma grafinu. Við tökum fyrst eftir ferhyrningnum á mynd 3.5a sem hefur hæðina v_0 og breiddina t og hefur því flatarmálið $v_0 t$. Hinsvegar tökum við eftir þríhyrningnum á mynd 3.5a sem hefur hæðina at samkvæmt stöðujöfnu (i) hér á undan og breiddinna t. En þar með er flatarmál þríhyrningsins gefið með $\frac{1}{2}(at)t = \frac{1}{2}at^2$. Heildarflatarmálið er því einmitt:

$$\Delta s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

(iii) Samkvæmt stöðujöfnu (i) höfum við að $t = \frac{v - v_0}{a}$. Við stingum því inn í stöðujöfnu (ii) og fáum:

$$\Delta s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 = \frac{vv_0}{a} - \frac{{v_0}^2}{a} + \frac{v^2}{2a} - \frac{vv_0}{a} + \frac{{v_0}^2}{2a} = \frac{v^2 - {v_0}^2}{2a}.$$

Með því að margfalda í gegn með $2a$ fáum við einmitt að $2a\Delta s = v^2 - {v_0}^2$. □

3.4 Dæmi

Hraði

Dæmi 3.1. Ökumenn þurfa að gæta að þriggja sekúndna reglunni til að tryggja nægilegt bil á milli bíla í umferðinni. Bíll keyrir á 90 km/klst. Hversu langa vegalengd ferðast hann á þremur sekúndum?

Dæmi 3.2. Vegalengdin frá Reykjavík til Leifsstöðvar er rúmir 50 km. Anna og Baldur eru í kapphlaupi. Anna keyrir á löglegum hámarkshraða, 90 km/klst á meðan Baldur keyrir ólöglega á 100 km/klst. Ef Anna og Baldur leggja af stað á sama tíma frá Reykjavík, hversu miklum tíma munar á því hvenær þau koma fram á áfangastaðinn?

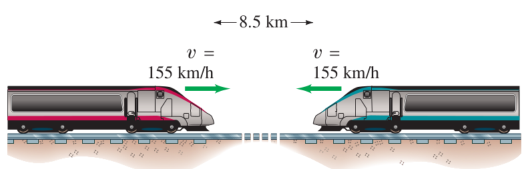
Dæmi 3.3. Heiðlóan er farfugl sem kemur til Íslands í lok mars eftir vetrarsetu í Bretlandseyjum. Hún getur flogið með allt að 80 km/klst meðalhraða. Ef vegalengdin frá Bretlandseyjum til Íslands er rúmir 1500 km, hversu langan tíma tekur það heiðlóuna að fljúga til Íslands?

Dæmi 3.4. Meðalfjarlægðin milli jarðarinnar og sólarinnar er $1\,\mathrm{AU} = 1{,}50 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$. Tíminn sem það tekur jörðina að fara einn hring í kringum sólina er eitt ár. Hver er meðalhraði jarðarinnar á braut sinni um sólina?

Dæmi 3.5. Lilja sér blossa frá flugeldi og heyrir hvellinn 3,00 s síðar. Hve langt frá flugeldinum stendur Jóhanna ef hljóðhraðinn er $v_{\text{hljóð}} = 343\,\mathrm{m/s}$?

Dæmi 3.6. Jörmunrekur er mættur í Keiluhöllina í Egilshöll. Keilubrautirnar þar eru 18,3 m langar. Jörmunrekur hendir kúlunni sinni þannig að hún rennur eftir brautinni með föstum hraða. Hann heyrir kúluna skella á keilunum 2,80 s eftir að hann kastaði kúlunni. Hver var hraði keilukúlunnar?

Dæmi 3.7. Tvær járnbrautalestir nálgast óðfluga á sömu lestarteinunum. Báðar lestirnar eru að ferðast með jöfnum hraða, 155 km/klst. Vegalengdin á milli lestanna er til að byrja með 8,5 km. Hversu langur tími mun líða þar til að lestarnar skella saman?

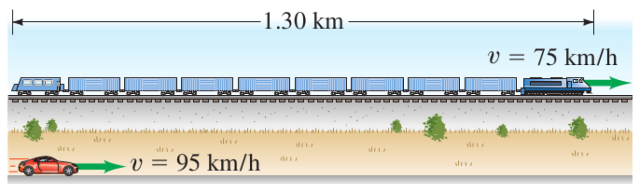


Mynd 3.6: Mynd af lestunum tveim.

Dæmi 3.8. Bíll sem ferðast með jöfnum hraða 95 km/klst tekur fram úr flutningalest sem ferðast með jöfnum hraða 75 km/klst. Flutningalestin er 1,30 km að lengd.

(a) Hversu langan tíma tekur það bílinn að taka fram úr lestinni?

(b) Hversu langa vegalengd hefur bíllinn ferðast á þeim tíma?



Mynd 3.7: Mynd af bílnum og lestinni.

Hröðun

Dæmi 3.9. Formúlubíll Lewis Hamiltons getur tekið af stað úr kyrrstöðu og náð 200 km/klst á 4,4 s.

(a) Hver er meðalhröðun bílsins á þeim tíma?

(b) Metið vegalengdina sem hann ferðast á þeim tíma.

Dæmi 3.10. Bíll keyrir með 50 km/klst hraða þegar hann kemur inn í götu þar sem hámarkshraðinn er 30 km/klst. Hann hemlar í 3,6 s til að hægja á sér. Hver var meðalhröðun bílsins á þeim tíma?

Dæmi 3.11. Usain Bolt tekur af stað úr kyrrstöðu og nær 12,2 m/s hraða á 5,68 s. Hver var meðalhröðun Bolts?

Stöðujöfnurnar

Dæmi 3.12. Bíll breytir hraða sínum úr 14 m/s í 21 m/s á 6,0 s. Hver var meðalhröðun bílsins á þeim tíma? Hversu langa vegalengd ferðaðist bíllinn á þeim tíma?

Dæmi 3.13. Einkaflugvél Jeff Bezos þarf að ná 35 m/s hraða til að geta tekið á loft. Hversu löng þarf flugbrautin að vera ef meðalhröðun flugvélarinnar er 3,0 m/s^2?

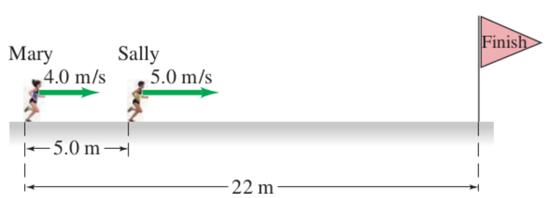
Dæmi 3.14. Þyngdarhröðun jarðar er $g = 9{,}82\,\mathrm{m/s^2}$. Köttur nokkur dettur fram af svölum á þriðju hæð og lendir á jörðinni 1,1 s síðar. Kötturinn lifir af fallið sem betur fer! Úr hversu mikilli hæð féll kötturinn?

Dæmi 3.15. Hæsta bygging í heimi er Burj Khalifa turnin sem er staðsettur í Dubai í Sameinuðu arabísku furstadæmunum. Hann er 830 m á hæð. Hugsum okkur manneskju sem fellur fram af toppi turnsins. Hversu langur tími líður þar til að manneskjan lendir á jörðinni? Hver væri hraði manneskjunnar rétt áður en hún skellur á jörðinni og upplifir voveiflegan dauðdaga sinn?

Dæmi 3.16. Í ökuskóla 3 er fólk stundum fengið til þess að nauðhemla á 80 km/klst hraða. Mesta hemlunarhröðun sem að ökumaður getur haldið stjórn á bílnum við er um það bil 6,0 m/s^2. Hver er minnsta vegalengdin sem bílinn ferðast þar til ökumaðurinn nær að stöðva bílinn án þess þó að missa stjórn á honum?

Dæmi 3.17. Sigga litla er bráðgáfuð og ætlar að mæla dýptina á brunninum í sveitinni sinni með sniðugri aðferð. Hún sleppir stein ofan í brunninn og heyrir hann lenda í vatninu eftir 1,3 s. Hversu djúpur er brunnurinn?

Dæmi 3.18. Sigga og Magga eru að taka þátt í Maraþonhlaupi. Þegar Sigga er 22 m frá endamarkinu er hraði hennar 5,0 m/s. Magga er 5,0 m fyrir aftan Siggu og hleypur með hraða 4,0 m/s. Sigga telur sigurinn vera í höfn og byrjar að hægja á sér með fastri hröðun $-0{,}40\,\mathrm{m/s^2}$ þar til hún kemur í mark. Magga sér sér leik á borði og ákveður að gefa í síðustu metrana. Hver þarf hröðun Möggu að vera restina af hlaupinu til þess að þær komi jafnar í mark?



Mynd 3.8: Síðustu metrarnir í maraþonhlaupinu.

Dæmi 3.19. Lalli leynilögreglumaður ferðast í bíl með upphafshraða 95 km/klst þegar ökuníðingur nokkur tekur fram úr honum á 135 km/klst. Nákvæmlega 1,00 s eftir að ökuníðingurinn tekur fram úr Lalla byrjar Lalli að gefa í og eykur hraðann sinn með jafnri hröðun $a = 2{,}60\,\mathrm{m/s^2}$. Hversu langur tími líður þar til að Lalli nær ökuníðingnum ef ökuníðingurinn heldur jöfnum hraða?

Stöðu-tíma og hraða-tíma gröf

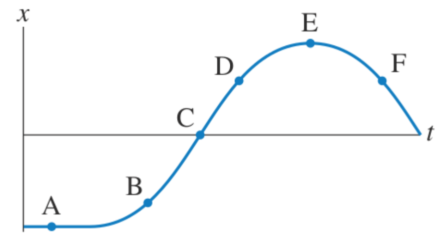
Dæmi 3.20. Lítum á stöðu-tíma grafið hér fyrir neðan á mynd 3.9. Í hvaða punktum

(a) Var hraði hlutarins mestur?

(b) Var hluturinn að ferðast til vinstri?

(c) Var hluturinn að auka hraða sinn?

(d) Var hluturinn að snúa við?



Mynd 3.9: Staða, x, sem fall af tíma, t.

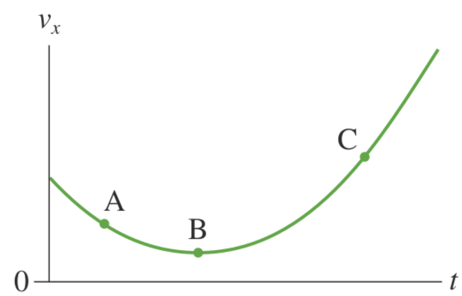
Dæmi 3.21. Lítum á hraða-tíma grafið hér fyrir neðan á mynd 3.10. Í hvaða punktum

(a) Er hluturinn að auka hraða sinn?

(b) Er hluturinn að hægja á sér?

(c) Er hluturinn að ferðast til vinstri?

(d) Er hluturinn að ferðast til hægri?



Mynd 3.10: Hraði, v_x, sem fall af tíma, t.

Dæmi 3.22. Lítum á eftirfarandi graf sem fengið er úr hlaupaforritinu Runkeeper. Á lárétta ás grafsins má greina km fjölda hlaupsins. Á lóðrétta ásnum má greina hraða hlauparans í einungunum sem samsvara því hversu fljótur hann væri að hlaupa 1 km ef hann héldi þeim hraða. Gráa línan táknar meðalhraða hlauparans.

(a) Hver var meðalhraði hlauparans í m/s?

(b) Hver var mesti hraði hlauparans í hlaupinu?

(c) Hver var minnsti hraði hlauparans í hlaupinu?

Mynd 3.11: Hraða-stöðu graf hlauparans.

Dæmi 3.23. Lítum á hraða-tíma grafið á mynd 3.12 sem sýnir hraða járnbrautalestar sem fall af tíma, t.

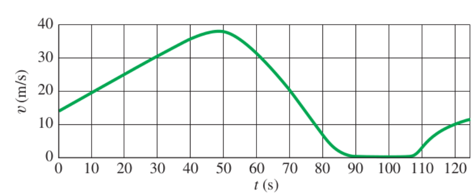
(a) Á hvaða tíma var hraði lestarinnar mestur?

(b) Ferðaðist lestin einhvern tímann með jöfnum hraða?

(c) Ferðaðist lestin einhvern tímann með jafnri hröðun?

(d) Við hvaða tíma var hröðun lestarinnar mest?

(e) Hversu langa vegalengd ferðaðist lestin?



Mynd 3.12: Hraða-tíma graf lestarinnar.

Gömul prófdæmi

Dæmi 3.24. Ef bolta væri sleppt þannig að hann myndi falla niður að eilífu með fastri hröðun, $g = 9{,}82\,\text{m/s}^2$ þá myndi hann á einhverjum tímapunkti ná ljóshraða, $c = 3{,}00 \cdot 10^8\,\text{m/s}$.

(a) Hversu margar sekúndur myndi það taka boltann að ná ljóshraða?

(b) Hversu marga daga myndi það taka boltann að ná ljóshraða?

(c) Hversu langa vegalengd hefði boltinn fallið þá?

Dæmi 3.25. Sigurlaug er að bruna niður Kringlumýrarbrautina á 100 km/klst þegar hún sér gamla konu á veginum 50,0 m fyrir framan sig. Hún nauðhemlar með fastri hröðun $a = -7{,}80\,\text{m/s}^2$ í von um að ná að bjarga gömlu konunni. Hversu langt fer Sigurlaug áður en hún nær að stöðva bílinn? Nær hún að bjarga gömlu konunni?

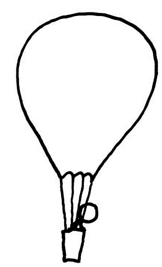
Dæmi 3.26. Vilbert vörubílstjóri keyrir á hraðanum 16 m/s niður Sviðholtsvör. Skyndilega verður hann var við Leif litla sem er að byrja að fara yfir gangbraut á hlaupahjólinu sínu með hraðanum 1,6 m/s. Vilbert er í 20 m fjarlægð þegar hann byrjar að hemla með hröðuninni $-6{,}2\,\text{m/s}^2$ í von um að Leifur nái að forða sér undan vörubílnum í tæka tíð. Breidd vörubílsins er 2,5 m. Nær Leifur litli að forða sér undan vörubílnum ef hann heldur sama hraða?

Dæmi 3.27. Geimflaug er skotið upp í loftið. Þegar geimflaugin hefur náð hraðanum 200 m/s er það í 5,0 km hæð. Þá áttar Neil Armstrong sig á því að hann gleymdi geimbúningnum sínum heima. Hann stekkur því úr geimflauginni til þess að sækja búninginn. Honum til mikillar undrunar byrjar hann ekki að detta niður alveg strax. Hann fer fyrst upp með sama hraða og geimflaugin svo hægist á honum smátt og smátt þar til hann stoppar um stund og fellur svo til jarðar með þyngdarhröðuninni g.

(a) Finnið tímann t sem líður áður en hann byrjar að detta niður.

(b) Finnið $s_{\text{max}} > 5000\,\text{m}$ sem lýsir hversu hátt hann kemst áður en hann byrjar að detta.

Dæmi 3.28. Lambert loftbelgskóngur hefur gaman að því að fljúga um frönsku háloftin. Hann tekur sér matarpásu í 800 m hæð. Skyndilega rekur fugl gogginn í loftbelginn (sem er kyrr) og gerir gat á hann. Loftbelgurinn byrjar þá að hrapa með lóðréttri hröðun $2{,}4\,\text{m/s}^2$. Hunsið loftmótsstöðu.



(a) Hversu langur tími mun líða þar til að loftbelgurinn skellur á jörðinni?

(b) Lambert nær hinsvegar að loka fyrir gatið með baguette úr matarkörfunni sinni eftir að hafa hrapað í 10 s. Þá er hann í 680 m hæð og hefur hraðann 24 m/s niður á við. Eftir að gatinu er lokað fær loftbelgurinn hröðun $1{,}3\,\text{m/s}^2$ upp á við. Hver verður minnsta hæð loftbelgsins yfir jörðu?

Dæmi 3.29. Herdís situr við glugga uppi á 3. hæð. Hún er að leika sér með litla málmkúlu. Hún hendir kúlunni upp í loft með hraðanum 2,0 m/s og grípur hana aftur.

(a) Hversu hátt upp fer kúlan?

(b) Nú tapar Herdís athyglinni eitt augnablik og missir af kúlunni svo hún fellur alla leið niður á stétt. Kúlan lendir á stéttinni 1,4 s sekúndum eftir að Herdís sleppir henni. Hversu hátt uppi er glugginn?

Dæmi 3.30. Lítum á hlut sem ferðast með fastri hröðun a. Látum upphafshraða hlutarins vera gefinn með v_0 og látum lokahraða hans vera gefinn með v. Sýnið með skilgreiningu á meðalhraða, v_m, að $v_m = \frac{v+v_0}{2}$.

Dæmi 3.31. Vagn með massa $m = 0{,}65\,\text{kg}$ stendur á braut sem hallar um horn θ miðað við lárétt. Hann byrjar að renna niður 2,4 m langa brautina úr kyrrstöðu í hæðinni 0,63 m. Tíminn sem þetta tekur mælist 1,45 s.

(a) Finnið meðalhraða vagnsins, v_m, á leiðinni niður.

(b) Finnið lokahraða vagnsins á leið sinni niður brautina.

Dæmin sem 5.Y samdi

Dæmi 3.32. **(Elísa, Eva og Hildur)** Lalli er í teygjustökki sem er 50 m. Hann lætur sig falla beint niður með hröðun $g = 9{,}82\,\mathrm{m/s^2}$.

(a) Hver er hraði Lalla rétt áður en hann er kominn niður?

(b) Hvað tekur það langan tíma að komast niður?

Dæmi 3.33. **(Aðalheiður og Davíð Þór)** Eiffel turninn er 324 m á hæð. Ef þú lætur bolta detta af toppnum, hver er hraði boltans rétt áður en hann skellur á jörðina?

Dæmi 3.34. **(Egill og Davíð Freyr)** Davíð og Egill eru í listflugi í 12,8 km hæð en allt í einu dettur Davíð úr vélinni. Að 5 s liðnum fattar Egill að Davíð datt og þá steypir hann vélinni beint niður með hraða 52 m/s (og með sömu hröðun og Davíð). Nær Egill að grípa Davíð áður enn hann verður að pönnuköku? Eftir hversu langan tíma ef svo er?

Dæmi 3.35. **(Kristján og Oddur)** Jörðin er hnöttótt. Það leggja tvær flugvélar af stað og eru í 36,3 km hæð. Flugvélar A og B fljúga af stað frá Ecuador og fljúga meðfram miðbaug jarðar austur. Jörðin snýst 1600 km/klst. Flugvél A flýgur á 800 km/klst en flugvél B á 750 km/klst.

(a) Eftir hve marga kílómetra hringar flugvél A flugvél B?

(b) Yfir hvaða lengdarbaug hringar flugvél A flugvél B?

Dæmin sem 5.X samdi

Dæmi 3.36. **(María, Ylja, Sandra og Ingibjörg)** Siggi litli er búinn að eyða allri ævi sinni í að grafa holu í gegnum jörðina. Gummi stóri stendur hinum megin á jörðinni og bíður eftir flöskuskeyti frá Sigga.

(a) Hversu hratt fer flöskuskeytið í gegnum jörðina miðað við að $g = 9{,}82\,\mathrm{m/s^2}$

(b) Hvað er flöskuskeytið lengi á leiðinni til Gumma?

Dæmi 3.37. **(Stefán, Benedikt, Einar Atli)** Stefán er að verða seinn á æfingu. Hann keyrir á 200 km/klst. Hann þarf að keyra 366,3 km til að komast á lasertag æfingu. Þegar hann á 69 km eftir á áfangastað fattar hann að það er bara korter í æfinguna. Hvað þarf hröðunin að vera mikil til að hann nái æfingunni?

Dæmi 3.38. **(Stefán, Benedikt, Einar Atli)** Hversu margar pingpong kúlur kæmust fyrir inni í tunglinu.

Dæmi 3.39. **(Haraldur, Hjörtur, Ólafur)** Hjörtur byrjar með 2000 m forskot á Toyota Corola. Haraldur er á Golf R og þeir byrja á sama tíma. Haraldur kemst frá 0 km/klst upp í 240 km/klst á 8 s. Hjörtur kemst frá 0 km/klst upp í 140 km/klst á 25 s. Hversu lengi er Haraldur að ná Hirti á beinni braut.

Dæmi 3.40. **(Alex, Jovan og Bergur)** Hversu mörg súrefnisatóm eru í himinhvolfinu?

Dæmi 3.41. **(Gísli, Einar Skúli)** Hallgrímskirkja er mjög stór en þó ekki jafnstór og Esjan. Hversu mörg skákpeð kæmust inn í Esjuna ef hún væri hol að innan?

Kafli 4

Orka, skriðþungi og varðveislulögmál

Í þessum kafla munum við kynna til sögunnar tvö helstu varðveislulögmál eðlisfræðinnar, annars vegar orkuvarðveislu og hinsvegar skriðþungavarðveislu. Til þess að skilja þessi hugtök almennilega verðum við fyrst að skilja hvað það þýðir að stærð sé varðveitt:

Skilgreining 4.1. Við segjum að stærð sé **varðveitt** ef hún tekur sama gildi fyrir alla tíma t.

Varðveittar stærðir eru eitt af lykilhugtökunum í eðlisfræði en þær reynast hafa afar djúpstæð tengsl við samhverfur. Hugmyndin er upprunalega komin frá Emmy Noether, en hún var einn færasti stærðfræðingur tuttugustu aldarinnar. Albert Einstein skrifaði í New York Times þegar hann frétti andlát hennar:

> *„In the judgment of the most competent living mathematicians, Fräulein Noether was the most significant creative mathematical genius thus far produced since the higher education of women began. In the realm of algebra, in which the most gifted mathematicians have been busy for centuries, she discovered, methods which have proved of enormous importance in the development of the present-day younger generation of mathematicians.“*
>
> \- Albert Einstein

En Albert Einstein átti Emmy Noether einmitt mikið að launa því án hennar hefði almenna afstæðiskenningin aldrei litið dagsins ljós því hún byggir á setningum Noethers um djúpstæð tengsl samhverfu við varðveislulögmál eðlisfræðinnar.

4.1 Hreyfiorka og stöðuorka

Skilgreining 4.2. Lítum á hlut með massa m og hraða v. **Hreyfiorka** hlutarins, K, er stærðin:

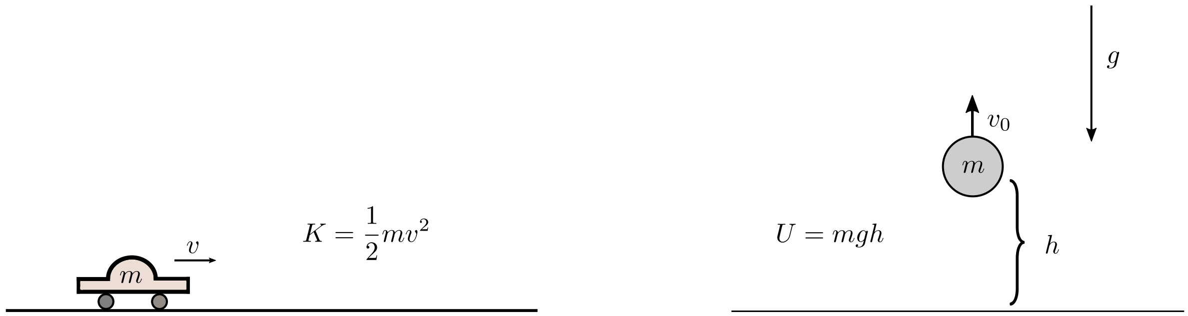
$$K = \frac{1}{2}mv^2.$$

Við tökum eftir því að einingar hreyfiorku eru gefnar með: $[K] = [\frac{1}{2}mv^2] = [m] \cdot [v]^2 = \mathrm{kg}(\mathrm{m/s})^2 = \mathrm{kg\,m^2/s^2}$. Þessi stærð hefur fengið nafnið Joule og er táknuð með $\mathrm{J} = \mathrm{kg\,m^2/s^2}$.

Skilgreining 4.3. Lítum á hlut með massa m í þyngdarsviði með þyngdarhröðun, g, sem er staddur í hæð h. **Stöðuorka** hlutarins, U, er stærðin:

$$U = mgh.$$

Einingar stöðuorkunnar eru gefnar með: $[U] = [mgh] = [m] \cdot [g] \cdot [h] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s^2} \cdot \mathrm{m} = \mathrm{kg\,m^2/s^2} = \mathrm{J}$.



(a) Hreyfiorka bíls með massa m sem keyrir með hraðanum v.

(b) Stöðuorka bolta með massa m sem er staddur í hæð h í þyngdarsviði með þyngdarhröðun g.

Mynd 4.1: Myndræn skilgreining á hreyfiorku og stöðuorku.

Lögmál 4.4. Lítum á hlut með massa m í frjálsu falli í þyngdarsviði með þyngdarhröðun g. Gerum ráð fyrir að engin loftmótstaða verki á hlutinn. Látum v tákna hraða hlutarins og látum h tákna hæð hlutarins sem fall af tíma t. Þá er stærðin:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + mgh,$$

varðveitt stærð sem nefnist **heildarorka** eða einfaldlega **orka** hlutarins.

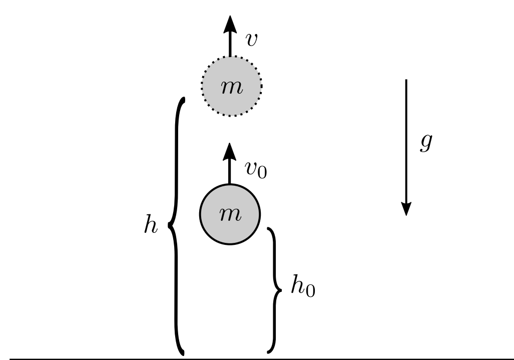
Útleiðsla: Við skulum hafa mynd 6.1 í huga í þessari útleiðslu. Segjum sem svo að upphafshraði hlutarins sé v_0 og að á þeim tíma sé hann staddur í hæð h_0. Við höfum þá samkvæmt tímaóháðu stöðujöfnunni að:

$$-2g(h - h_0) = v^2 - {v_0}^2.$$

En það þýðir einmitt að $v^2 = {v_0}^2 - 2g(h - h_0)$ svo við fáum:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}m\left({v_0}^2 - 2g(h - h_0)\right) + mgh = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + mgh_0 = E_0.$$

En það sýnir einmitt að, heildarorkan, $E = K + U$, er óháð tíma og því varðveitt. □



Mynd 4.2: Hlutur með massa m sem fer úr hæð h_0 í hæð h í þyngdarsviði með þyngdarhröðun g.

Ef orkan er varðveitt í kerfinu sem við erum að skoða (hún er ekki endilega alltaf varðveitt í öllum þeim kerfum sem við skoðum) þá skrifum við einnig:

$$E_{\text{fyrir}} = E_{\text{eftir}}.$$

4.2 Árekstrar

Til þess að tala um áreksta þá er gott að kynna til sögunnar hugtakið um skriðþunga:

Skilgreining 4.5. Lítum á hlut með massa m og hraða v. **Skriðþungi** hlutarins, p, er stærðin

$$p = mv.$$

Við tökum eftir því að einingar skriðþunga eru gefnar með $[p] = [mv] = [m] \cdot [v] = \mathrm{kg\,m/s}$. Við tökum einnig eftir því að við höfum:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}.$$

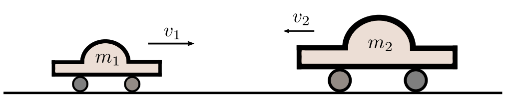
Með mynd 4.3 í huga skulum við setja fram næsta varðveislulögmál:

Lögmál 4.6. Lítum á tvo hluti, annan með massa m_1 og upphafshraða v_1, hinn með massa m_2 og upphafshraða v_2. Gerum ráð fyrir því að þeir lendi í árekstri við hvorn annann. Þá gildir:

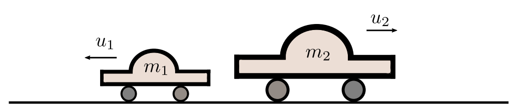
$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2$$

þar sem u_1 er hraði massans m_1 eftir áreksturinn og u_2 er hraði massans m_2 eftir áreksturinn.

Útleiðsla: Við frestum formlegri útleiðslu þar til í kafla 6. Sannreyna má lögmálið með tilraun! □



(a) Fyrir áreksturinn



(b) Eftir áreksturinn

Mynd 4.3: Árekstur tveggja bíla fyrir og eftir áreksturinn.

Ef skriðþunginn er varðveittur í kerfinu sem við erum að skoða (hann er ekki endilega alltaf varðveittur í öllum þeim kerfum sem við skoðum) þá skrifum við einnig:

$$p_{\text{fyrir}} = p_{\text{eftir}}$$

Undir venjulegum kringumstæðum glatast hluti af hreyfiorkunni í árekstrum í mismunandi þætti eins og til dæmis hljóð og varma. Þess vegna skoppar skopparabolti ekki eins hátt upp eftir hvert skopp. Við höfum hinsvegar eftirfarandi lögmál:

Lögmál 4.7. Orkan, W, sem losnar í árekstri er jöfn breytingunni í hreyfiorku kerfisins,

$$W = \Delta K = K_{\text{eftir}} - K_{\text{fyrir}}.$$

Útleiðsla: Við frestum formlegri útleiðslu þar til í kafla 6. □

Við viljum einnig hafa einhverja leið til þess að meta hversu skoppandi hlutir eru eða með öðrum orðum, hversu fjaðrandi.

Skilgreining 4.8. Við segjum að árekstur tveggja eða fleiri hluta sé

(i) **alfjaðrandi** ef hreyfiorka kerfisins er varðveitt.

(ii) **ófjaðrandi** ef hreyfiorka kerfisins er ekki varðveitt.

(iii) **fullkomlega ófjaðrandi** ef hlutirnir festast saman eftir áreksturinn.

Lögmál 4.9. Lítum á tvo hluti, annan með massa m_1 og upphafshraða v_1, hinn með massa m_2 og upphafshraða v_2. Gerum ráð fyrir því að þeir lendi í alfjaðrandi árekstri. Þá gildir að:

$$v_1 + u_1 = v_2 + u_2.$$

Útleiðsla: Við höfum samkvæmt skriðþungavarðveislu að:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2,$$

og þar sem að áreksturinn er alfjaðrandi þá höfum við samkvæmt orkuvarðveislu að:

$$\frac{1}{2} m_1 {v_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_2}^2 = \frac{1}{2} m_1 {u_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 {u_2}^2.$$

Nú kemur smá algebrutrikk, við athugum að við getum umritað orkujöfnuna sem:

$$\frac{1}{2} m_1 \left({v_1}^2 - {u_1}^2\right) = \frac{1}{2} m_2 \left({u_2}^2 - {v_2}^2\right),$$

og með því að nota samokaregluna sjáum við að:

$$\frac{1}{2} m_1 (v_1 - u_1)(v_1 + u_1) = \frac{1}{2} m_2 (u_2 - v_2)(u_2 + v_2). \tag{4.1}$$

Við getum umritað skriðþungajöfnuna sem:

$$m_1 (v_1 - u_1) = m_2 (u_2 - v_2) \tag{4.2}$$

Deilum núna jöfnu (4.1) með jöfnu (4.2) og styttum út tvistinn til að fá:

$$v_1 + u_1 = v_2 + u_2.$$

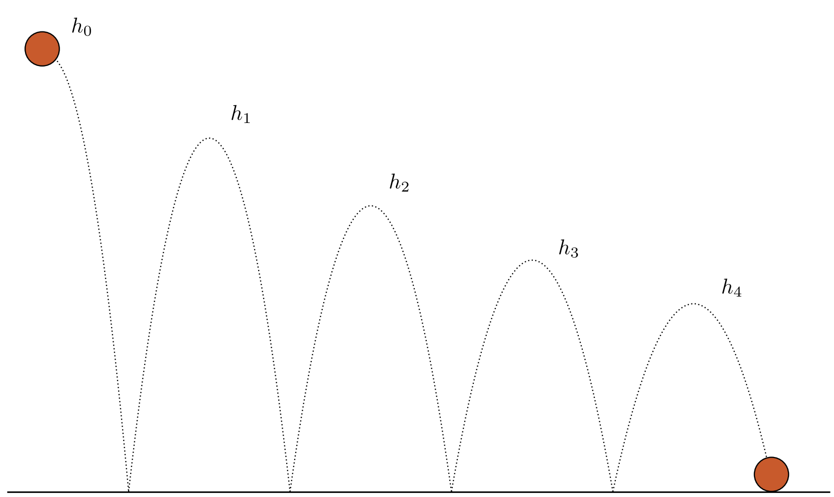
□

Þegar við tölum um árekstra þá getur verið þægilegt að gefa þeim tölu sem lýsir því hversu fjaðrandi þeir eru, við kynnum því:

Skilgreining 4.10. Við skilgreinum **fjaðurstuðul** eða **skoppstuðull** áreksturs sem stærðina:

$$\varepsilon := \frac{\text{afstæður hraði eftir árekstur}}{\text{afstæður hraði fyrir árekstur}} = \frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2}.$$

Takið eftir að fjaðurstuðullinn er einingarlaus stærð. Yfirleitt gildir að $\varepsilon \in [0, 1]$ því að hlutirnir glata hluta af hraða sínum í árekstrinum. Hinsvegar eru til efnasamsetningar þannig að $\varepsilon > 1$ en það er afar sjaldgæft.



Mynd 4.4: Skopparabolti missir hluta af hæð sinni vegna þess að skoppstuðullinn hans er lægri en 1.

4.3 Dæmi

Orka

Dæmi 4.1. Bíll með massann $m = 650\,\text{kg}$ keyrir með hraðanum $v = 95\,\text{km/klst}$.

(a) Hver er hreyfiorka bílsins?
(b) Hver er stöðuorka bílsins?
(c) Hver er heildarorka bílsins?

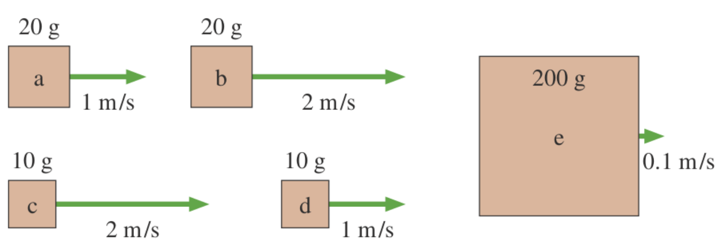
Dæmi 4.2. Þröstur nokkur hefur massa 35 g og flýgur með hraðanum 45 km/klst í 4,8 m hæð.

(a) Hver er hreyfiorka þrastarins?
(b) Hver er stöðuorka þrastarins?
(c) Hver er heildarorka þrastarins?

Dæmi 4.3. Lítum á bolta með massa $m = 0{,}58\,\text{kg}$ sem er sleppt úr kyrrstöðu í upphafshæð $h_0 = 14{,}3\,\text{m}$.

(a) Hver er stöðuorka boltans áður en honum er sleppt?
(b) Hver er heildarorka boltans?
(c) Hver er hreyfiorka boltans þegar hann hefur fallið niður í hæð $h = 7{,}3\,\text{m}$?
(d) Hver er hraði boltans þegar hann er í hæðinni $h = 7{,}3\,\text{m}$?

Dæmi 4.4. Lítum á mynd 4.5 hér að neðan. Hvaða kassi er með mesta hreyfiorku?



Mynd 4.5: Nokkrir kassar.

Dæmi 4.5. Hjálmtýr hjólreiðamaður er 90 kg. Hann hjólar á jafnsléttu með hraða 6,0 km/klst en gefur síðan í og nær hraðanum 12 km/klst. Hversu mikil breyting varð í hreyfiorku Hjálmtýs. Hvaðan kom þessi orka?

Dæmi 4.6. Við stofuhita er hreyfiorka súrefnissameindar, O_2, gefin með $K = 6{,}21 \cdot 10^{-21}\,\text{J}$. Massi einnar róteindar er $m_r = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$. Metið hraða súrefnissameindarinnar.

Dæmi 4.7. Kárahnjúkavirkjun er 193 m á hæð. Þar rennur Jökulsá á Fjöllum framaf. Meðalrennsli Jökulsár er $110\,\text{m}^3/\text{s}$. Metið orkuna sem hægt er að virkja á einu ári.

Dæmi 4.8. Skíðakappi nokkur rennir sér niður Töfrateppið í Bláfjöllum. Brekkan hallar um 12° miðað við lárétt. Brekkan byrjar í 105 m hæð. Hver verður hraði skíðakappans þegar hann kemur niður brekkunna ef svo gott sem enginn núningur verkar á skíðin hans? Hvað ef hornið hefði verið 25°?

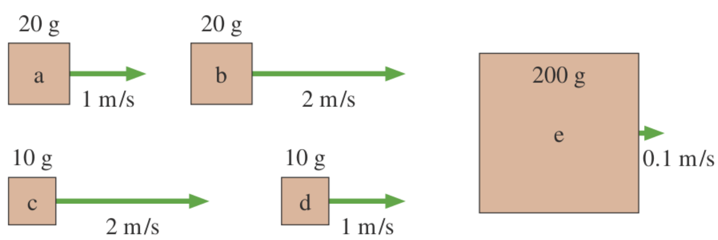
Dæmi 4.9. Sleða er ýtt upp brekku sem hallar um 22,5° miðað við lárétt með upphafshraða $v = 7{,}2\,\text{m/s}$. Sleðinn nær mestri hæð h áður en hann byrjar að renna aftur niður. Gerum ráð fyrir að enginn núningur verki á sleðann. Hversu hátt kemst sleðinn? Hver er hraði sleðans þegar hann er búinn að renna aftur niður?

Skriðþungi

Dæmi 4.10. Bíll með massann $m = 650\,\mathrm{kg}$ keyrir með hraðanum $v = 95\,\mathrm{km/klst}$. Hver er skriðþungi bílsins?

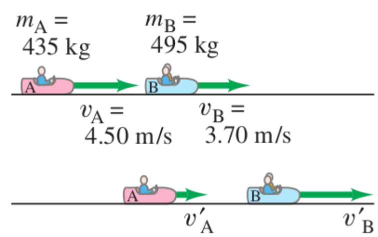
Dæmi 4.11. Þröstur nokkur hefur massa $35\,\mathrm{g}$ og flýgur með hraðanum $45\,\mathrm{km/klst}$. Hver er skriðþungi þrastarins?

Dæmi 4.12. Lítum á mynd 4.6 hér að neðan. Hvaða kassi er með mestan skriðþunga?



Mynd 4.6: Nokkrir kassar.

Dæmi 4.13. Tveir klessubílar lenda í alfjaðrandi árekstri í Skemmtigarðinum í Smáralind. Amelía klessir aftan á Berg. Heildarmassinn á klessubíl Amelíu (ásamt henni) er $m_A = 435\,\mathrm{kg}$ og heildarmassinn á klessubíl Bergs er $m_B = 455\,\mathrm{kg}$. Hraði Amelíu fyrir áreksturinn er $v_A = 4{,}50\,\mathrm{m/s}$ og hraði Bergs fyrir áreksturinn er $v_B = 3{,}70\,\mathrm{m/s}$. Hver verður hraði þeirra eftir árksturinn?



Dæmi 4.14. Friðbert stekkur um borð í kyrrstæðan fleka í vatni á hraðanum $5{,}0\,\mathrm{m/s}$. Massi Friðberts er $50\,\mathrm{kg}$ en massi flekans er $200\,\mathrm{kg}$. Hver verður hraði flekans þegar Friðbert er lentur á honum?

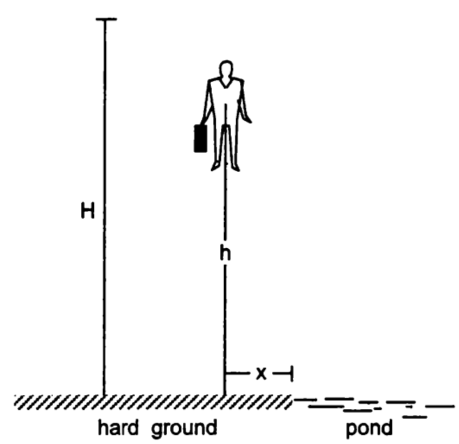
Dæmi 4.15. Þanos stendur í vagni sem rennur með hraðanum $v_0 = 16{,}0\,\mathrm{m/s}$ eftir núningslausum fleti. Í vagninum eru sex stórir steinar, hver með massann $m_s = 88\,\mathrm{kg}$. Vagninn hefur massann $m_v = 800\,\mathrm{kg}$ og massi Þanosar er $m_Þ = 445\,\mathrm{kg}$.

(a) Hver er skriðþungi vagnsins ásamt innihaldi?

(b) Captain Marvel er að reyna ná Þanosi og þeytist að honum með hraðanum $v_M = 200\,\mathrm{m/s}$. Þanosi dettur það snilldarráð í hug að kasta steinum frá borði til þess að auka hraðann sinn. Hvað þarf Þanos að kasta hverjum stein með miklum hraða til þess að ná hraðanum $200\,\mathrm{m/s}$ og koma í veg fyrir að Captain Marvel nái honum og berji hann í spað?

Dæmi 4.16. Járnbrautalest með massa $5000\,\mathrm{kg}$ rennur meðfram núninglausum járnbrautateinum með hraða $22\,\mathrm{m/s}$. Skyndilega byrjar að rigna og lestin byrja að fyllast af vatni. Nokkrum mínútum síðar hefur aukna þyngd vatnsins hægt á lestinni þannig að hraði hennar er $20\,\mathrm{m/s}$. Hver er massi vatnsins?

Dæmi 4.17. Lalli lögfræðingur hefur massa $M = 87\,\mathrm{kg}$ og heldur á skjalatösku með massa $m = 7{,}2\,\mathrm{kg}$. Hann fellur óvart framaf skrifstofubyggingunni sinni úr hæð $H = 95\,\mathrm{m}$. Sekúndu síðar, þegar hann er staddur í hæð $h = 90\,\mathrm{m}$ áttar hann sig á því að fyrir neðan hann er hart malbik en í lóðréttri fjarlægð $x = 1{,}5\,\mathrm{m}$ er tjörn sem gæti bjargað lífi hans. Hann nýtir sér því skriðþungavarðveislu og hendir því skjalatöskunni sinni með hraða v frá tjörninni. Finnið minnsta hraða v sem að hann getur kastað töskunni þannig að hann lifi af fallið. Hvar lendir taskan?



Varðveislulögmálin

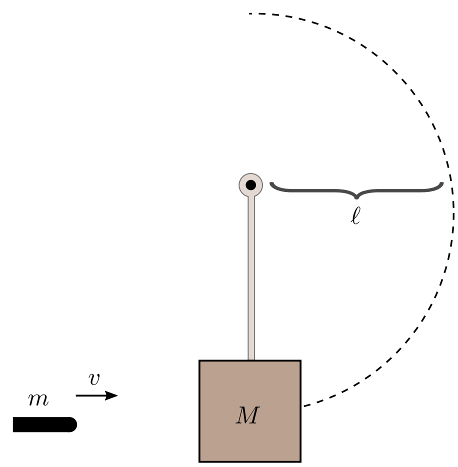
Dæmi 4.18. Kristinn kærulausi er að vinna lagerstarf hjá Ölgerðinni. Hann er með kassa með massa $m = 6{,}0\,\mathrm{kg}$ sem hann lætur renna niður núningslausa braut úr $3{,}0\,\mathrm{m}$ hæð. Við enda brautarinnar sendur kassi sem hefur massa $2m = 12{,}0\,\mathrm{kg}$.

(a) Gerum ráð fyrir að kassarnir festist saman eftir áreksturinn, þ.e. að þeir lendi í fullkomlega ófjaðrandi áresktri. Hver verður hraði kassanna eftir áreksturinn?

(b) Gerum nú ráð fyrir að kassarnir lendi í fullkomlega fjaðrandi árekstri. Í hvaða hæð kemst kassinn með massa m þegar hann fer aftur upp brautina?

Dæmi 4.19. Tvær járnbrautalestir, báðar með massa $m = 66.000\,\mathrm{kg}$ og hraða $v = 120\,\mathrm{km/klst}$ lenda í árekstri. Hversu mikil orka losnar við áreksturinn? Hvert fór orkan?

Dæmi 4.20. Kúlu A er skotið með hraða $4{,}0\,\mathrm{m/s}$ á kúlu B sem er kyrr. Þegar A klessir á B endurkastast A með hraða $0{,}5\,\mathrm{m/s}$ í sömu stefnu og hún kom úr. Hvaða hraða fær B ef áreksturinn er alfjaðrandi?



Dæmi 4.21. Bolta er sleppt úr upphafshæð $h_0 = 1{,}60\,\mathrm{m}$ og skoppar aftur upp í hæð $h_1 = 1{,}20\,\mathrm{m}$ eftir fyrsta skopp. Hver er skoppstuðull boltans? Hversu oft mun boltinn þurfa að skoppa þar til að hæðin sem boltinn nær eftir skopið verður orðin lægri en $0{,}1\,\mathrm{m}$?

Dæmi 4.22. Pendúll samanstendur af kubb með massa $M = 672\,\mathrm{g}$ sem hangir í massalausum vír af lengd $\ell = 0{,}32\,\mathrm{m}$. Nú er byssukúlu með massa $m = 3{,}56\,\mathrm{g}$ og hraða v skotið inn í kubbinn þannig að kúlan festist inni í honum. Hvert er minnsta gildið á hraðanum v þannig að pendúllinn nái að sveiflast framhjá hæstu stöðu?

Dæmi 4.23. Loftsteinn með massa $m_\ell = 4{,}6 \cdot 10^{15}\,\mathrm{kg}$ lendir í árekstri við jörðina (sem hefur massa $M_J = 5{,}94 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$). Hraði loftsteinsins fyrir áreksturinn var $v_\ell = 25\,\mathrm{km/s}$ (afstætt miðað við viðmiðunarkerfi þar sem jörðin er kyrr) og áreksturinn er fullkomlega ófjaðrandi (loftsteinninn staðnæmist á yfirborði jarðarinnar).

(a) Með hversu miklum hraða endurkastaðist jörðin eftir áreksturinn?

(b) Reiknið orkuna sem losnaði við áreksturinn, $\Delta K = K_{\text{eftir}} - K_{\text{fyrir}}$.

(c) Til samanburðar er orkan sem losnar í kjarnorkusprengju um það bil $4{,}0 \cdot 10^{16}\,\mathrm{J}$. Hversu margar slíkar sprengjur þyrfti að sprengja á sama tíma til þess að jafnast á við eyðileggingarmátt loftsteinsins?

Dæmi 4.24. Kubbur með massa $50\,\mathrm{kg}$ ferðast með hraða $20\,\mathrm{km/klst}$. Hann lendir í árekstri við annan kubb með massa $20\,\mathrm{kg}$ sem ferðast í gagnstæða stefnu með hraða $-10\,\mathrm{km/klst}$. Kubbarnir festast saman eftir áreksturinn. Hver er hraði kubbanna eftir áreksturinn? Hver er skoppstuðull kubbanna?

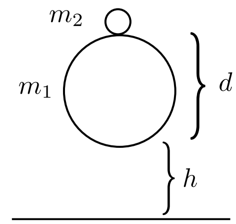
Dæmi 4.25. Kassi með massa $m = 1{,}5\,\mathrm{kg}$ ferðast með hraða $v = 2{,}2\,\mathrm{m/s}$ og rekst á annan kyrrstæðan kassa með massa $2m = 3{,}0\,\mathrm{kg}$. Léttari kassinn staðnæmist eftir áreksturinn. Hver er skoppstuðull kassanna?

Dæmi 4.26. Kassi með massa M og hraða V lendir í alfjaðrandi árekstri við kyrrstæðan kassa með massa m. Látum V_M og v_m tákna hraða annarsvegar M og hinsvegar m eftir áreksturinn. Sýnið að:

$$V_M = \frac{(M-m)V}{M+m}, \qquad v_m = \frac{2MV}{M+m}$$

Dæmi 4.27. Sýnið að árekstur sé alfjaðrandi þá og því að eins að hann hafi fjaðurstuðul $\varepsilon = 1$.

Erfið dæmi



Dæmi 4.28. (Eðlisfræðikeppni framhaldsskólanna 2012) Tennisbolti með massa m_2 situr á körfubolta með massa m_1. Neðsti hluti körfuboltans er í hæð h en neðsti hluti tennisboltans er í hæð $h + d$. Boltunum er sleppt samtímis. Þegar tennisboltinn skoppar aftur upp kemst neðsti hluti hans hæst í hæð H. Gerum ráð fyrir að $m_1 \gg m_2$, að allir árekstrarnir séu alfjaðrandi og að hunsa megi loftmótstöðu. Ákvarðið hæðina H sem fall af h og d.

Dæmi 4.29. (3blue1brown) Lítum á tvo kassa með massa, m og M eins og á mynd 4.7. Látum upphafshraða massa M vera v_0 til vinstri. Gerum ráð fyrir að enginn núningur verki á kassana og að allir árekstrarnir sem þeir lenda í séu alfjaðrandi árekstrar.

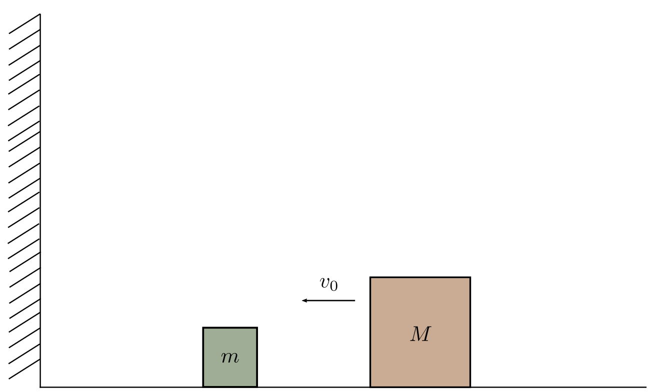
(a) Skoðum tilvikið þegar að massarnir hafa sama massa, $M = m = 1\,\mathrm{kg}$. Til einföldunar látum við $v_0 = 1\,\mathrm{m/s}$. Hversu margir árekstrar verða ef við teljum líka með árekstra við vegginn?

(b) Skoðum tilvikið þegar $v_0 = 1\,\mathrm{m/s}$, $m = 1\,\mathrm{kg}$ en $M = 10\,\mathrm{kg}$. Hversu margir árekstrar verða þá?

(c) Reyndar er fjöldi árekstra óháður upphafshraðanum v_0. Heildarfjöldi árekstranna verður:

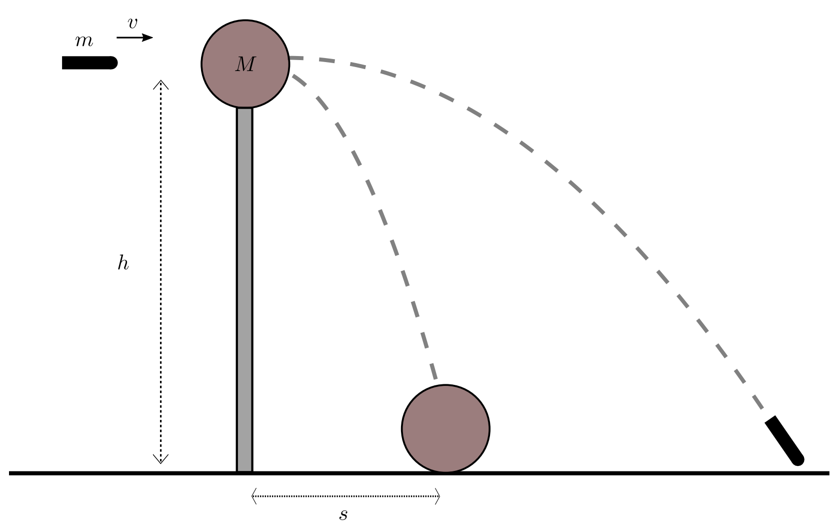
$$N \approx \pi\sqrt{\frac{M}{m}}.$$

Látum nú $m = 1\,\mathrm{kg}$ og $M = 10^{2d}\,\mathrm{kg}$ þar sem $d \in \mathbb{N}$. Hver verður heildarfjöldi árekstra þá?



Mynd 4.7: Kassarnir tveir í 3blue1brown dæminu.

Dæmi 4.30. (IPhO, 1967) Lítill bolti með massa $M = 0{,}2\,\mathrm{kg}$ hvílir ofan á lóðréttri súlu í hæð $h = 5\,\mathrm{m}$. Byssukúlu með upphafshraða $v_0 = 500\,\mathrm{m/s}$ og massa $m = 0{,}01\,\mathrm{kg}$ er skotið í átt að boltanum. Byssukúlan fer lárétt í gegnum miðju kúlunnar. Boltinn lendir í láréttri fjarlægð, $s = 20\,\mathrm{m}$, frá súlunni. Hvar lendir byssukúlan? Hversu stórt hlutfall af hreyfiorku byssukúlunnar breyttist í varma þegar hún fór í gegnum boltann? Hunsið loftmótstöðu.



Kafli 5

Kasthreyfing

„It's not the fall that kills you; it's the sudden stop at the end."

- Douglas Adams

Staða, hraði og hröðun eru vigrar. Hingað til höfum við hunsað það og aðeins skoðað gangfræði í einni vídd. Nú skulum við skoða hvað gerist ef að við látum stöðuna okkar vera vigur í tveim víddum (það er síðan einfalt að sjá hvernig við alhæfum upp í þrjár víddir eftir að við höfum kynnst tveim víddum). Þá getum við ritað:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Hér tákna x, y lárétta og lóðrétta staðsetningu hlutarins. Hraðinn verður síðan

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}, \quad \text{og hröðunin verður} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}.$$

Hér táknar v_x hraði hlutarins í lárétta stefnu, v_y hraða hlutarins í lóðrétta stefnu, a_x táknar hröðun hlutarins í lárétta stefnu og a_y táknar hröðun hlutarins í lóðrétta stefnu. Jöfnurnar sem við höfðum leitt út fyrir gangfræði í einni vídd verða allar nákvæmlega eins nema nú á vigra formi. Við höfum þá stöðujöfnurnar:

Lögmál 5.1. Lítum á hlut sem er upphaflega staddur í $\vec{s}_0$ og hefur upphafshraða $\vec{v}_0$. Gerum ráð fyrir að hluturinn verði fyrir fastri hröðun $\vec{a}$. Látum $\vec{s}$ tákna stöðu hlutarins og $\vec{v}$ tákna hraða hlutarins eftir tímann t. Þá gilda stöðujöfnurnar:

(i) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$.

(ii) $\vec{s} = \vec{s}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$.

(iii) $2\vec{a} \cdot (\vec{s} - \vec{s}_0) = v^2 - v_0^2$.

Ef við prófum að skrifa út hvað þessar jöfnur eru að segja þá höfum við að stöðujöfnurnar gilda hnit fyrir hnit, þ.e.a.s.

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \quad \text{er það sama og} \quad \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{x,0} \\ v_{y,0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} v_{x,0} + a_x t \\ v_{y,0} + a_y t \end{pmatrix}$$

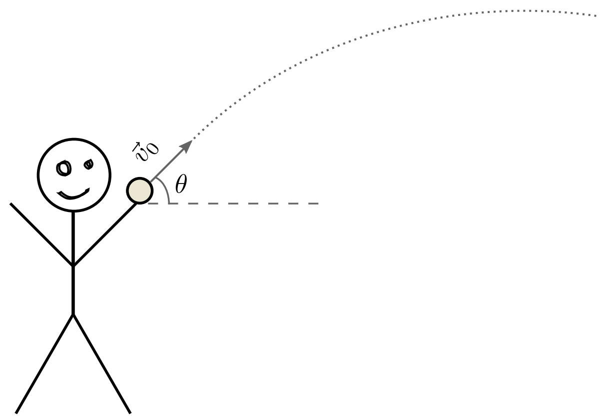
$$\vec{s} = \vec{s}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \quad \text{er það sama og} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{x,0} \\ v_{y,0} \end{pmatrix} t + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} t^2 = \begin{pmatrix} x_0 + v_{x,0} + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ y_0 + v_{y,0} + \frac{1}{2}a_y t^2 \end{pmatrix}$$

$$2\vec{a} \cdot (\vec{s} - \vec{s}_0) = v^2 - v_0^2 \quad \text{er það sama og} \quad 2\left(a_x(x - x_0) + a_y(y - y_0)\right) = \left({v_x}^2 + {v_y}^2\right) - \left({v_{x,0}}^2 + {v_{y,0}}^2\right).$$

Þannig í stað þess að vera með þrjár stöðujöfnur þá höfum við tæknilega séð fimm núna.

5.1 Að kasta bolta yfir horni

Hugsum okkur nú að við köstum bolta með upphafshraða $\vec{v}_0$ yfir horni θ miðað við lárétt (sjá mynd 5.1 hér fyrir neðan). Við viljum skilja hreyfilýsingu boltans eftir að hann yfirgefur hönd þess sem kastar.



Mynd 5.1: Matti kastar bolta með upphafshraða $\vec{v}_0$ yfir horni θ miðað við lárétt.

Það er þess vegna sniðugt að brjóta upp upphafshraða boltans í lárétta og lóðrétta stefnu, við höfum að:

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{x,0} \\ v_{y,0} \end{pmatrix} = |\vec{v}_0| \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\theta \\ v_0 \sin\theta \end{pmatrix}.$$

Þar sem við látum $v_0 = |\vec{v}_0|$ tákna lengd vigursins $\vec{v}_0$. Við nýtum okkur síðan að það er engin hröðun í láréttu stefnuna, með öðrum orðum þá höfum við að þyngdarhröðun jarðar er gefin á vigurformi sem:

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9{,}82\,\mathrm{m/s^2} \end{pmatrix}.$$

Boltinn finnur ekki fyrir neinni annarri hröðun þar sem að við hunsum öll áhrif loftmótstöðu í þessari grein. En þá gefur önnur stöðujafnan að:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + v_{x,0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ y_0 + v_{y,0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \end{pmatrix}$$

En við höfum síðan að lárétti þáttur hröðunarinnar er núll, þ.e. $a_x = 0$ þar að auki sem $v_{x,0} = v_0 \cos\theta$ og $v_{y,0} = v_0 \sin\theta$ svo við fáum:

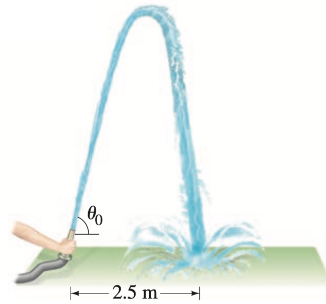
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + v_0 \cos\theta t \\ y_0 + v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}.$$

Við höfum semsagt sýnt fram á eftirfarandi lögmál:

Lögmál 5.2. Þegar hlut er kastað með upphafshraða v_0 yfir horni θ miðað við lárétt gildir að staðsetning hlutarins eftir tíma, t, er gefin með:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + v_0 \cos\theta t \\ y_0 + v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}.$$

5.2 Dæmi



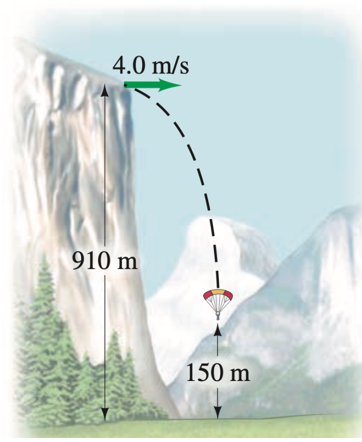
Dæmi 5.1. Tígrisdýr stekkur lárétt fram af 7,5 m háum kletti með lárétta hraðanum 3,0 m/s. Hversu langt frá kletsbrúninni mun tígrisdýrið lenda?

Dæmi 5.2. Bergljótu er fleygt lárétt út um gluggann á G-stofu með hraðanum 5,1 m/s. Hversu langt frá Gamla skóla lendir hún ef glugginn er í 7,3 m hæð yfir jörðu?

Dæmi 5.3. Kafari nokkur hleypur með hraðanum 2,5 m/s lárétt fram af klettsbrún og lendir í vatninu 3,0 s síðar. Hversu hár var kletturinn og í hversu mikilli láréttri fjarlægð frá kletsbrúninni lenti kafarinn í vatninu?

Dæmi 5.4. Bolta er kastað með láréttum upphafshraða 12,2 m/s fram af toppi byggingar og lendir í láréttri fjarlægð, 21,0 m, frá byggingunni. Hversu há er byggingin?

Dæmi 5.5. Kalli litli heldur vatnsslöngu við jörðina. Vatnið skýst út úr slöngunni með hraðanum 6,5 m/s. Undir hvaða horni, θ_0, á Kalli að halla slöngunni þannig að vatnið lendi í láréttri fjarlægð 2,5 m frá henni?

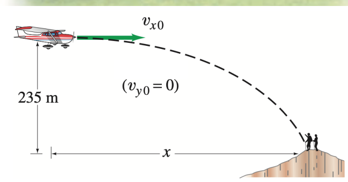


Dæmi 5.6. Ofurhugar eru þekktir fyrir að hoppa fram af El Capitan í Yosemite garðinum í Kaliforníu í Bandaríkjunum. Stokkið er úr 910 m hæð með láréttum upphafshraða 4,0 m/s fram af bjarginu. Til þess að lifa af fallið opna ofurhugarnir fallhlífar í 150 m hæð. Við hunsum loftmótstöðu í þessu dæmi.

(a) Hversu lengi eru ofurhugarnir í frjálsu falli áður en þeir opna fallhlífar sínar?

(b) Hversu langt frá fjallsbrúninni eru ofurhugarnir þegar þeir opna fallhlífar sínar?

Dæmi 5.7. Ör er skotið af boga með upphafshraða 36,6 m/s undir horni $\theta = 42{,}2°$ miðað við lárétt úr hæð 1,62 m. Ákvarðið



(a) Mestu hæðina sem örin nær.

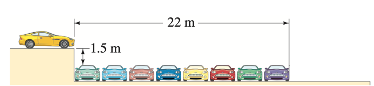
(b) Heildartíma örvarinnar í loftinu.

(c) Drægi örvarinnar, þ.e.a.s. hvar hún lendir.

(d) Hraða örvarinnar 1,50 s eftir að henni var skotið af stað.

Dæmi 5.8. Björgunarflugvél ætlar að sleppa birgðum til fjallgöngumanna sem eru staddir á fjallstindi, 235 m fyrir neðan flughæð björgunarflugvélarinnar. Ef að flugvélin hefur láréttan hraða 69,4 m/s í hversu mikilli láréttri fjarlægð ætti flugvélin að sleppa birgðunum þannig að fjallgöngumennirnir geti gripið birgðirnar?

Dæmi 5.9. Glæfraökumaður ætlar að láta bílinn sinn stökkva yfir bílalest með 8 bílum.



(a) Hver er minnsti hraðinn sem að hann þarf að keyra fram af láréttum stökkpallinum ef að lóðrétta fjarlægðin milli pallsins og bílanna er 1,50 m og lárétta vegalengdin sem hann þarf að komast er 22 m?

(b) Ef að pallinum er núna hallað upp um horn $\theta = 7{,}0°$ miðað við lárétt, hver er þá nýji lágmarkshraðinn sem hann þarf að stökkva fram af með?

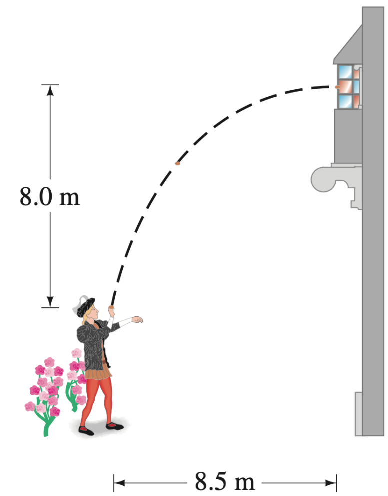
Dæmi 5.10. Slökkviliðsmaður skýtur vatni úr háþrýstislöngu í átt að brennandi byggingu. Hraði vatnsins við enda slöngunnar er 25,0 m/s. Slökkviliðsmaðurinn stillir hornið $\theta = 23°$ sem slangan myndar við jörðu þannig að vatnið er 3,00 s að ferðast til byggingarinnar. Gerum ráð fyrir því að slönguendinn nemi við jörðu.

(a) Hversu langt frá byggingunni stendur slökkviliðsmaðurinn?

(b) Í hvaða hæð hæfir vatnið húsið?

Dæmi 5.11. Á Ólympíuleikum fatlaðra er keppt í Boccia. Markmið leiksins er að henda eigin bolta (rauður eða blár) sem næst hvítum bolta á afmörkuðum velli. Konráð Ragnarsson, Íslandsmeistari í Boccia, stendur 6,3 m frá hvítu kúlunni og kastar kúlunni sinni í átt að hvítu kúlunni úr 1,5 m hæð með hraðanum 7,0 m/s og horninu $\theta = 47°$ miðað við lárétt. Hversu langt frá hvítu kúlunni lendir kúla Konráðs?

Dæmi 5.12. Rómeó er að kasta steinum í gluggann hjá Júlíu. Hann kastar steinunum þannig að þeir lenda á glugganum aðeins með láréttan hraðaþátt. Hann stendur í rósagarðinum, 8,0 m fyrir neðan glugga Júlíu og í 8,5 m láréttri fjarlægð frá glugganum. Hver er hraði steinanna þegar þeir hæfa gluggann hennar Júlíu?

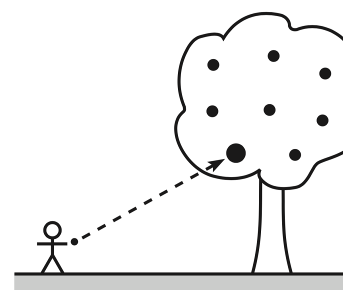


Dæmi 5.13. Tennisspilari slær boltann með hraðanum $v = 15$ m/s undir horninu $\theta = 50°$ miðað við lárétt. Þegar hann slær boltann er mótspilari hans í $d = 10{,}0$ m fjarlægð frá boltanum. Mótspilarinn byrjar að hlaupa 0,30 s eftir að boltinn er sleginn í von um að ná boltanum þegar hann er í $h = 1{,}70$ m hæð yfir upphafshæð.

(a) Hversu langur tími líður frá því að boltinn er sleginn þar til hann er í 1,70 m hæð á niðurleið?

(b) Á hvaða meðalhraða þarf mótspilarinn að hlaupa til þess að ná boltanum?

Dæmi 5.14. **(Jólapróf 2018)** Herbert heiðarlega langar í epli í hádegismat svo hann kastar stein í eplið. Hann stendur í láréttri fjarlægð, 5,4 m, frá eplinu. Hann kastar steininum úr hæðinni 1,3 m með upphafshraða 13,1 m/s yfir horninu $\theta = 37°$ miðað við lárétt og hittir eplið.



(a) Hversu langur tími leið frá því að Herbert kastaði steininum og þar til hann lenti á eplinu?

(b) Í hvaða hæð var eplið?

Dæmi 5.15. Hlut er kastað frá jörðu úr $(x_0, y_0) = (0, 0)$ með upphafshraða v_0 yfir horninu θ miðað við lárétt. Sýnið:

(a) Tíminn sem líður frá því að boltanum er kastað og þar til hann er í mestri hæð er gefinn með:

$$t_{1/2} = \frac{v_0 \sin\theta}{g}.$$

(b) Heildartíminn sem líður frá því að boltanum er kastað og þar til hann lendir er gefinn með:

$$T = 2t_{1/2} = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}.$$

(c) Mesta hæðin sem boltinn nær er gefin með:

$$y = \frac{{v_0}^2 \sin^2\theta}{2g}.$$

(d) Drægni boltans (lárétta færslan) er gefin með:

$$x = \frac{{v_0}^2 \sin(2\theta)}{g}.$$

(e) Notið niðurstöðuna úr liðum (c) og (d) til þess að finna yfir hvaða horni maður á að kasta til þess að boltinn nái mestri hæð og yfir hvaða horni maður á að kasta svo að boltinn komist sem lengst.

Kafli 6

Kraftar

6.1 Útdráttur úr Principia eftir Newton

AXIOMS, OR THE LAWS OF MOTION

Law 1 *Every body perseveres in its state of being at rest or of moving uniformly straight forward, except insofar as it is compelled to change its state by forces impressed.*

Projectiles persevere in their motions, except insofar as they are retarded by the resistance of the air and are impelled downward by the force of gravity. A spinning hoop, which has parts that by their cohesion continually draw one anohter back from rectilinear motions, does not cease to rotate, except insofar as it is retarded by the air. And larger bodies - planets and comets - preserve for a longer time both their progressive and their circular motions, which take place in spaces having less resistance.

Law 2 *A change in motion is proportional to the motive force impressed and takes place along the straight line in which that force is impressed.*

If some force generates any motion, twice the force will generate twice the motion, and three times the force wil generate three times the motion, whether the force is impressed all at once or successively by degrees. And if the body was previously moving, the new motion (since motion is always in the same direction as the generative force) is added to the original motion if that motion was in the same direction or is subtracted from the original motion if it was in the opposite direction or, if it was in an oblique direction, is combined obliquely and compounded with it according to the directions of both motions.

Law 3 *To any action there is always an opposite and equal reaction; in other words, the actions of two bodies upon each other are always equal and always opposite in direction.*

Whatever presses or draws something else is pressed or drawn just as much by it. If anyone presses a stone with a finger, the finger is also pressed by the stone. If a horse draws a stone tied to a rope, the horse will (so to speak) also be drawn back equally toward the stone, for the rope, stretched out at both ends, will urge the horse toward the horse by one and the same endeavor to go slack and will impede the forward motion of the one as much as it promotes the forward motion of the other. If some body impinging upon another body changes the motion of that body in any way by its own force, then, by the force of the other body (because of the equality of their mutual pressure), it also will in turn undergo the same change in its own motion in the opposite direction. By means of these actions, equal changes occur in the motions, not in the velocities - that is, of course, if the bodies are not impeded by anything else. For the changes in velocities that likewise occur in opposite directions are inversely proportional to the bodies because the motions are changed equally. This law is valid also for attractions, as will be proved in the next scholium.

6.2 Lögmál Newtons

> *„No prediction whatsoever can be made from a definition. One might sit in an armchair all day long and define words at will, but to find out what happens when two balls push against each other, or when a weight is hung on a spring, is another matter altogether, because the way the bodies behave is something completely outside any choice of definitions."*
>
> \- Richard Feynman

Við skulum nú loksins fjalla um kraftahugtakið. Það er afskaplega öflugt en á sama tíma mjög einfalt:

Skilgreining 6.1. Lítum á hlut með massa m sem verður fyrir hröðun a. **Heildarkrafturinn** sem verkar á hlutinn er þá gefinn með:

$$F_{\text{heild}} = ma.$$

Við skrifum stundum til einföldunar $F = ma$. Við segjum síðan að hröðunin sem að hlutur verður fyrir sé vegna kraftsins sem verkar á hlutinn. En það er í rauninni hringskilgreining því við segjum að krafturinn sé vegna hröðunarinnar sem að hluturinn finnur fyrir. Við athugum að einingarnar á krafti eru gefnar með $[F] = [ma] = [m][a] = \text{kg}\,\text{m/s}^2$. Þessi stærð hefur fengið nafnið Newton og er táknuð með $\text{N} = \text{kg}\,\text{m/s}^2$. Lögmál Newtons eru í íslenskri þýðingu eftirfarandi:

Lögmál 1 *Sérhver hlutur heldur áfram að vera í kyrrstöðu, eða á jafnri hreyfingu eftir beinni línu, nema kraftar sem á hann verka þvingi hann til að breyta því ástandi.*

Lögmál 2 *Breyting hreyfingarinnar er í réttu hlutfalli við hreyfikraftinn sem verkar; og hún verður í stefnu beinu línunnar sem krafturinn verkar eftir.*

Lögmál 3 *Gagnstætt sérhverju átaki er ávallt jafnstórt gagntak, eða gagnkvæmar verkanir tveggja hluta hvors á annan eru ávallt jafnstórar og í gagnstæða stefnu.*

Fyrsta lögmálið

Fyrsta lögmálið, sem gjarnan er nefnt tregðulögmálið, segir okkur að eina leiðin til þess að breyta hraða hlutar sé með því að beita einhverjum heildarkrafti F á hann. En $F = ma$ svo það er jafngilt því að hann verði fyrir hröðun a. En fyrir fasta hröðun $a = 0$ gildir að $v = v_0 + at = v_0 = \text{fasti}$. Við höfum því að:

$$\boxed{F = 0 \iff a = 0 \iff v = \text{fasti}.}$$

Annað lögmálið

Annað lögmálið segir okkur að hreyfing hlutar er vegna hröðunarinnar sem hluturinn verður fyrir vegna samanlagðra krafta sem verka á hlutinn. Ef $F_1, F_2, \ldots, F_n$ eru kraftar sem verka á hlut þá ritum við oft

$$\boxed{F_{\text{heild}} = F_1 + F_2 + \ldots + F_n.}$$

Þriðja lögmálið

Loks segir þriðja lögmálið okkur að ef hlutur A verkar með krafti F_A á hlut B þá verkar hlutur B með jafnstórum gagnverkandi krafti á hlut A, þ.e.a.s.

$$\boxed{F_A = -F_B.}$$

6.3 Nokkrir kraftar

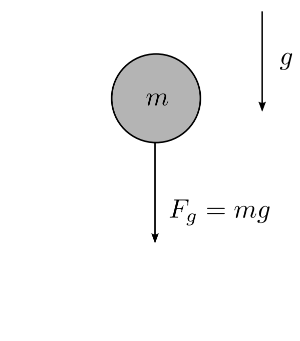
Þyngdarkraftur

Fyrsti krafturinn sem við nefnum er kannski sá sem flestir þekkja:

Skilgreining 6.2. Lítum á hlut með massa m sem er staddur í þyngdarsviði með þyngdarhröðun g. Þá verkar á hann kraftur

$$F_g = mg,$$

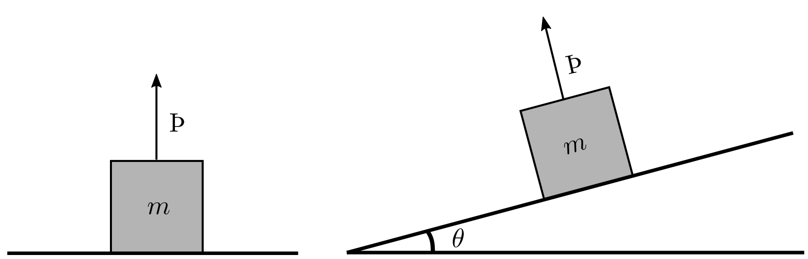
beint niður í áttina að jörðinni, sem kallast **þyngdarkraftur**.



Mynd 6.1: Hlutur með massa m í þyngdarsviði með þyngdarhröðun g finnur fyrir þyngdarkrafti $F_g = mg$.

Þverkraftur

Ef við stöndum kyrr á jörðinni, þá er heildarkrafturinn á okkur núll (því við erum ekki á hreyfingu svo hröðun okkar er núll og því er heildarkrafturinn það líka samkvæmt fyrsta lögmáli Newtons). En þyngdarkrafturinn verkar alltaf á okkur svo að það hlítur að vera jafn stór kraftur sem verkar í öfuga stefnu miðað við þyngdarkraftinn sem heldur okkur kyrrum. Sá kraftur nefnist þverkraftur og er táknaður með Þ. Þverkrafturinn verkar alltaf hornrrétt frá yfirborði flatarins á hlutinn sem hvílir á fletinum.



Mynd 6.2: Hlutur sem hvílir ofan á öðrum fleti finnur fyrir þverkrafti, Þ, frá fletinum, hornrétt á yfirborðið.

Á mynd 6.2 sjáum við hvernig þverkrafturinn, Þ, sem verkar á hlut, breytist eftir því sem að við höllum fletinum sem hann hvílir á um horn θ miðað við lárétt. Á myndinni vinstra megin höfum við að Þ $= mg$ en hinsvegar á hægri myndinni höfum við að Þ $= mg\cos\theta$.

Varúð: Einföld sál gæti haldið að þverkrafturinn og þyngdarkrafturinn væru þriðja lögmáls par. Það er hinsvegar ekki rétt! Því þegar við stöndum á jörðinni þá verkum við með krafti á jörðina sem ýtir henni niður. Jörðin ýtir þá til baka á okkur með jafn stórum gagnverkandi krafti. Sá kraftur er þverkrafturinn. Það er mikilvægt að átta sig á því að kraftarnir sem um ræðir í þriðja lögmáli Newtons verka alltaf á sitt hvorn hlutinn. Því geta þyngdarkrafturinn og þverkrafturinn ekki verið þriðja lögmáls par.

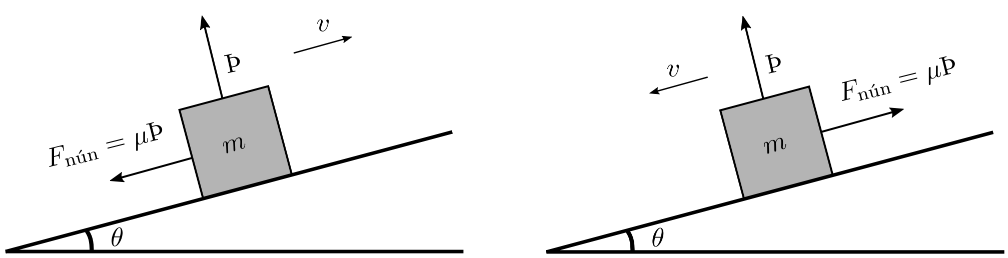
Núningskraftur

Á milli sérhverra tveggja yfirborða verkar núningskraftur sem er háður efnunum sem snertast. Við lýsum stærð núningskraftsins milli tveggja efna með **núningsstuðlinum**, μ. Því lægri sem núningsstuðullinn er því minni núningurinn sem verkar á milli yfirborðanna. Til dæmis er núningsstuðullinn milli ís og ís frekar lágur ($\mu = 0{,}02$) en milli málms og viðar hár ($\mu = 0{,}5$). Þið hafið eflaust tekið eftir því að að okkur hefur tekist að ýta hlut af stað þá er auðveldara að draga hann meðfram öðru yfirborði. Þetta er vegna þess að við höfum í rauninni tvær mismunandi gerðir af núningsstuðlum. Annars vegar hreyfinúningsstuðullinn, μ_k sem lýsir núningskraftinum á milli tveggja hluta sem eru á hreyfingu miðað við hvorn annann og hinsvegar kyrrstöðunúningsstuðullinn μ_s sem lýsir núningskraftinum á milli tveggja hluta sem eru kyrrir miðað við hvorn annan. Athugið að kyrrstöðunúningsstuðullinn er alltaf stærri en hreyfinúningsstuðullinn því eftir að við höfum komið hlut af stað er auðveldara að draga hann áfram. Við höfum almennt að núningskraftinn má reikna með eftirfarandi lögmáli:

Lögmál 6.3. Lítum á hlut sem er dreginn meðfram yfirborði. Látum núningsstuðulinn milli hlutarins og flatarins vera μ. Látum Þ vera þverkraftinn sem flöturinn verkar með á hlutinn og látum $F_{\text{nún}}$ vera núningskraftinn milli flatarins og hlutarins. Þá gildir að:

$$F_{\text{nún}} = \mu \text{Þ}.$$

Stefna kraftsins er gagnstæð hreyfingu hlutarins miðað við flötinn.

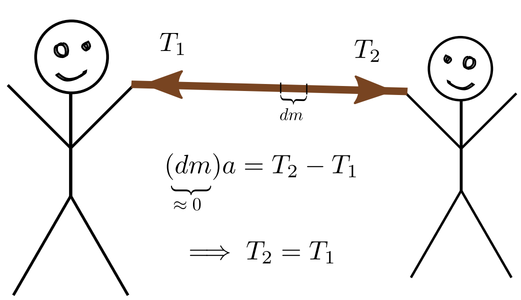


Mynd 6.3: Hlutur sem nuddast upp við annan flöt finnur fyrir núningskrafti gagnstætt hreyfingunni.

Athugið: Hugsum okkur að hluturinn sé kyrr (þ.e. ekki á hreyfingu miðað við yfirborðið sem hann hvílir á). Ef við beitum krafti $F \leq \mu\text{Þ}$ á hlutinn þá mun hann haldast kyrr því krafturinn F er ekki nógu stór til þess að yfirvinna núningskraftinn. Í því tilviki er núningskrafturinn jafn stór og krafturinn F, þ.e. $F_{\text{nún}} = F$ til að halda hlutnum kyrrum. Við ættum því tæknilega séð að skrifa $F_{\text{nún}} \leq \mu\text{Þ}$ til að gefa þetta til kynna.

Togkraftur

Þegar við togum í reipi þá togar reipið til baka í okkur með jafn stórum gagnverkandi krafti samkvæmt þriðja lögmáli Newtons. Þessi kraftur nefnist **togkraftur**.



Mynd 6.4: Togkrafturinn í reipinu er sá sami alls staðar að því gefnu að reipið sé svo gott sem massalaust.

6.4 Fleiri kraftar

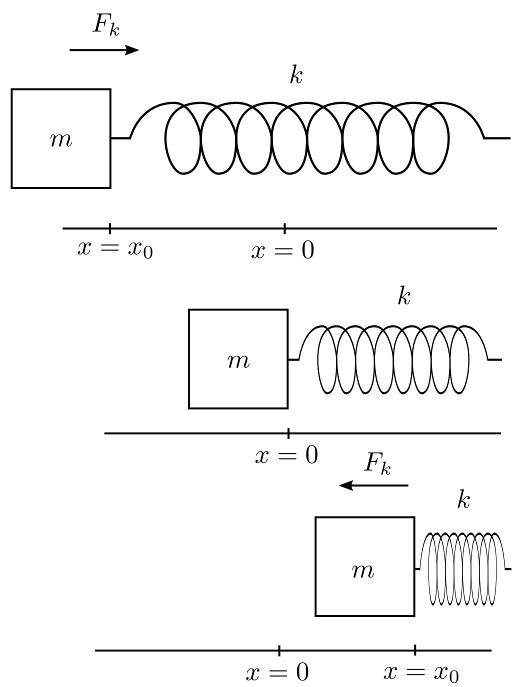
Gormkraftur

Hugsum okkur gorm. Ef við drögum hann frá jafnvægisstöðunni sinni og sleppum honum þá skýst hann til baka í átt að jafnvægisstöðunni. Því meira sem við drögum því erfiðara er að halda honum og ef við missum tak á honum þá skýst hann þeim mun meira af stað. Þessu fyrirbæri má lýsa með eftirfarandi lögmáli:

Skilgreining 6.4. Lítum á gorm með gormstuðul k sem er í fjarlægð x frá jafnvægisstöðu sinni. Þá er **gormkrafturinn**, F_k, sem verkar á gorminn gefinn með:

$$F_k = -kx.$$

Gormstuðullinn, k, getur verið háður efninu sem gormurinn er gerður úr, lögun gormsins og stærð hans. Við skulum skoða hvaða einingar gormstuðullinn hefur. Nú er $[F] = \mathrm{N}$ og $[x] = \mathrm{m}$ svo að $[k] = [F]\,/\,[x] = \mathrm{N/m}$.



Mynd 6.5: Gormkrafturinn er háður gormstuðli gormsins og fjarlægð gormsins frá jafnvægisstöðunni.

Loftmótsstaða

Venjulega hunsum við loftmótstöðu í dæmunum sem við reiknum, en núna skulum við gera henni góð skil (svo að við getum hunsað hana aftur með góðri samvisku). Loftmótstaðan sem verkar á hlutinn er háð þverskurðarflatarmálinu, A, eðlismassa loftsins, ρ, og hraða hlutarins v. Með víddargreiningu sjáum við að:

$$[\rho A v^2] = (\mathrm{kg/m^3})(\mathrm{m^2})(\mathrm{m/s})^2 = \mathrm{kg\,m/s^2} = \mathrm{N}.$$

Við höfum þá með víddargreiningu að til sé fasti α þannig að loftmótstöðukrafturinn, F_L sé gefinn með:

$$F_L = \alpha \rho A v^2.$$

Við höfum þar að auki að í einföldum aðstæðum er $\rho_{\mathrm{loft}} = \text{fasti}$ og $A = \text{fasti}$. Við ályktum því að rita megi:

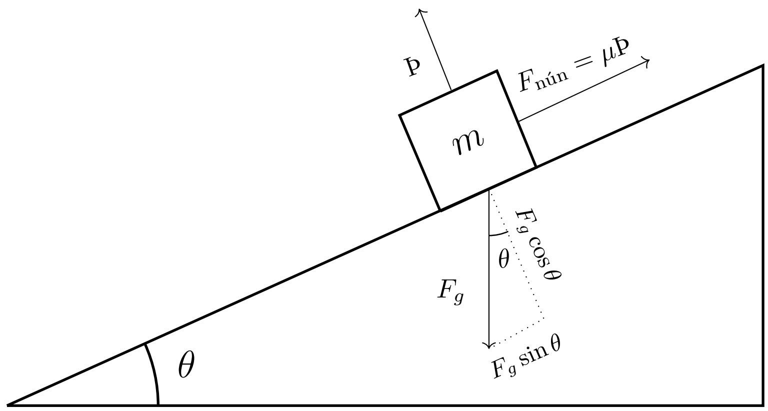
$$\boxed{F_L = \beta v^2.}$$

Þar sem $\beta = \alpha \rho A$ er fasti með einingar $[\beta] = \mathrm{kg/m}$ og er háður eðlismassa lofts og þverskurðarflatarmálinu.

6.5 Sýnidæmi

Skábrettadæmi

Skoðum kassa með massa m sem hvílir á skábretti sem hallar um θ gráður miðað við lárétt. Gerum ráð fyrir að núningsstuðullinn milli kassans og skábrettisins sé μ. Þá verka eftirfarandi kraftar á kassann: Þyngdarkrafturinn, F_g, þverkrafturinn, Þ og núningskrafturinn, $F_{\text{nún}}$. Ef hornið θ er nógu lítið þá mun þyngdarkraftinum ekki takast að yfirvinna núningskraftinn og kassinn mun haldast kyrr. Því er til minnsta horn, θ_{min}, þannig að fyrir $\theta \leq \theta_{\text{min}}$ rennur kassinn ekki niður skábrettið en fyrir $\theta > \theta_{\text{min}}$ rennur kassinn niður skábrettið. Hlutir sem eru ekki á hreyfingu eru óspennandi svo við skoðum tilvikið þegar $\theta > \theta_{\text{min}}$.



Dæmi: Ákvarðið hröðun kassans, a, niður samsíða skábrettinu að því gefnu að $\theta > \theta_{\text{min}}$.

Lausn: Við veljum hnitakerfið þannig að x-ásinn sé samsíða skáplaninu (í stefnu niður) og y-ásinn þvert á x-ásinn upp. Samkvæmt öðru lögmáli Newtons er heildarkrafturinn sem verkar á kassann þá summa allra kraftanna sem verka á kassann. Kraftarnir sem verka á kassann eru þyngdarkrafturinn, þverkrafturinn og núningskrafturinn. Við vitum að heildarhröðunin í y-stefnuna verður núll því massinn er að renna á skáplaninu án þess að losna frá því. Við höfum því að:

$$m\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{F}_{\text{heild}} = \vec{F}_g + \vec{F}_{\text{nún}} + \vec{\text{Þ}} = \begin{pmatrix} mg\sin\theta \\ -mg\cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mu\text{Þ} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \text{Þ} \end{pmatrix}.$$

Við sjáum þá af neðri jöfnunni að:

$$0 = -mg\cos\theta + \text{Þ} \implies \text{Þ} = mg\cos\theta,$$

en þá verður efri jafnan:

$$ma = mg\sin\theta - \mu\text{Þ} = mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta$$

styttum út m og tökum g út fyrir sviga og höfum þá:

$$\boxed{a = g\left(\sin\theta - \mu\cos\theta\right).}$$

Dæmi: Ákvarðið minnsta hornið, θ_{min}, þannig að kassinn renni niður skábrettið.

Lausn: Ef $\theta > \theta_{\text{min}}$ þá er $a > 0$ en þegar $\theta = \theta_{\text{min}}$ þá er $a = 0$ og kassinn rennur niður skábrettið með jöfnum hraða. Við fáum því að $0 = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$ en það gefur okkur að $\sin\theta = \mu\cos\theta$ sem er jafngilt því að $\mu = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$. Þetta gildir aðeins fyrir hornið $\theta = \theta_{\text{min}}$ svo við höfum sýnt að $\mu = \tan(\theta_{\text{min}})$.
Dæmi: Ákvarðið hraða kassans þegar hann hefur runnið niður skábrettið úr hæð h.

Lausn: Ef við byrjum á því að hunsa núninginn þá fáum við einfaldlega með orkuvarðveislu að:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \implies v_{\text{orka}} = \sqrt{2gh}.$$

Við skoðum núna hvað gerist þegar hluturinn verður fyrir núningskrafti á leiðnni niður. Ef kubburinn byrjar í hæð h þá er lengdin sem hann á eftir að renna niður skábrettið $\Delta s = \frac{h}{\sin\theta}$. Við vitum að hröðun kassans niður skábrettið er gefin með $a = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$. Við fáum því með tímaóháðu jöfnunni að:

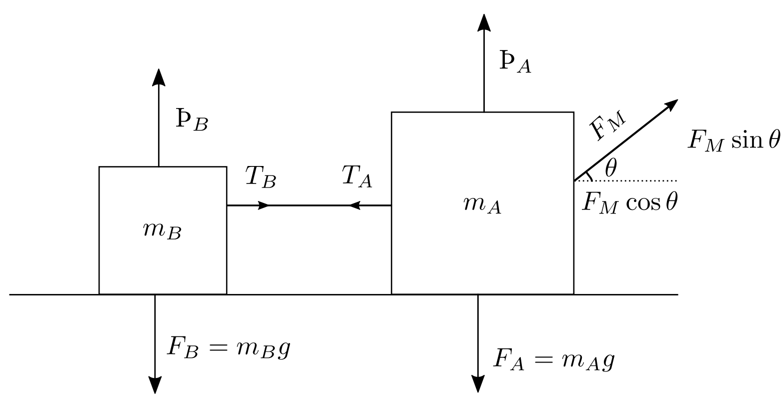
$$2a\Delta s = v^2 - v_0^2 \implies v = \sqrt{2a\Delta s} = \sqrt{2g(\sin\theta - \mu\cos\theta)\frac{h}{\sin\theta}} = \sqrt{2gh\,(1 - \mu\cot\theta)}$$

Við getum þannig fundið hversu mikil orka, $W_{\text{nún}}$, tapaðist í núning á leiðinni niður:

$$W_{\text{nún}} = \Delta K = \frac{1}{2}m{v_{\text{orka}}}^2 - \frac{1}{2}mv^2 = mgh - mgh(1 - \mu\cot\theta) = \mu\cot\theta\, mgh.$$

Togkraftadæmi

Lítum á tvo massa m_A og m_B sem tengdir eru saman með reipi. Látum Matta verka á massa m_A með krafti F_M yfir horninu θ miðað við lárétt. Hver er hröðun massans m_A? Hver er hröðun massans m_B? Hver er togkrafturinn í reipinu á meðan Matti verkar á massann m_A?



Lausn: Við stillum upp kraftajöfnum fyrir báða kassana. Hröðun kassans m_A er jöfn hröðun kassans m_B. Á kassa A verka kraftarnir $F_M, F_g,$ Þ og T. Við höfum þá (að því gefnu að F_M sé ekki nógu stór til þess að lyfta kassa A) að:

$$m_A \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_M\cos\theta - T_A \\ F_M\sin\theta + Þ_A - F_A \end{pmatrix}$$

Hinsvegar höfum við fyrir massa B að kraftajafnan verður:

$$m_B \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_B \\ Þ_B - F_B \end{pmatrix}$$

Leggjum saman báðar efri jöfnurnar og notum að $T_A = T_B$ og fáum þá að:

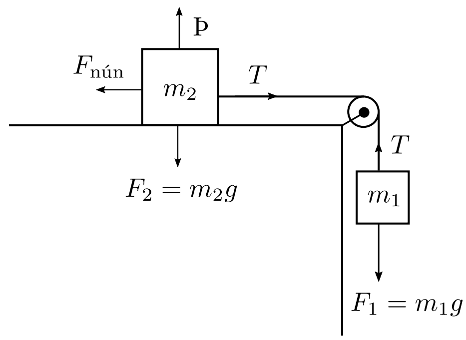
$$(m_A + m_B)\,a = F_M\cos\theta$$

svo við ályktum að $a = \frac{F_M\cos\theta}{m_A+m_B}$. Til þess að finna togkraftinn í reipinu þá fáum við að:

$$T = T_B = m_B a = \frac{m_B}{m_A + m_B}F_M\cos\theta.$$

Trissudæmi

Látum tvo kassa, 1 og 2 með massa m_1 og m_2 vera tengda saman með bandi. Kassi 1 hangir í frjálsu falli yfir núningslausri trissu en kassi 2 liggur á borði. Finnið hröðun kerfisins ef núningsstuðullinn milli borðsins og kassa 2 er μ. Finnið togkraftinn í bandinu.



Við stillum upp kraftajöfnum fyrir massana tvo. Höfum fyrir kassa 1 að (veljum stefnu í átt niður að gólfinu)

$$F_{\text{heild}} = m_1 a = m_1 g - T$$

en fyrir kassa 2 höfum við eftirfarandi kraftajöfnu:

$$F_{\text{heild}} = m_2 a = T - F_{\text{nún}} = T - \mu m_2 g$$

Leggjum saman jöfnurnar og fáum þá að:

$$(m_1 + m_2)a = m_1 g - \mu m_2 g$$

svo við fáum að

$$a = \frac{m_1 - \mu m_2}{m_1 + m_2} g$$

En þá getum við fundið togkraftinn með því að athuga að

$$T = -m_1(a - g) = -m_1 g \left(\frac{m_1 - \mu m_2}{m_1 + m_2} - 1 \right) = -m_1 g \left(\frac{m_1 - \mu m_2 - (m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} \right) = \frac{(\mu + 1) m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

Lyftudæmi

Ónefndur nemandi í 5.XY ætlar að reyna að sleppa við það að þurfa að fara í lyftuna í Cösu Nova. Til þess að sleppa við það ætlar nemandinn að beita hugviti sínu til þess að giska á niðurstöðurnar sem að vondi, strangi kennarinn hans (nefnum engin nöfn) ætlar að spurja hann út úr. Hann stillir því upp kraftajöfnunum sem að verka á lyftuna og nemandann sem stendur á voginni. Látum lyftuna hafa massa M_L og látum ónefnda nemandann hafa massa m_n. Ef lyftan er á leiðinni upp er $a > 0$ (miðað við stefnu skilgreinda upp) og kraftajafnan verður fyrir lyftuna:

$$m_L a = F_{\text{lyfta}} - M_L g$$

en hinsvegar fyrir ónefnda nemandan verður jafnan

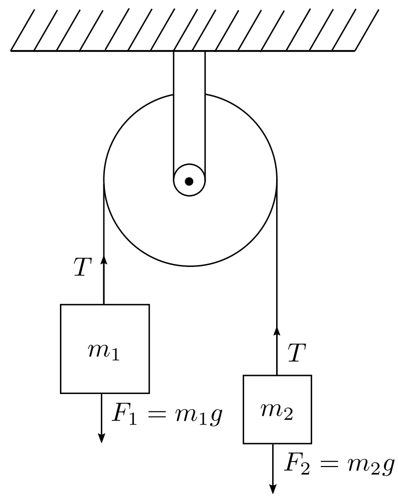
$$m_n a = Þ - m_n g$$

en þar sem að $a > 0$ þá fáum við að $Þ > m_n g$ svo að þyngd nemandans virðist aukast (samkvæmt voginni) þegar hann fer upp. En hinsvegar ef við erum á leiðinni niður þá verður kraftajafnan fyrir ónefnda nemandann (með $a > 0$ og stefnuna skilgreinda niður)

$$m_n a = m_n g - Þ$$

og ef $a > 0$ þá er $m_n g - Þ > 0$ svo við ályktum að þyngd nemandans virðist minnka á leiðinni niður. Hinsvegar á miðkaflanum þá ferðast lyftan með jöfnum hraða og þá höfum við $a = 0$ og $Þ = m_n g$ og þyngd nemandans á voginni virðist vera sú sama.

Vél Atwoods



Ef við gerum ráð fyrir að $m_1 > m_2$ þá þykir okkur eðlilegt að þyngri massinn byrji að fara niður með hröðun a en sá léttari færist upp með hröðun a. Finna á hröðunina a og togkraftinn í strengnum.

Lausn: Við stillum upp kraftajöfnum fyrir massana:

$$m_1 a = m_1 g - T$$

og

$$m_2 a = T - m_2 g$$

svo við höfum þá að

$$(m_1 + m_2)a = (m_1 - m_2)g$$

sem gefur því að

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

en þar með höfum við að togkrafturinn sé

$$T = m_1(g - a) = m_1 g \left(1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) = m_1 g \left(\frac{m_1 + m_2 - (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}\right) = \left(\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) g$$

Víddargreining getur líka verið gott tól til þess að meta hvort að svarið sem að við höfum fundið standist nánari athuganir. Til dæmis fengum við að hröðun massanna í vél Atwoods væri (ef $m_1 > m_2$)

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

við getum athugað hverjar víddirnar eru beggja meginn jafnaðarmerkisins (þá eru oft settir hornklofar í kringum stærðina) þannig við höfum að:

$$\underbrace{[a]}_{m/s^2} = \left[\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g\right] = \left[\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right] \underbrace{[g]}_{m/s^2}$$

svo við sjáum að stærðin $\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$ verður að vera hrein tala (þ.e.a.s. hafa engar einingar) en það gildir einmitt því einingarnar fyrir ofan strikið eru í kg en einingarnar fyrir neðan strikið líka svo þær styttast út og við fáum tölu. Því er sennilegt að þessi jafna sé rétt, eða heldur að við höfum ekki gert einhver klaufamistök þegar við vorum að leiða hana út.

6.6 Dæmi

Dæmi 6.1. Geimfari nokkur hefur massa $m = 68\,\mathrm{kg}$. Hver væri þyngdarkrafturinn sem verkar á geimfarann á jörðinni? En á tunglinu þar sem þyngdarhröðunin er $g_T = 1{,}62\,\mathrm{m/s^2}$? En á Mars þar sem þyngdarhröðunin er $g_M = 3{,}71\,\mathrm{m/s^2}$? Hver væri þyngdarkrafturinn ef geimfarinn væri að ferðast með jöfnum hraða í útgeimnum?

Dæmi 6.2. Manneskja á raunhæfa möguleika á því að lifa af árekstur svo lengi sem hröðun hennar er ekki meiri en $30g = 295\,\mathrm{m/s^2}$. Metið stærð kraftsins sem manneskja getur þolað án þess að deyja.

Dæmi 6.3. Kókómjólkur-Klói er að lyfta lóðum í ræktinni. Þyngstu lóðin sem hann getur lyft (án þess að drekka kókómjólk) eru tvö 15 kg lóð. Til að sýna sig fyrir skvísunum í World Class ætlar hann að lyfta tveim 45 kg lóðum. Hversu mikinn kraft þarf hann að fá úr kókómjólkinni?

Dæmi 6.4. Kassi með massa $m_1 = 12\,\mathrm{kg}$ stendur á borði. Hver er þyngdarkrafturinn sem verkar á kassann? Hver er þverkrafturinn sem verkar á kassann? Nú er kassa með massa $m_2 = 16\,\mathrm{kg}$ komið fyrir ofan á hinum kassanum. Hver er þá þverkrafturinn sem borðið verkar með á kasann og hver er þverkrafturinn sem eftri kassinn verkar með á neðri kassann?

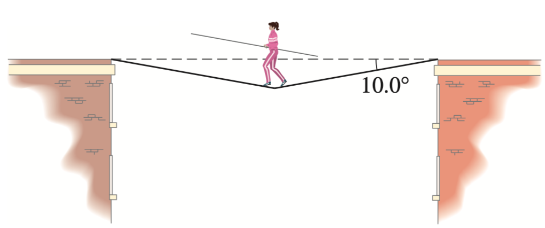
Dæmi 6.5. Fata með massa $m = 14{,}0\,\mathrm{kg}$ hengur lóðrétt í reipi með togkraft 163 N. Hver er hröðun fötunnar?

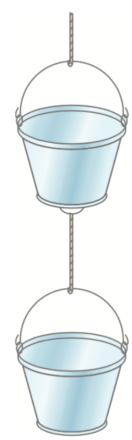
Dæmi 6.6. Lyftukapall nokkur þolir hámarkstogkraft upp á 21.750 N áður en hann slitnar. Lyftan sjálf er 2125 kg. Hver er hámarkshröðunin sem að lyftan getur ferðast með án þess að kapallinn slitni?

Dæmi 6.7. Kona nokkur hefur massa $m = 68\,\mathrm{kg}$. Hún stendur á baðvog í lyftu sem er kyrr. Þegar lyftan fer af stað þá sýnist henni þyngd hennar minnka niður í 55 kg. Hver er hröðun lyftunnar og hvort var hún á niðurleið eða uppleið?

Dæmi 6.8. Manneskja með massa $m = 75\,\mathrm{kg}$ stendur á vog í lyftu. Hvað les vogin hennar þegar lyftan **(a)** er kyrr, **(b)** fer upp með jöfnum hraða $3{,}0\,\mathrm{m/s^2}$, **(c)** fer niður með jöfnum hraða $3{,}0\,\mathrm{m/s}$ **(d)** fer upp með hröðun $3{,}0\,\mathrm{m/s^2}$ **(e)** fer niður með hröðun $3{,}0\,\mathrm{m/s^2}$.

Dæmi 6.9. Laufey línudansari hefur massann $m = 50{,}0\,\mathrm{kg}$. Hún ætlar að labba á milli tveggja bygginga sem eru í láréttri fjarlægð, 10 m, frá hver annarri. Þegar hún er mitt á milli bygginganna þá myndar línan 10° horn miðað við lárétt. Hver er togkrafturinn í línunni þegar hún er stödd í miðjunni?



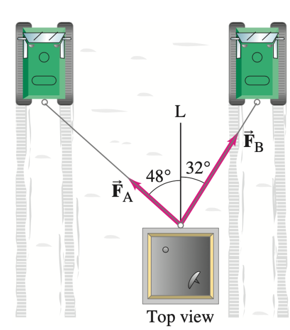


Dæmi 6.10. Málningarfata með massa 3,2 kg hengur í reipi fyrir neðan aðra málningarfötu sem hefur massann 4,5 kg.

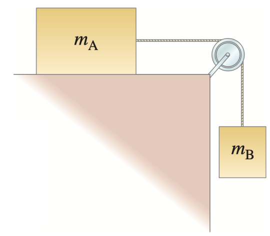
(a) Hver er togkrafturinn í hvoru reipi fyrir sig ef föturnar eru kyrrstæðar?

(b) Nú togum við í efra reipið með krafti 90 N. Hver er hröðun kerfisins?

Dæmi 6.11. Tvær beitidráttarvélar eru að draga litla veðurathuganarstöð á Suðurskautslandinu. Önnur beitidráttarvélin dregur veðurathuganarstöðina með krafti $F_A = 4500\,\mathrm{N}$. Beitidráttarvélarnar draga veðurathuganartöðina þannig að kraftarnir $\vec{F}_A$ og $\vec{F}_B$ mynda hornin $\alpha = 48°$ og $\beta = 32°$ miðað við þá stefnu sem að beitidráttarvélin er að ferðast eftir. Ákvarðið stærð kraftsins F_B og heildarkraftinn $\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B$ sem verkar á veðurathuganarstöðina.



Dæmi 6.12. Á myndinni hér til hægri má sjá kassa með massa $m_A = 13{,}0\,\mathrm{kg}$ sem stendur á núningslausu borði í fjarlægð $1{,}250\,\mathrm{m}$ frá borðsbrúninni. Kassinn er tengdur með reipi yfir núningslausa trissu við kassa með massa $m_B = 5{,}0\,\mathrm{kg}$ sem hangir fram af borðinu.



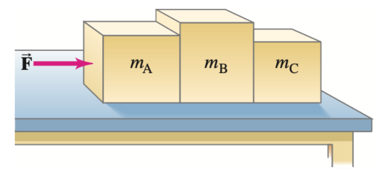
(a) Teiknið kraftamynd af hvorum kassa fyrir sig.

(b) Ákvarðið heildarhröðun kerfisins og togkraftinn í reipinu.

(c) Hversu langur tími líður þar til að m_A flýgur fram af borðsbrúninni ef hann er kyrrstæður til að byrja með?

(d) Breytum núna massanum $m_B = 1{,}0\,\mathrm{kg}$. Hversu stór þyrfti m_A að vera til þess að hröðun kerfisins væri $\frac{1}{100}g = 0{,}0982\,\mathrm{m/s^2}$?

Dæmi 6.13. Þrír kassar, A, B og C með massa $m_A = 8{,}1\,\mathrm{kg}$, $m_B = 9{,}7\,\mathrm{kg}$ og $m_C = 8{,}5\,\mathrm{kg}$ standa á núningslausum fleti. Krafti $F = 96{,}0\,\mathrm{N}$ er beitt á kassa A.



(a) Teiknið kraftamyndir af hverjum kubb fyrir sig.

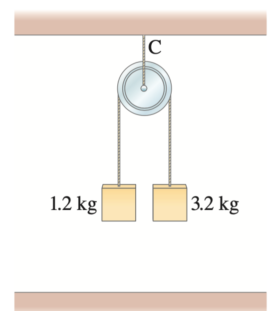
(b) Ákvarðið hröðun kerfisins.

(c) Ákvarðið heildarkraftinn sem verkar á hvern kubb.

(d) Ákvarðið kraftinn $\vec{F}_{B\to A}$ sem kassi B verkar með á A.

(e) Ákvarðið kraftinn $\vec{F}_{A\to B}$ sem kassi A verkar með á B.

(f) Ákvarðið kraftana $\vec{F}_{B\to C}$ og $\vec{F}_{C\to B}$ sem kassi B og C verka með á hvorn annan.



Dæmi 6.14. Lítum á Atwood vélina á mynd hér til hægri. Tveir massar $m_1 = 1{,}2\,\mathrm{kg}$ og $m_2 = 3{,}2\,\mathrm{kg}$ eru tengdir saman yfir núningslausa trissu. Ákvarðið togkraftinn í reipinu eftir að mössunum er sleppt úr kyrrstöðu.

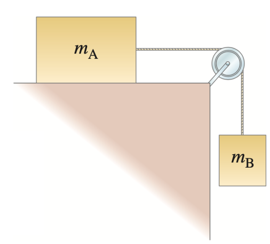
Dæmi 6.15. Núningsstuðullinn milli $22\,\mathrm{kg}$ kassa og gólfsins er $\mu = 0{,}30$. Hversu stóran láréttan kraft þarf til þess að draga kassann með jöfnum hraða meðfram gólfinu?

Dæmi 6.16. Hugsum okkur að við stöndum um borð í lest sem tekur af stað með hröðun $a = 1{,}95\,\mathrm{m/s^2}$. Hver er minnsti núningsstuðullinn milli lestargólfsins og skósólanna til þess að við rennum ekki til?

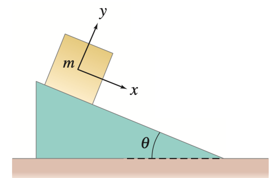
Dæmi 6.17. Núningsstuðullinn milli bíldekkja og malbiks er $\mu = 0{,}90$. Hvert er stærsta hornið miðað við lárétt sem hægt er að leggja bíl í brekku við án þess að hann renni niður brekkuna?

Dæmi 6.18. Kassa er ýtt af stað með upphafshraða $v_0 = 3{,}5\,\mathrm{m/s}$. Hversu langt mun kassinn renna ef núningsstuðullinn milli gólfsins og kassans er $\mu = 0{,}15$.

Dæmi 6.19. Á mynd hér til hægri má sjá kassa með massa m_A sem stendur á borði í fjarlægð $1{,}250\,\mathrm{m}$ frá borðsbrúninni. Núningsstuðullinn milli kassans og borðsins er $\mu = 0{,}20$. Kassinn er tengdur með reipi yfir núningslausa trissu við kassa með massa $m_B = 2{,}0\,\mathrm{kg}$ sem hangir fram af borðinu. Hvert er minnsta gildið á massanum m_A þannig að kerfið haldist kyrrt?



Dæmi 6.20. Kassi með massa $m = 7{,}0\,\mathrm{kg}$ hvílir á núningslausu skábretti sem hallar um $\theta = 22{,}0°$ miðað við lárétt.



(a) Ákvarðið hröðun kassans þegar hann rennur niður skábrettið.

(b) Ef kassinn byrjar í hæð $h = 12{,}0\,\mathrm{m}$ hver verður hraði hans þegar hann kemur niður á botn skábrettisins?

(c) Er heildarorka kassans varðveitt við að renna niður skábrettið?

Dæmi 6.21. Kassi fær upphafshraða $v_0 = 4{,}5\,\mathrm{m/s}$ upp núningslaust skábretti sem hallar um $\theta = 22{,}0°$ miðað við lárétt.

(a) Hversu hátt kemst kubburinn áður en hann stoppar í efstu hæð?

(b) Hversu langur tími líður þar til að hann er í efstu hæð?

(c) Hversu langur tími líður þar til að hann er búinn að renna aftur niður skábrettið?

Dæmi 6.22. Skoðum núna kubb með massa m sem stendur á skábretti sem hallar um $\theta = 25{,}0°$ miðað við lárétt. Látum núningsstuðulinn milli kassans og undirlagsins vera $\mu = 0{,}19$.

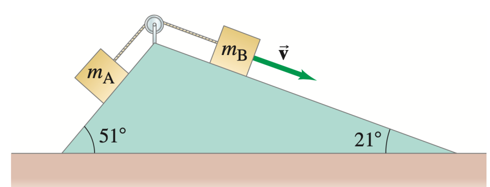
(a) Ákvarðið hröðun kubbsins, a, á meðan hann rennur niður skábrettið.

(b) Ákvarðið hraða kubbsins þegar hann kemur niður skábrettið ef hann byrjar í $h = 8{,}15\,\mathrm{m}$ hæð.

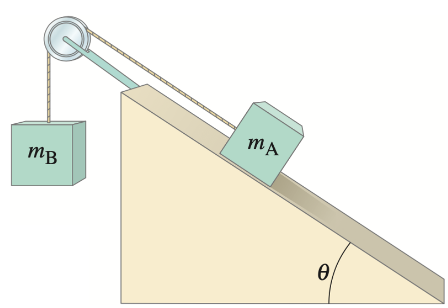
(c) Nú er kubbnum ýtt upp skábrettið með upphafshraða $v_0 = 3{,}0\,\mathrm{m/s}$. Hversu hátt kemst kubburinn áður en að hann staðnæmist í efstu stöðu? Hversu langan tíma tók það?

Dæmi 6.23. Barn rennir sér niður rennibraut sem hallar um $\theta = 34°$ miðað við lárétt. Á botni rennibrautarinnar er hraði barnsins helmingurinn af þeim hraða sem barnið hefði haft ef rennibrautin hefði verið núningslaus. Ákvarðið núningsstuðulinn milli barnsins og rennibrautarinar.

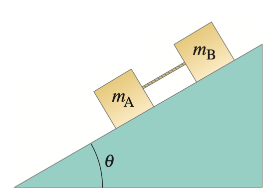
Dæmi 6.24. Tveir kassar með massa $m_A = 2{,}0\,\mathrm{kg}$ og $m_B = 5{,}0\,\mathrm{kg}$ standa á undarlegu skábretti (sjá mynd hér til hægri). Kassarnir eru tengdir með reipi yfir núningslausa trissu. Flöturinn sem m_A hvílir á hallar um $\alpha = 51°$ miðað við lárétt en flöturinn sem m_B hvílir á hallar um $\beta = 21°$ miðað við lárétt. Núningsstuðullinn milli m_A og flatarins sem hann hvílir á er $\mu_A = 0{,}25$ en núningsstuðullinn milli m_B og flatarins sem hann hvílir á er $\mu_B = 0{,}30$. Ákvarðið hröðun kerfisins að því gefnu að m_A færist upp skábrettið sitt en m_B færist niður skábrettið sitt.



Dæmi 6.25. Skoðum myndina hér til hægri. Tveir kassar með massa $m_A = 2{,}7\,\mathrm{kg}$ og $m_B = 3{,}2\,\mathrm{kg}$ eru tengdir með reipi yfir núningslausa trissu. Kassinn með massa m_A hvílir á skábretti sem hallar um $\theta = 34°$ miðað við lárétt. Núningsstuðullinn milli m_A og skábrettisins er $\mu = 0{,}15$. **(a)** Ákvarðið hröðun kerfisins þegar því er sleppt úr kyrrstöðu að því gefnu að m_B byrjar að færist niður (og m_A þar af leiðandi upp, samsíða skábrettinu). **(b)** Hvert er minnsta gildið á μ þannig að kerfið haldist kyrrt?



Dæmi 6.26. Tveir kassar með massa $m_A = 5{,}0\,\mathrm{kg}$ og $m_B = 4{,}2\,\mathrm{kg}$ eru tengdir með reipi og standa á skábretti sem hallar um $\theta = 32°$ gráður miðað við lárétt. Kassarnir eru úr mismunandi efnum svo að núningsstuðullinn milli kassa A og skábrettisins er $\mu_A = 0{,}20$ en núningsstuðullinn milli kassa B og skábrettisins er μ_B. Ákvarðið hröðun kerfisins og togkraftinn í reipinu.



Gömul prófdæmi

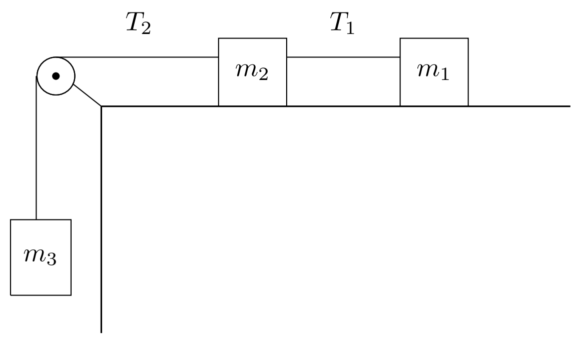
Dæmi 6.27. Tveir massar $m_1 = 1{,}0\,\text{kg}$ og $m_2 = 2{,}0\,\text{kg}$ liggja á núningslausum, láréttum fleti. Þeir eru festir saman með vír og eru togaðir af öðrum vír sem er festur við massann $m_3 = 3{,}0\,\text{kg}$ sem hangir undir massalausri, núningslausri trissu. Gera má ráð fyrir að vírarnir séu massalausir.

(a) Merkið inn á myndina kraftana sem verka á hvern massa fyrir sig.

(b) Skrifið niður kraftajöfnur fyrir alla massana.

(c) Finnið heildarhröðun kerfisins, a.

(d) Finnið togkraftinn, T_2, í vírnum sem tengir saman massana m_2 og m_3.



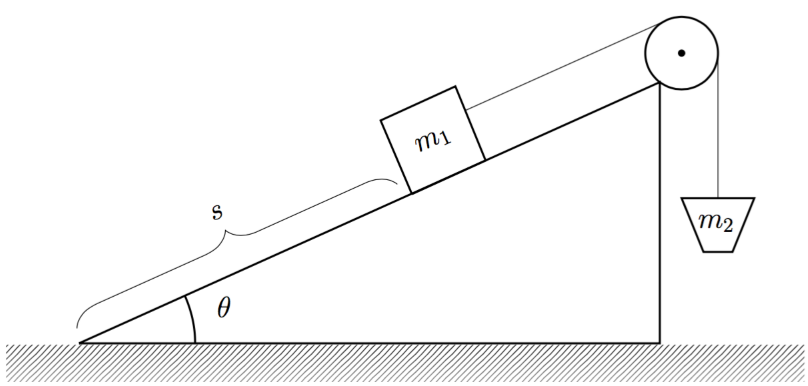
Dæmi 6.28. Kubbur með massa $m_1 = 10\,\text{kg}$ stendur kyrr á skábretti sem hallar um hornið $\theta = 27°$. Kubburinn er festur yfir trissu við vatnsfötu með massa $m_2 = 5{,}0\,\text{kg}$. Gerum ráð fyrir að hlutfallið $\frac{m_1}{m_2}$ og hornið θ séu þannig að kassinn byrji að renna úr kyrrstöðu. Núningsstuðullinn milli kubbsins með massa m_1 og skábrettisins er $\mu = 0.20$.

(a) Gerið kraftamynd og skrifið niður kraftajöfnur fyrir báða massana.

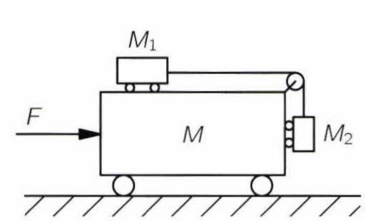
(b) Finnið hröðun kubbsins í stefnu samsíða skábrettinu.

(c) Finnið tímann t sem það tekur kubbinn að renna niður skábrettið um vegalengd s.

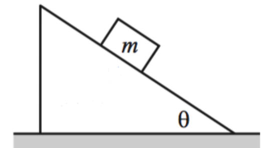
(d) Kubbnum með massa m_1 er aftur komið fyrir í upphafsstöðu og er haldið kyrrum meðan vatni er hellt ofan í fötuna. Hversu miklu vatni, m_{vatn}, þarf að hella ofan í fötuna svo að m_1 verði kyrr á skábrettinu eftir að honum er sleppt?



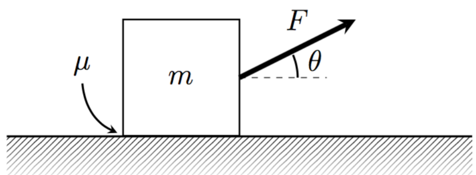
Dæmi 6.29. Finnið lárétta kraftinn F sem þarf til þess að M_1 og M_2 haldist kyrrir miðað við M. Hunsið áhrif núningskraftsins.



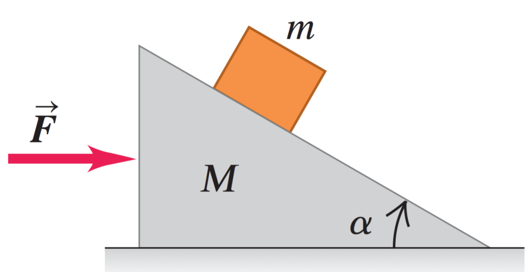
Dæmi 6.30. Kubbur með massa $m = 13\,\text{kg}$ ferðast upp skáplan með upphafshraðanum $v_0 = 6{,}0\,\text{m/s}$. Skáplanið hallar um $\theta = 25°$ miðað við lárétt. Kubburinn kemst í mestu hæð 0,80 m áður en hann stöðvast. Finnið hreyfinúningsstuðulinn, μ, milli kubbsins og skáplansins.



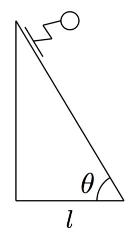
Dæmi 6.31. Bergljót er að færa stóra, þunga eldavél með massa $m = 120\,\text{kg}$ í íbúðinni sinni. Núningsstuðullinn milli eldavélarinnar og gólfsins er $\mu = 0,40$. Bergljót þarf að draga eldavélina með jöfnum hraða svo hún springi ekki. Finnið með hversu stórum krafti, F, Bergljót þarf að draga eldavélina svo hún springi ekki, ef hún togar undir gefnu horni $\theta = 31°$.



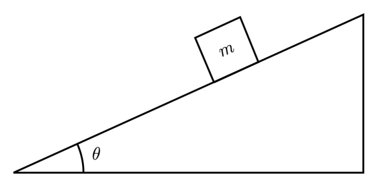
Dæmi 6.32. Skábretti með massa M, sem hallar um α gráður, stendur kyrrt á núningslausum láréttum fleti. Kassa með massa m er komið fyrir á skábrettinu, samtímis er láréttum krafti $\vec{F}$ beitt á skábrettið. Gerum ráð fyrir að enginn núningur verki milli kassans og skábrettisins. Hversu miklum krafti $\vec{F}$ þarf að beita til þess að kassinn með massa m haldist í fastri hæð?



Dæmi 6.33. Sigbert skíðagarpur rennir sér niður Kóngsbrekkuna í Bláfjöllum sem hefur hallann $\theta = 60°$. Núningsstuðullinn milli skíðanna og brekkunnar er $\mu = 0.25$. Skíðagarpurinn vegur $m = 60\,\text{kg}$. Hver verður lokahraði skíðagarpsins ef hann byrjar í toppi brekkunnar og lárétt lengd brekkunnar er $l = 15\,\text{m}$.

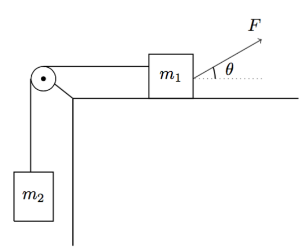


Dæmi 6.34. Skíðagarpur með massa 76 kg rennir sér niður Skálabrekkuna á Böggvisstaðafjalli. Brekkan er 310 m löng og hallar um $\theta = 22°$ miðað við lárétt. Núningsstuðullinn milli snjós og skíða er $\mu = 0{,}27$.



- **(a)** Gerið kraftamynd af skíðagarpinum og skrifið niður kraftajöfnu.
- **(b)** Hver er hröðun skíðagarpsins niður brekkuna?
- **(c)** Finnið hraða skíðagarpsins þegar hann er kominn niður brekkuna.
- **(d)** Hversu mikil orka tapaðist í núning á leiðinni niður brekkuna?

Dæmi 6.35. Kubbur með massa $m_1 = 5{,}0\,\text{kg}$ liggur á borði. Hann er festur með massalausu bandi við kubb með massa $m_2 = 3{,}0\,\text{kg}$ yfir núningslausa, massalausa trissu. Núningsstuðullinn milli borðs og kubbs er $\mu = 0{,}45$. Leifur ákveður að draga kubbinn á borðinu með krafti $F = 52\,\text{N}$ og horni $\theta = 22°$ miðað við lárétt.



- **(a)** Teiknið kraftamyndir og skrifið niður kraftajöfnur fyrir báða massana.
- **(b)** Finnið þverkraftinn sem verkar á kubbinn á borðinu.
- **(c)** Finnið hröðun kerfisins.
- **(d)** Finnið togkraftinn í bandinu.

Kafli 7

Tengsl krafta við varðveislulögmálin

7.1 Vinna

Skilgreining 7.1. Látum $\vec{F}$ vera fastann kraft sem verkar á hlut. Látum $\vec{d}$ tákna færslu hlutarins á meðan að krafturinn verkar á hlutinn. **Vinna** kraftsins, $\vec{F}$, undir færslunni $\vec{d}$ er þá táknuð með W_F og skilgreind þannig að:

$$W_F = \vec{F} \cdot \vec{d}.$$

Við athugum að $[W_F] = [F \cdot d] = \mathrm{Nm} = \mathrm{J}$ svo að vinna hefur sömu einingar og orka. Það er frekar óþægilegt til reikninga að þurfa að reikna innfeldi vigra út frá skilgreiningunni svo að við snúum okkur til stærðfræðinnar til þess að einfalda skilgreininguna á innfeldi. Við byrjum á því að athuga að:

Regla 7.2. Látum $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ vera vigra með stefnuhorn α og β. Látum γ vera hornið á milli vigranna $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Þá gildir að:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos(\gamma).$$

Þar sem $a = |\vec{a}|$ og $b = \left|\vec{b}\right|$ tákna lengdir vigranna, $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

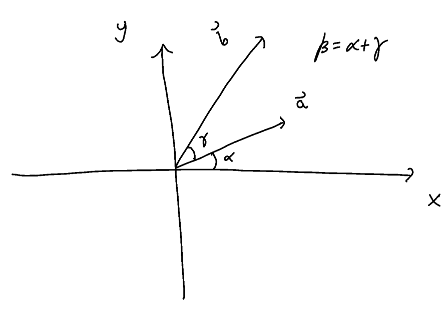
Sönnun: Lítum á mynd 7.1. Þar má sjá tvo vigra $\vec{a} = \binom{a_1}{a_2}$ og $\vec{b} = \binom{b_1}{b_2}$. Við getum umritað vigrana með stefnuhornum þeirra, α og $\beta = \alpha + \gamma$, með eftirfarandi hætti:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix},$$

þar sem við höfum skilgreint $a = |\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}$. Eins er

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix},$$

þar sem við höfum skilgreint $b = \left|\vec{b}\right| = \sqrt{(b_1)^2 + (b_2)^2}$.
Við athugum þá að innfeldi vigranna er gefið með:



Mynd 7.1: Tveir vigrar, $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ með stefnuhorn α og β hvor um sig.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 = ab\left(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\right) = ab\cos(\alpha - \beta) = ab\cos(\beta - \alpha) = ab\cos(\gamma).$$

Þar sem við höfum notað summureglu hornafalla, að $\cos(-x) = \cos(x)$ og loks að $\beta = \alpha + \gamma$ svo $\gamma = \beta - \alpha$. $\square$

Við höfum því sýnt að við getum umritað skilgreininguna á vinnu með eftirfarandi hætti:

Lögmál 7.3. Látum $\vec{F}$ vera fastann kraft sem verkar á hlut og látum $\vec{d}$ tákna færslu hlutarins á meðan að krafturinn verkar á hlutinn. Látum γ vera hornið á milli vigranna $\vec{F}$ og $\vec{d}$ þá höfum við að:

$$\vec{F} \cdot \vec{d} = Fd \cos \gamma,$$

þar sem $F = \left|\vec{F}\right|$ og $d = \left|\vec{d}\right|$.

Við gætum velt fyrir okkur hvað breytist ef að krafturinn $\vec{F}$ er ekki fastur. Er hægt að skilgreina vinnu fyrir krafta sem eru ekki fastir? Það kemur í ljós að það er vissulega hægt en það þarfnast stærðfræðigreiningu (diffrun og tegrun) svo við sleppum því í bili. Niðurstaðan er hinsvegar eftirfarandi:

Lögmál 7.4. Látum $\vec{F}$ vera kraft sem breytist með staðsetningu hlutarins, $\vec{s}$. Þá er vinna kraftsins, $\vec{F}$, undir færslunni $\vec{d}$, W_F, jöfn flatarmálinu undir krafta-stöðu grafinu.

7.2 Geymnir og ógeymnir kraftar

Til þess að geta talað formlega um orku þá þurfum við að flokka kraftana sem að við höfum kynnst. Við höfum áður séð að sumir kraftar eins og t.d. þyngdarkrafturinn varðveita orku á meðan aðrir kraftar eins og t.d. núningskrafturinn tapa orku. Við viljum skilja hvers vegna sumir kraftar varðveita orku en aðrir ekki.

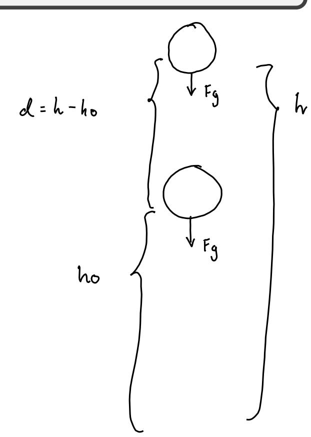
Skilgreining 7.5. Látum A og B tákna tvær staðsetningar. Við segjum að kraftur, F, sé **geyminn** ef að heildarvinnan, W_F, við það að flytja hlut frá A til B og aftur til baka í A er núll.

Skilgreining 7.6. Ef krafturinn F er ekki geyminn þá segjum við að hann sé **ógeyminn**.

Við hugsum um þetta þannig að kraftar sem eru geymnir, eins og t.d. þyngdarkrafturinn og gormkrafturinn, varðveita orku en kraftar sem eru ógeymnir eins og t.d. núningskrafturinn og loftmótsstaða, tapa orku.

Lögmál 7.7. Þyngdarkrafturinn er geyminn.

Útleiðsla: Hugsum okkur að við köstum bolta upp í loftið. Við byrjum á því að skoða vinnu þyngdarkraftsins frá því að fara úr hæð h_0 upp í hæð h, en þá er færsla boltans $d = h - h_0$ í stefnuna upp svo að honrið á milli færslunnar og þyngdarkraftsins er $\gamma = 180°$. Við fáum því að vinna þyngdarkraftsins á leiðinni upp er gefin með:



$$W_g = F_g d \cos \gamma = mgd \cos(180°) = -mgd.$$

Athugum síðan að þegar boltinn fellur úr hæð h niður aftur í hæð h_0 þá eru þyngdarkrafturinn og færslan í sömu stefnu svo að þá er $\gamma = 0°$ en þar með verður vinna þyngdarkraftsins á leiðini niður gefin með:

$$W_g = F_g d \cos(\gamma) = mgd \cos(0°) = mgd.$$

En þar með er heildarvinna þyngdarkraftsins frá því að fara úr hæð h_0 upp í hæð h og aftur niður í h_0 gefin með:

$$W_{\text{heild}} = -mgd + mgd = 0.$$

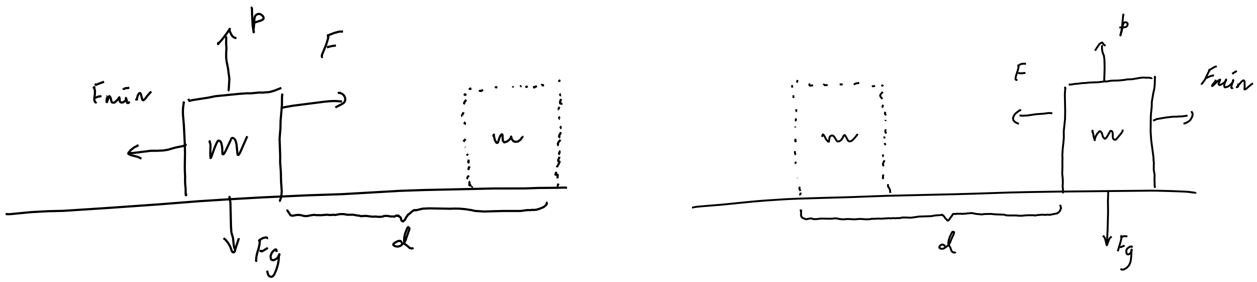
□

Lögmál 7.8. Núningskrafturinn er ógeyminn.

Útleiðsla: Hugsum okkur að við séum að flytja kassa með massa m um vegalengd d meðfram gólfi og látum núningsstuðulinn milli gólfsins og kassans vera μ. Þá er núningskrafturinn sem verkar á kassann gefinn með $F_{\text{nún}} = \mu mg$ í stefnuna gagnstætt hreyfingu kassans. Við höfum því að vinnan sem við vinnum við það að flytja kassann er gefin með:

$$W_\mu = F_{\text{nún}} d \cos\gamma = \mu mgd \cos(180°) = -\mu mgd$$

Þar sem að hornið á milli $\vec{F}_{\text{nún}}$ og $\vec{d}$ er 180°.



(a) Kraftamynd af því að ýta kassa til hægri.

(b) Kraftamynd af því að ýta kassa til vinstri.

Mynd 7.2: Hér sést hvernig stefna núningskraftsins breytist eftir því í hvaða átt við ýtum kassanum.

Hugsum okkur nú að við ýtum kassanum til baka á staðinn þar sem hann var upphaflega staddur. Þá er núningskrafturinn aftur $F_{\text{nún}} = \mu mg$ en núna í gagnstæða stefnu miðað við áður og færsla hlutarins breytir líka um stefnu en vegalengdin er sú sama, d. Við ályktum því að vinna núningskraftsins við það að flytja kassann til baka er gefin með:

$$W_\mu = F_{\text{nún}} d \cos\gamma = \mu mgd \cos(180°) = -\mu mgd$$

Þar sem að hornið á milli $\vec{F}_{\text{nún}}$ og $\vec{d}$ er enn þá 180°. Við ályktum að heildarvinna núningskraftsins við það að flytja kassann svona fram og til baka er gefin með:

$$W_{\text{heild}} = -\mu mgd - \mu mgd = -2\mu mgd \neq 0.$$

En þar með höfum við sýnt að núningskrafturinn er ekki geyminn og þar með ógeyminn. □

Lögmál 7.9. Gormkrafturinn er geyminn.

Útleiðsla: Þetta þarfnast stærðfræðigreiningar (diffrun og tegrun) og því sleppum við þessu í bili.

7.3 Stöðuorka

Við erum þá loksins tilbúin til þess að skilgreina stöðuorku út frá vinnu geymins krafts:

Skilgreining 7.10. Látum $\vec{F}$ vera geyminn kraft. Látum A og B vera tvær staðsetningar. Látum W_F tákna vinnu kraftsins $\vec{F}$ frá A til B. Við skilgreinum þá stöðuorku kraftsins, U_F, miðað við punktinn A sem stærðina:

$$U_F = -W_F.$$

Takið eftir að stöðuorkan er miðuð við einhvern viðmiðunarpunkt. Fyrir fasta krafta (eins og t.d. þyngdarkraftinn) skiptir litlu máli hvar við veljum viðmiðunarpunktinn. Fyrir þyngdarkraftinn þá veljum við gjarnan jörðina sem núllpunkt hæðarinnar en við getum allt eins valið núllpunktinn uppi á Everesttindi eða ofaní Maríanadjúpálnum. Hinsvegar, fyrir krafta sem eru ekki fastir (einst og t.d. gormkrafturinn) er þægilegast að velja viðmiðunarpunkt þar sem að krafturinn er núll.

Lögmál 7.11. Stöðuorka þyngdarkraftsins, F_g, er gefin með:

$$U_g = mgh,$$

þar sem að h táknar hæðina fyrir ofan viðmiðunarpunktinn.

Útleiðsla: Við athugum að $\vec{F}_g$ og $\vec{d}$ eru gagnstefna svo við höfum að vinna þyngdarkraftsins er gefin með $W_g = -mgh$ en þar með er stöðuorkan gefin með $U_g = -W_g = mgh$.

Lögmál 7.12. Stöðuorka gormkraftsins, F_k, er gefin með

$$U_k = \frac{1}{2}kx^2,$$

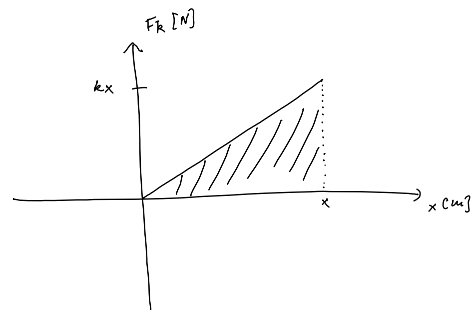
þar sem k er gormstuðullinn og x er fjarlægðin frá jafnvægisstöðunni (sem er viðmiðunarpunkturinn).

Útleiðsla: Við nýtum okkur lögmál 7.4 og skoðum graf af gormkraftinum $F_k = kx$ sem fall af x. Við sjáum þá að flatarmálið undir ferlinum er gefið með:

$$W_k = \frac{1}{2}(kx)x = \frac{1}{2}kx^2.$$

En við vitum að gormkrafturinn og færslan eru gagnstefna svo að við höfum að $W_k = -\frac{1}{2}kx^2$ (Grafið sem við teiknuðum hér til hægri ætti í rauninni að skipta út fyrir graf af $F_k = -kx$ sem fall af x). En þar með getum við ályktað að stöðuorka gormkraftsins miðað við jafnvægisstöðuna er gefin með:

$$U_k = -W_k = \frac{1}{2}kx^2.$$



Mynd 7.3: $F_k = kx$ sem fall af x.

7.4 Orkuvarðveisla

Lögmál 7.13. (Vinnulögmálið) Látum E_1 tákna heildarorku hlutar við tíma t_1 og látum E_2 tákna heildarorku hlutar við tíma $t_2 > t_1$. Látum W tákna vinnu ógeyminna krafta á þessum tíma. Þá er:

$$E_1 + W = E_2.$$

Útleiðsla: Við sjáum nú að ef á hlut verkar kraftur F_{heild} þá er vinnan:

$$W_{\text{heild}} = \vec{F}_{\text{heild}} \cdot \Delta\vec{s} = m\vec{a} \cdot \Delta\vec{s} = m\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = \Delta K.$$

Við skulum nú skipta vinnu kraftanna sem verka á hlutinn upp í vinnu geyminna krafta, W_{g} og ógeyminna krafta W_μ. Þá er $\Delta K = W_{\text{heild}} = W_g + W_\mu$ og við höfum að:

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = \Delta K - W_g = \Delta K - (W_g + W_\mu - W_\mu) = \Delta K - W_{\text{heild}} + W_\mu = W_\mu$$

En þar með höfum við einmitt sýnt að $E_1 + W_\mu = E_2$. □

Lögmál 7.14. Ef engir ógeymnir kraftar verka á hlut þá er heildarorka hlutarins varðveitt.

7.5 Skriðþungavarðveisla

Við höfum enn ekki talað um tengsl skriðþunga, $p = mv$, við krafta, $F = ma$. Það er nefnilega til önnur leið til þess að skilgreina kraft. Við athugum að $a = \frac{dv}{dt}$ svo við höfum að:

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{dp}{dt}.$$

En þetta segir okkur að kraftur er það sama og breyting í skriðþunga, dp, á tíma dt. Við sjáum því að:

Lögmál 7.15. Ef enginn heildarkraftur verkar á hlut þá er skriðþungi hlutarins varðveittur.

Útleiðsla: Við sjáum að ef $F = 0$ þá er $\frac{dp}{dt} = 0$ en það þýðir að skriðþungi hlutarins er ekki að breytast með tíma svo skriðþunginn er varðveittur. □

Lögmál 7.16. Lítum á hlut með massa m_1 og hraða v_1 og hlut með massa m_2 og hraða v_2 sem lenda í árekstri. Þá er heildarskriðþunginn, $p_{\text{heild}} = m_1 v_1 + m_2 v_2$ varðveittur í árekstrum.

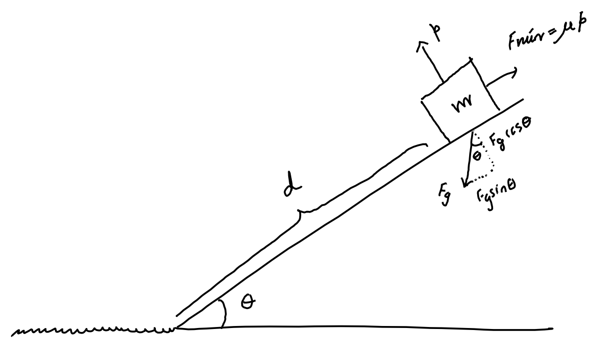
Útleiðsla: Í árekstrinum þá er eini krafturinn sem verkar á milli hlutanna, þriðja lögmáls gagnkrafturinn á milli hlutanna svo við höfum að:

$$F_1 = -F_2 \implies \frac{dp_1}{dt} = -\frac{dp_2}{dt} \implies \frac{d}{dt}(p_1 + p_2) = 0 \implies \underbrace{p_1 + p_2}_{p_{\text{heild}}} = \text{fasti}.$$

□

7.6 Sýnidæmi

Lítum á kassa með massa m sem byrjar í hæð h á skábretti sem hallar um horn θ miðað við lárétt. Núningsstuðullinn milli skábrettisins og kassans er μ_s. Eftir að kassinn hefur runnið niður tekur við hrjúft yfirborð þar sem núningsstuðullinn milli kassans og yfirborðsins er μ_h. Við viljum ákvarða vegalengdina x sem kassinn mun renna meðfram hrjúfa yfirborðinu áður en hann stöðvast. Við byrjum því á því að athuga að vegalengdin d sem að kassinn mun renna niður skábrettið er gefin með $d = \frac{h}{\sin\theta}$. Við höfum síðan eftirfarandi kraftajöfnu fyrir kassann þegar hann er í efstu hæð:



Mynd 7.4: Hlutur að renna niður skábretti.

$$\begin{pmatrix} ma \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg\sin\theta - F_{\text{nún}} \\ \text{Þ} - mg\cos\theta \end{pmatrix}$$

Sem gefur því að $F_{\text{nún}} = \mu_s \text{Þ} = \mu_s mg\cos\theta$. Vinna núningskraftsins á leiðnni niður skábrettið er því gefin með: $W_{\mu_s} = -\mu_s mgd\cos\theta$ þar sem að $\vec{d}$ og $\vec{F}_{\text{nún}}$ eru gagnstefna. Við höfum samkvæmt vinnulögmálinu að:

$$mgh - \mu_s mgd\cos\theta = \frac{1}{2}mv^2 \implies v = \sqrt{2(gh - \mu_s gd\cos\theta)} = \sqrt{2gh(1 - \mu_s\cot\theta)}$$

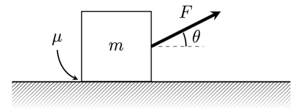
Þar sem v er hraði kassans þegar hann kemur niður skábrettið. En síðan vitum við að þar tekur við nýtt yfirborð þar sem að þverkrafturinn er $\text{Þ} = mg$ og núningskrafturinn verður $F_{\text{nún}} = \mu_h \text{Þ} = \mu_h mg$ og vinna núningskraftsins þar til hann stöðvast er gefin með $W_{\mu_h} = -\mu_h mgx$ svo við höfum að:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \mu_h mgx = 0 \implies x = \frac{1}{\mu_h}(1 - \mu_s\cot\theta)\,h.$$

7.7 Dæmi

Vinna

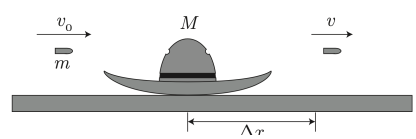
Dæmi 7.1. Bergljót er að færa stóra, þunga eldavél með massa $m = 120\,\text{kg}$ í íbúðinni sinni. Núningsstuðullinn milli eldavélarinnar og gólfsins er $\mu = 0,40$. Nauðsynlegt er að draga eldavélina með jöfnum hraða svo hún springi ekki. Bergljót dregur eldavélina með krafti F undir horninu $\theta = 31°$. Hversu mikla vinnu vinnur Bergljót við það að flytja eldavélina um 8,4 m að því gefnu að eldavélin springi ekki?



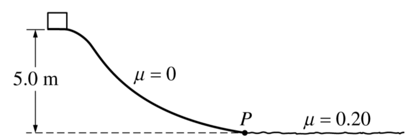
Dæmi 7.2. Píanó sem hefur massa $m = 380\,\text{kg}$ rennur niður 2,9 m langa brekku sem hallar um $\theta = 25°$ miðað við lárétt. Núningsstuðullinn milli skábrettisins og píanósins er $\mu = 0.18$. Sigbert sterkbygði heldur í við píanóið með því að ýta á það með krafti samsíða skábrettinu. Hann passar að píanóið renni niður með jöfnum hraða.

(a) Hver er stærð kraftsins sem að Sigbert ýtir með á píanóið?
(b) Hversu mikla vinnu vinnur Sigbert á píanóið á leiðinni niður brekkuna?
(c) Hversu mikla vinnu vinnur þyngdarkrafturinn á píanóið á leiðinni niður brekkuna?
(d) Hversu mikla vinnu vinnur núningskrafturinn á píanóið á leiðinni niður brekkuna?
(e) Hversu mikla vinnu vinnur þverkrafturinn á píanóið á leiðinni niður brekkuna?
(f) Hver er vinna heildarkraftsins sem verkar á píanóið á leiðinni niður brekkuna?

Dæmi 7.3. Kúrekahattur með massa $M = 130\,\text{g}$ hvílir á borði. Núningsstuðullinn milli hattsins og borðsins er $\mu = 0.25$. Byssukúlu með massa $m = 5\,\text{g}$ og láréttan hraða $v_0 = 550\,\text{m/s}$ er skotið í gegnum kúrekahattinn þannig að hann rennur $\Delta x = 1{,}25\,\text{m}$ eftir borðinu. Hver er hraði byssukúlunnar, v, eftir að hún kemur út úr hattinum?



Dæmi 7.4. Kubbur með massa 3,0 kg rennur úr kyrrstöðu niður brekku með hverfandi núning úr hæðinni 5,0 m. Eftir að kubburinn hefur runnið framhjá punkti P tekur við hrjúft, lárétt yfirborð þar sem núningsstuðullinn milli kubbsins og yfirborðsins er 0.20. Hversu langt rennur kubburinn eftir lárétta yfirborðinu áður en hann stöðvast?



Dæmi 7.5. Hugsum okkur að við séum að ýta bíl með massa $m = 950\,\text{kg}$ upp 710 m langa brekku sem hallar um $\theta = 12°$ miðað við lárétt. Núningsstuðullinn milli hjólbarðanna og malbiksins er $\mu = 0.05$. Hver er minnsta vinnan sem við þurfum að vinna til að ýta bílnum upp brekkuna?

Dæmi 7.6. Tesla Model S sportbíll með massa $m_T = 2250\,\text{kg}$ skellur harkalega aftan í kyrrstæðri, lítilli rútu með massa $m_R = 3550\,\text{kg}$ sem stöðvaði á rauðu ljósi. Bílarnir festast saman í árekstrinum og renna 6,6 m áður en þeir stöðvast. Lalli lögreglumaður er fjölkunnugur og rifjar upp eðlisfræðina sem hann lærði í menntaskóla. Hann ákveður að reikna vinnuna sem tapaðist í núning til þess að finna hraða Teslunnar fyrir áreksturinn. Hann veit að núningsstuðullinn milli bíldekkja og malbiks er $\mu = 0.80$. Hver var hraði Teslunnar fyrir áreksturinn?

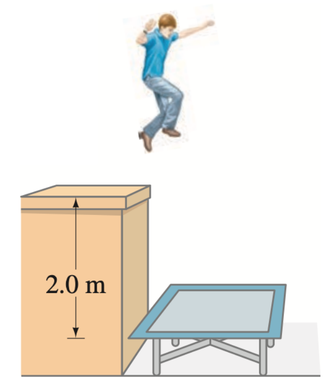
Dæmi 7.7. Byssukúlu með massa $m = 5{,}0\,\text{g}$ er skotið beint upp með hraðanum 500 m/s. Byssukúlan lendir í trjágrein, fer í gegnum hana og kemur út með hraðanum 100 m/s. Efri brún trjágreinarinnar er í 15 m hæð. Trjágreinin er 20 cm þykk þar sem kúlan fór í gegn. Hversu mikla vinnu framkvæmdi trjágreinin á byssukúlunni? Hver var meðalkraftur trjágreinarinnar á byssukúluna?

Dæmi 7.8. Bíll með massa $m = 2000\,\text{kg}$ ekur á hraðanum 25 m/s eftir láréttum vegi. Skyndilega verður ökumaðurinn var við kött á veginum og nauðhemlar til að reyna að bjarga kettinum. Bíllinn stöðvast eftir 60 m. Metið vinnu núningskraftsins og núningsstuðulinn milli dekkjanna og vegarins.

Dæmi 7.9. Skíðakappi með massa 80 kg stendur efst í Kóngsgili í Bláfjöllum. Hann lætur sig renna af stað og fer beint í brunastellingu. Þegar hann kemur niður á jafnsléttu 200 m neðar er hraði hans 120 km/klst. Ef engir núningskraftar hefðu verkað á skíðakappann, hver ætti þá hraði hans að hafa verið þegar hann kæmi niður? Hver er heildarvinna ógeyminna krafta á skíðakappann fyrst hraði hans var aðeins 120 km/klst þegar hann kom niður?

Gormar

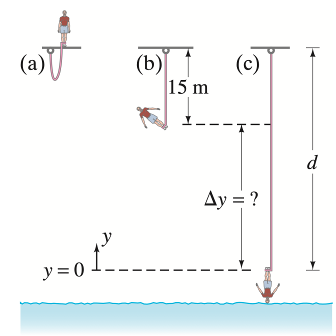
Dæmi 7.10. Kiddi kærulausi hefur massann $m = 62\,\mathrm{kg}$. Hann hoppar fram af bílskúrsþakinu heima hjá sér með lóðréttum upphafshraða $v_0 = 4{,}5\,\mathrm{m/s}$ og lendir á trampólíni 2,0 m fyrir neðan.



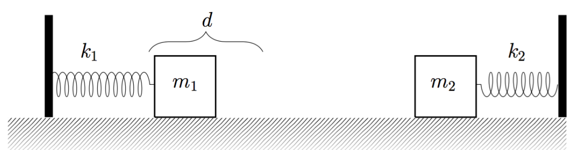
(a) Hver er hraði hans rétt áður en hann lendir á trampólíninu?

(b) Gera má þá nálgun að trampólínið hegði sér eins og gormur með gormstuðul $k = 5{,}8 \cdot 10^4\,\mathrm{N/m}$. Hversu langt mun trampólínsdúkurinn síga niður?

Dæmi 7.11. Friðrik fífldjarfi (með massa $m = 75\,\mathrm{kg}$) fer í teygjustökk fram af brú. Óstrekkt lengd teygjunnar er $\ell = 15\,\mathrm{m}$ svo hann dettur í 15 m áður en að það byrjar að togna á teygjunni. Lýsa má strekkingu teygjunnar eins og gormi með gormstuðul $k = 55\,\mathrm{N/m}$. Ákvarðið fallvegalengdina, d, sem Friðrik fellur þar til hann staðnæmist um stundarkorn í lægstu stöðu og áður en hann skýst síðan aftur upp. Hunsið loftmótsstöðu og massa teygjunnar.



Dæmi 7.12. Kubbur með massa $m_1 = 4{,}0\,\mathrm{kg}$ er festur í jafnvægisstöðu við gorm með gormstuðul $k_1 = 20\,\mathrm{N/m}$. Gormurinn er síðan þjappaður saman um lengdina $d = 5{,}2\,\mathrm{cm}$. Kubburinn er þar losaður frá gorminum og síðan er honum sleppt. Hann rennur þá eftir núningslausa fletinum sem hann hvílir á þar til hann rekst á kyrrstæðan kubb með massa $m_2 = 3{,}0\,\mathrm{kg}$ sem er festur við gorm með gormstuðul $k_2 = 28\,\mathrm{N/m}$. Kubbarnir festast saman við áreksturinn.



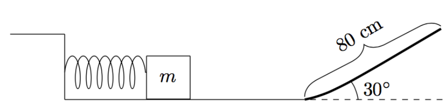
(a) Finnið hraða kubbsins með massa m_1 rétt fyrir áreksturinn.

(b) Finnið hraða kubbanna rétt eftir áreksturinn með því að nota skriðþungavarðveislu.

(c) Finnið mestu þjöppun gormsins eftir áreksturinn.

(d) Finnið orkuna sem tapast við áreksturinn.

Dæmi 7.13. Kassa með massa $m = 2{,}5\,\mathrm{kg}$ er sleppt efst á núningslausu skábretti sem hallar um $\theta = 30°$ miðað við lárétt. Þar á eftir rennur kassinn meðfram núningslausu gólfi þar til hann þrýstir saman gormi sem fastur er við vegg. Hver er mesta þjöppun gormsins ef kraftstuðull gormsins er $k = 400\,\mathrm{N/m}$?

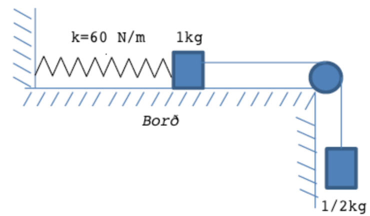


Dæmi 7.14. Kassi með massa $m = 0{,}1\,\mathrm{kg}$ situr á núningslausri braut. Honum er ýtt upp við gorm með gormstuðul $k = 1{,}8\,\mathrm{N/m}$ þ.a. gormurinn sé 50 cm frá jafnvægisstöðu. Síðan er kassanum sleppt og hann rennur eftir 80 cm löngum rampi sem myndar 30° horn við lárétt. Hve langt eftir rampinum ferðast kassinn áður en hann stoppar?

Dæmi 7.15. Gormur með gormstuðul $k = 600\,\mathrm{N/m}$ er festur í annan endann við vegg. Við hinn endann er kassi með massa $m = 6{,}8\,\mathrm{kg}$ festur. Kassinn stendur á láréttu borði og núningsstuðulinn milli borðsins og kubbsins er μ. Gorminum er nú þjappað saman um $x = 18\,\mathrm{cm}$ frá jafnvægisstöðunni sinni og sleppt. Þegar gormurinn er kominn aftur í jafnvægisstöðu sína í $x = 0$, er hraði massans $v = 1{,}3\,\mathrm{m/s}$. Reiknið vinnu núningskraftsins og núningsstuðulinn milli borðs og kubbs.

Dæmi 7.16. Fær bogaskytta dregur bogastrenginn aftur um 50 cm með 150 N krafti og sleppir ör með massa 100 g af stað. Gera má ráð fyrir að krafturinn sem boginn verkar með á örina hegði sér eins og gormur með gormstuðul k. Hver er hraði örvarinnar um leið og hún losnar af strengnum?

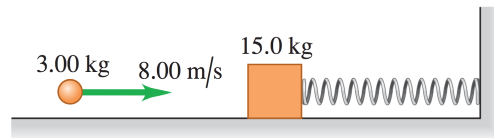
Dæmi 7.17. Lóð með massa 1,00 kg er fest í gorm með gormstuðul $k = 60\,\mathrm{N/m}$. Lóðið er svo tengt, með massalitlu bandi yfir núningslausa trissu í 0,50 kg massa sem hangir í bandinu. Gerum ráð fyrir að borðið sé núningslaust til einföldunar.



(a) Hver er strekking gormsins, x, frá jafnvægisstöðunni?

(b) Ef massalitla bandið væri brennt þannig að 0,50 kg kubburinn myndi hætta að toga í gorminn, hver yrði þá mesti hraði 1,00 kg kubbsins?

Dæmi 7.18. Kyrrstæður kubbur með massa $M = 15{,}0\,\mathrm{kg}$ stendur kyrr á núningslausu, láréttu borði. Kubburinn er festur við gorm, með gormstuðul $k = 525\,\mathrm{N/m}$. Steinn með massa $m = 3{,}00\,\mathrm{kg}$ og láréttan hraða $v_1 = 8{,}00\,\mathrm{m/s}$ til hægri, lendir á kubbnum. Steinninn endurkastast með hraðanum $v_2 = 2{,}00\,\mathrm{m/s}$ til vinstri.



(a) Notið skriðþungavarðveislu til þess að finna hraða kubbsins rétt eftir áreksturinn.

(b) Notið orkuvarðveislu til þess að finna mestu þjöppun gormsins eftir áreksturinn.

Dæmi 7.19. Duge brúin nær yfir kínverska fljótið Beipan. Brúin er sú hæsta í heiminum og hefur hæðina $h = 565\,\mathrm{m}$ yfir vatnsborðinu. Orðrómur er um að hinn frægi frumkvöðull teygjustökksins, A.J. Hackett, sem hefur massa $m = 75\,\mathrm{kg}$, ætli að fara í teygjustökk fram af brúnni og freista þess að rétt svo snerta vatnsborðið. Gera má ráð fyrir að teygjan sé massalaus, af lengd $\ell = 120\,\mathrm{m}$, og hegði sér líkt og gormur. Ekki þarf að taka tillit til hæðar Hacketts.

(a) Finnið gormstuðul gormsins með því að nota orkuvarðveislu.

(b) Hvaða hröðun mun Hackett finna fyrir þegar hann snertir vatnsborðið?

Svör

(1) $W_F = 3200\,\mathrm{J}$. **(2)** $F = 970\,\mathrm{N}$, $W_F = -2800\,\mathrm{J}$, $W_g = 4600\,\mathrm{J}$, $W_\mu = -1800\,\mathrm{J}$, $W_Þ = 0$, $W_{\mathrm{heild}} = 0$.

(3) $v = 486\,\mathrm{m/s}$. **(4)** $x = 25\,\mathrm{m}$. **(5)** $W_F \geq 1700\,\mathrm{kJ}$. **(6)** $v_0 = 95\,\mathrm{km/klst}$. **(7)** $W = -600\,\mathrm{J}$, $F = 3000\,\mathrm{N}$.

(8) $W_\mu = -630\,\mathrm{J}$, $\mu = 0.53$. **(9)** $v = 63\,\mathrm{m/s}$, $W_\mu = -113\,\mathrm{kJ}$. **(10)** $v = 7{,}7\,\mathrm{m/s}$, $d = 0{,}26\,\mathrm{m}$. **(11)** $d = 53\,\mathrm{m}$.

(12) $v_0 = 0{,}12\,\mathrm{m/s}$, $v = 0{,}069\,\mathrm{m/s}$, $x = 3{,}3\,\mathrm{cm}$, $\Delta K = -12\,\mathrm{mJ}$. **(13)** $x = 22\,\mathrm{cm}$. **(14)** $d = 46\,\mathrm{cm}$.

(15) $W_\mu = -4{,}0\,\mathrm{J}$, $\mu = 0.35$. **(16)** $v = 27\,\mathrm{m/s}$. **(17)** $x = 82\,\mathrm{mm}$, $v = 0{,}64\,\mathrm{m/s}$. **(18)** $u = 2{,}0\,\mathrm{m/s}$, $x = 34\,\mathrm{cm}$. **(19)** $a_{\max} = 15{,}1\,\mathrm{m/s^2}$.

Kafli 8

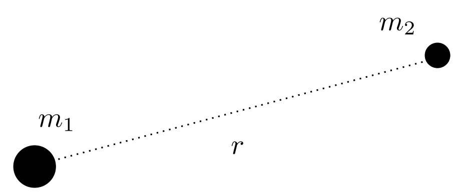
Þyngdarlögmálið

8.1 Þyngdarlögmál Newtons

Skilgreining 8.1. Lítum á tvo massa, m_1 og m_2 sem eru í fjarlægð r frá hvor öðrum. Þá verkar á milli þeirra aðdráttarkraftur, F_G, sem kallast **þyngdarlögmálskrafturinn** og er gefinn með:

$$F_G = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

þar sem $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^3/(\mathrm{kg\,s}^2)$ er fasti sem nefnist **þyngdarlögmálsfastinn**.



Mynd 8.1: Tveir massar, m_1 og m_2 í fjarlægð r frá hvor öðrum.

Þetta er útvíkkun á þyngdarkraftinum, F_g, sem við höfum þegar kynnst. Þannig við vitum að á yfirborði jarðarinnar þá þurfa þyngdarkrafturinn og þyngdarlögmálskrafturinn að vera sammála, þ.e. við höfum að $F_g = F_G$ á yfirborði jarðinnar en það þýðir að ef massi okkar er m, massi jarðarinnar er M og geisli jarðarinnar er R, þá gildir að:

$$F_g = F_G \implies mg = \frac{GmM}{R^2} \implies g = \frac{GM}{R^2}$$

Lögmál 8.2. Þyngdarlögmálskrafturinn er geyminn. Stöðuorka massans m í fjarlægð r_0 frá M miðað við viðmiðunarpunktinn $r = +\infty$ er gefin með:

$$U_G = -\frac{GMm}{r_0}.$$

Útleiðsla: Við setjum viðmiðunarpunkt stöðuorkunnar í $r = \infty$. Þar er þyngdarlögmálskrafturinn sem verkar á hlutinn gefinn með $F_G = 0$. Við viljum síðan reikna vinnuna sem að hlutur þarf að vinna til þess að fara frá $r = \infty$ í $r = r_0$. Við fáum því:

$$U_G = -W_G = -\int_{+\infty}^{r_0} -\frac{GMm}{r^2}dr = -\left[\frac{GMm}{r}\right]_{+\infty}^{r_0} = -\frac{GMm}{r_0}.$$

$\square$

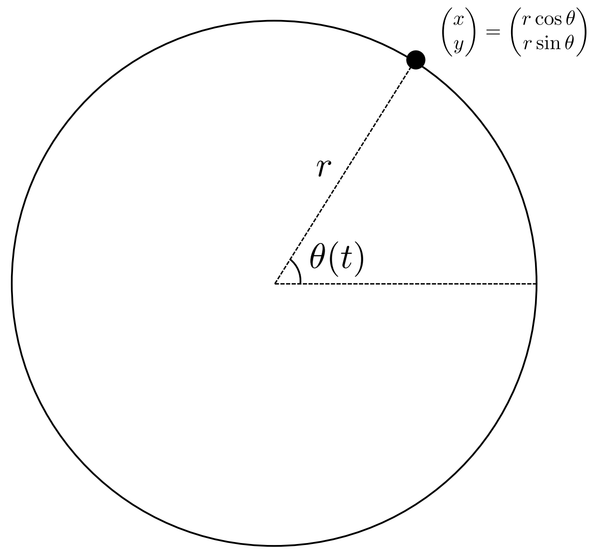
8.2 Hringhreyfing

Skoðum núna hlut sem er á hringhreyfingu með geisla r og hraða v. Við getum þá skrifað staðsetningu hlutarins sem fall af tíma sem:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta(t) \\ r\sin\theta(t) \end{pmatrix},$$

þar sem að $r = |\vec{r}(t)|$ er geisli hringsins og $\theta(t)$ er hornið sem lýsir staðsetningu hlutarins sem fall af tíma t. Jörðin fer einn hring á einu ári svo að við vitum að heildarvegalengdin sem hún þarf að ferðast á einu ári, $T = 1\,\text{ár}$, er gefin með $s = 2\pi r$, þar sem $r = 1\,\text{AU} = 1{,}5\cdot 10^{11}\,\text{m}$, er vegalengdin milli jarðarinnar og sólarinnar. Við vitum þá að hraðinn sem að jörðin þarf að ferðast með er gefin með:

$$v = \frac{s}{T} = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi\cdot 1{,}5\cdot 10^{11}\,\text{m}}{365\cdot 24\cdot 60^2} = 30\,\text{km/s}.$$



Mynd 8.2: Hlutur á hringhreyfingu.

Við viljum skilja hvernig að hornið breytist sem fall af tíma t. Við athugum að ef t táknar tímann sem hefur liðið frá því að árið byrjaði þá er $\frac{t}{T}$ hlutfallið sem að við höfum farið meðfram hringnum það árið. En við vitum að hringurinn er 360° eða í radíönum 2π og því höfum við að:

$$\frac{t}{T} = \frac{\theta}{2\pi} \implies \theta = \frac{2\pi t}{T}$$

En við vitum að $v = \frac{2\pi r}{T}$ svo $T = \frac{2\pi r}{v}$ sem gefur okkur því að:

$$\theta = \frac{2\pi t}{T} = \frac{2\pi t}{\frac{2\pi r}{v}} = \frac{v}{r}t.$$

Á þessum tímapunkti er eðlilegt að kynna stærð sem kallast hornhraði og er táknuð með ω og er skilgreind þannig að

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}.$$

Til samanburðar er hraði skilgreindur þannig að $v = \frac{ds}{dt}$. Fyrir hringhreyfingu þá er hornhraði hlutarins fastur og við höfum einmitt að hornhraði jarðarinnar á hringferð sinni um sólina er gefinn með:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{(365\cdot 24\cdot 60^2\,\text{s})} = 2{,}0\cdot 10^{-7}\,\text{rad/s}$$

Þar sem að á einu ári þá fer hornið θ frá því að vera $0\,\text{rad}$ í það að vera $2\pi\text{rad}$. Eins og sjá má hér að ofan eru SI-einingar hornhraða gefnar með rad/s. En þar sem að hornhraðinn er fastur þá gildir að:

$$\omega = \frac{\theta}{t} \implies \theta = \omega t$$

En við höfum áður sýnt að:

$$\theta = \frac{v}{r}t$$

Svo við ályktum að fyrir hlut á hringhreyfingu gildir að hraði hlutarins og hornhraðinn tengjast með eftirfarandi hætti:

$$\omega = \frac{v}{r}$$

Þetta er oftast skrifað línulega sem:

$$v = r\omega.$$

Fyrir jörðina höfum við sýnt að $v = 30\,\mathrm{km/s}$. En við höfum einmitt að:

$$\omega r = 2{,}0 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{rad/s} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m} = 30\,\mathrm{km/s},$$

eins og við var að búast. Við höfum semsagt sýnt að stöðuvigur hlutar á hringhreyfingu er gefinn með:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

og við vitum að hraði hlutarins er hornréttur á stöðuvigurinn, réttara sagt er hann þvervigur stöðuvigursins (sem hefur aðra lengd). En það þýðir að:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -v\sin\theta \\ v\cos\theta \end{pmatrix}$$

En við vitum að $v = \frac{2\pi r}{T} = \omega r$ svo við höfum að:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -\omega r\sin\theta \\ \omega r\cos\theta \end{pmatrix} = \omega\hat{\vec{r}}.$$

Þar sem að $\hat{\vec{r}}$ táknar þvervigur vigursins $\vec{r}$, þ.e.

$$\hat{\vec{r}} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Við sjáum þá að lengd vigursins breytist bara þannig að hún margfaldast með ω. Við vitum að lokum að hröðun hlutarins er inn að miðju hringsins (þar sem að eini krafturinn sem verkar á jörðina er þyngdarlögmálskrafturinn milli jarðarinnar og sólarinnar). En þar með fáum við að lokum að:

$$\vec{a} = \omega^2\hat{\hat{\vec{r}}} = -\omega^2\vec{r}.$$

Þar sem að við sjáum að $\vec{a}$ og $\vec{r}$ eru gagnstefna. En þar með höfum við að stærð vigursins $\vec{a}$ er gefin með:

$$a = |\vec{a}| = \omega^2 r = \left(\frac{v}{r}\right)^2 r = \frac{v^2}{r}.$$

Við höfum því sýnt að hröðun hlutar á hringhreyfingu er inn að miðju hringsins og er gefin með $a = \frac{v^2}{r}$. Þessi hröðun kallast miðsóknarhröðun hlutarins og við köllum kraftinn sem að veldur hröðuninni miðsóknarkraft. En við getum líka skrifað hröðunina á annan veg með því að rifja upp að $v = \frac{2\pi r}{T}$ svo við höfum að:

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Við getum einnig leitt þetta út með víddargreiningu. Þá athugum við að:

$$a = m^\alpha v^\beta r^\gamma$$

og með því að skoða víddirnar á stærðunum þá höfum við að:

$$[a] = [m]^\alpha [v]^\beta [r]^\gamma \implies \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{kg}^\alpha \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^\beta \mathrm{m}^\gamma \implies \mathrm{kg}^0\mathrm{m}^1\mathrm{s}^{-2} = \mathrm{kg}^\alpha\mathrm{m}^{\beta+\gamma}\mathrm{s}^{-\beta}$$

Sem gefur okkur eftirfarandi jöfnuhneppi:

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta + \gamma = 1 \\ -\beta = -2 \end{cases}$$

En það jöfnuhneppi hefur lausnina $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 2, -1)$ sem þýðir að:

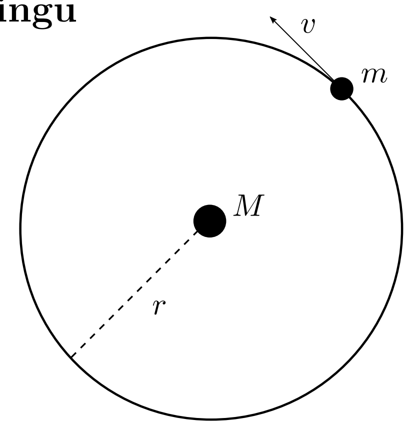
$$a = m^\alpha v^\beta r^\gamma = v^2 r^{-1} = \frac{v^2}{r}.$$

Fyrir hlut á hringhreyfingu.

8.3 Þriðja lögmál Keplers fyrir hringhreyfingu

Við skulum nú skoða hlut með lítinn massa, m, sem hefur hraðann v og er á hringhreyfingu með geisla r um stóran massa, M. Við hugsum okkur til að byrja með að litli massinn, m, tákni jörðina og stóri massinn, M, tákni sólina. En það kemur í ljós að lögmálið gildir engu að síður fyrir hvaða hringhreyfingu (með föstum hraða) sem er. Þannig gildir lögmálið eins fyrir tungl á hringferð umhverfis reikistjörnu. Við höfum samkvæmt þyngdarlögmálinu að krafturinn sem verkar á pláneturnar vegna sólarinnar er gefinn með:

$$F_G = \frac{GMm}{r^2}.$$



Mynd 8.3: Lítill massi, m, með hraða v á hringhreyfingu með geisla r um stóran massa M.

En þar sem að þetta er eini krafturinn sem að verkar á plánetuna sem er á hringhreyfingu um sólina þá höfum við samkvæmt öðru lögmáli Newtons að:

$$F_{\text{heild}} = F_G,$$

og þar sem að plánetan er á hringhreyfingu höfum við að:

$$ma = m\frac{v^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$$

En með því að stytta út m og margfalda í gegn með r höfum við því að:

$$v^2 = \frac{GM}{r}.$$

En nú ferðast plánetan með jöfnum hraða umhverfis sólina svo við höfum að hraði hennar er gefinn með:

$$v = \frac{2\pi r}{T}.$$

En þar með getum við ályktað að:

$$\frac{GM}{r} = v^2 = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

En þetta getum við umritað sem:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = \text{fasti}.$$

Við höfum því sýnt:

Lögmál 8.3. (Þriðja lögmál Keplers) Lítum á lítinn massa m með hraða v sem er á hringhreyfingu með geisla r um stórann massa M. Látum T vera umferðartíma massans m um stóra massann M. Þá gildir að:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = \text{fasti}.$$

Við notum þetta lögmál oft með eftirfarandi hætti. Hugsum okkur að við séum með tvær plánetur (t.d. jörðina og Venusi) sem eru á hringhreyfingu með geisla r_1 og r_2 hvor um sig frá sólinni og hafa umferðartíma T_1 og T_2 umhverfis sólina. Við höfum þá að:

$$\frac{r_1^3}{T_1^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = \frac{r_2^3}{T_2^2} \implies \frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2}.$$

8.4 Lögmál Keplers

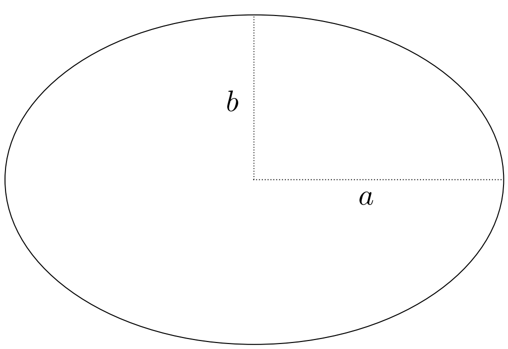
Johannes Kepler setti fram lögmál um hreyfingu himinhnattanna á árunum 1609-1619. Það var síðan Isaaq Newton sem leiddi þau út og sýndi að þau væru í samræmi við þyngdarlögmálið hans árið 1687 í öndvegisriti sínu, Principia. Við gerðum í síðustu grein ráð fyrir því að pláneturnar ferðist með jöfnum hraða á hring umhverfis sólina. Það er ekki alveg rétt, því í rauninni ferðast þær á sporbaug (sem er eins og egglaga hringur) en það er afskaplega góð nálgun að þær séu á hringhreyfingu því það kemur í ljós að miðvik sporbauganna sem pláneturnar ferðast eftir er svo lítið að þær eru svo gott sem á hringhreyfingu. Við byrjum á því að skilgreina hvað við meinum með sporbaug:

Skilgreining 8.4. **Sporbaugur** (eða ellipsa) er safn þeirra punkta sem uppfylla jöfnuna:

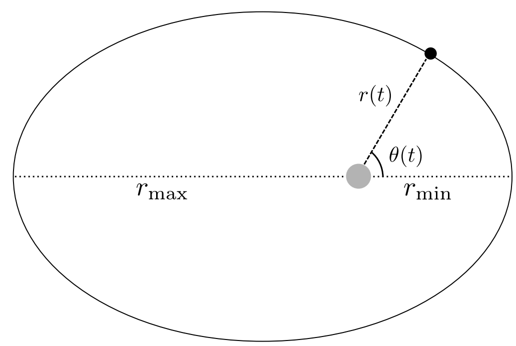
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Talan a kallast þá **langás** sporbaugsins en talan b kallast **skammás** sporbaugsins. Við skilgreinum **brennipunkta** ellipsunnar sem punktana $F_1 = (-c, 0)$ og $F_2 = (c, 0)$ þar sem $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Við skilgreinum **miðvik** sporbaugsins sem stærðina $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

Við tökum eftir að þegar $a = b = r$ þá fáum við hring, því þá höfum við $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$ eða með því að margfalda í gegn með r^2 þá sjáum við að við höfum $x^2 + y^2 = r^2$ sem er jafna hrings. Sporbaugurinn er því í einhverjum skilningi útvíkkun á hugtakinu sem við þekkjum nú þegar fyrir hring. Við tökum líka eftir því að miðvik sporbaugsins, ε getur mest orðið $\varepsilon = \frac{a}{a} = 1$ en það gerist þegar $b = 0$ (þegar ellipsan verður að línu). Við sjáum einnig að miðvik sporbaugsins, ε, getur minnst orðið $\varepsilon = \frac{0}{a} = 0$, en það gerist þegar $b = a$ eða þegar ellipsan samsvarar hring. Þannig $\varepsilon \in [0, 1]$ og $\varepsilon = 0$ samsvarar hring en $\varepsilon = 1$ samsvarar línu.



(a) Sporbaugur með langás a og skammás b.



(b) Pláneturnar ferðast á sporbaug í kringum sólina með sólina í öðrum brennipunktinum.

Fyrsta lögmál Keplers

Lögmál 8.5. Pláneturnar ferðast á sporbaug í kringum sólina með sólina í öðrum brennipunktinum.

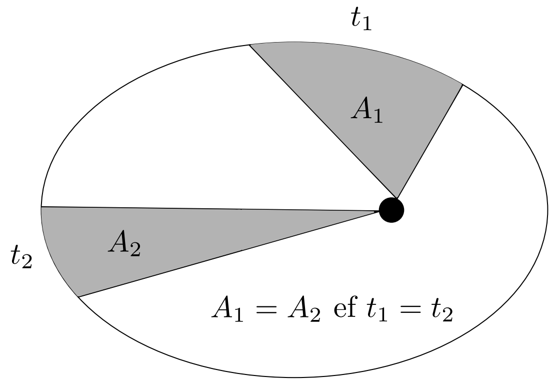
Við sjáum þá að:

$$a = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2}.$$

Fyrir jörðin þá höfum við að mesta fjarlægðin milli jarðarinnar og sólarinnar er gefin með $r_{\max} = 1{,}521 \cdot 10^{11}$ m en minnsta fjarlægðin er gefin með $r_{\min} = 1{,}471 \cdot 10^{11}$ m. Við höfum þá að langás sporbaugsins sem jörðin ferðast eftir er gefinn með $a_J = \frac{1}{2}(r_{\max} + r_{\min}) = 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m. Við tökum síðan eftir því að $r_{\max} = a + c$ en þá er $c_J = r_{\max} - a_J = 0{,}025 \cdot 10^{11}$ m. Það þýðir að miðvik sporbaugsins sem jörðin ferðast í kringum sólina með er $\varepsilon_J = \frac{c_J}{a_J} = \frac{0{,}025 \cdot 10^{11}\text{ m}}{1{,}496 \cdot 10^{11}\text{ m}} = 0.01671$. Sem þýðir að $\varepsilon_J \approx 0$ og það er því góð nálgun að gera ráð fyrir að jörðin sé á hringhreyfingu um sólina.

Annað lögmál Keplers

Lögmál 8.6. Línan frá sólu að reikistjörnu fer á hverju tímabili yfir jafnstórt flatarmál.



Mynd 8.5: Flatarmálið, $A(t)$, sem pláneturnar sveipa á tíma t er alltaf jafn stórt.

Þriðja lögmál Keplers fyrir sporbauga

Lögmál 8.7. Lítum á lítinn massa, m sem ferðast á sporbaug um stóran massa M sem er staddur í brennipunkti sporbaugsins. Látum a vera langás sporbaugsins og látum T tákna umferðartíma litla massans umhverfis stóra massann. Þá gildir að:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M+m)}{4\pi^2} \approx \frac{GM}{4\pi^2} = \text{fasti}.$$

8.5 Sýnidæmi

Rómeo og Júlía

Fólk talar stundum um aðdráttarkraft ástarinnar í daglegu tali. Þá tölum við um að fólk laðist að öðru fólki (nefnum engin kyn hérna). Í upphafsatriði bandarísku bíómyndarinnar „Back to the Future“ er til dæmis lagið „The Power of Love“ spilað á meðan Marty McFly teikar bíl í skólann á hjólabrettinu sínu. Hugsum okkur því núna að Rómeó og Júlía standi í fjarlægð $r = 8{,}5\,\text{cm}$ frá hvort örðu (við miðum við fjarlægðina á milli massamiðjunnar á þeim). Látum Rómeó hafa massa $m_R = 67\,\text{kg}$ og Júlíu hafa massa $m_J = 88\,\text{kg}$. Þá er þyngdarlögmálskrafturinn sem verkar á milli þeirra gefinn með:

$$F_G = \frac{Gm_Rm_J}{r^2} = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\,\text{m}^3/(\text{kg}\,\text{s}^2)\cdot 67\,\text{kg}\cdot 88\,\text{kg}}{(8{,}5\cdot 10^{-2}\,\text{m})^2} = 5{,}4\cdot 10^{-5}\,\text{N}.$$

Við sjáum þá að aðdráttarkrafturinn sem verkar á milli þeirra er miklu minni heldur en þyngdarkrafturinn sem verkar á þau vegna jarðarinnar, en hann er annarsvegar fyrir Rómeó $m_Rg = 660\,\text{N}$ og hinsvegar fyrir Júlíu $m_Jg = 860\,\text{N}$. Sem er bæði miklu stærra heldur en $F_G = 5{,}4\cdot 10^{-5}\,\text{N}$. Við sjáum einnig að Rómeó laðast meira að Júlíu (einfaldlega því hún hefur meiri massa en Rómeó). Hröðun Rómeós til Júlíu væri þá gefin með:

$$m_Ra_R = F_G \implies a_R = \frac{F_G}{m_R} = 8{,}0\cdot 10^{-7}\,\text{m}/\text{s}^2.$$

Eins væri hröðunin sem Júlía myndi finna fyrir í áttina að Rómeó gefin með:

$$m_Ja_J = F_G \implies a_J = \frac{F_G}{m_J} = 6{,}1\cdot 10^{-7}\,\text{m}/\text{s}^2 < a_R.$$

Lagrange-punktar

Þar sem að þyngdarlögmálskrafturinn er aðdráttarkraftur sem verkar á milli sérhverra tveggja massa þá gefur það til kynna að til sé punktur á milli jarðarinnar og sólarinnar þar sem að heildarkrafturinn sem verkar á hlutinn sé núll. Með öðrum orðum, ef $d = 1{,}0\,\mathrm{AU} = 1{,}50 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$ er fjarlægðin milli jarðarinnar og sólarinnar þá er til fjarlægð $0 < x < d$ frá sólinni þar sem að heildarkrafturinn sem verkar á hlutinn er núll. Slíkir punktar kallast Lagrange-punktar. Við höfum þá að ef F_S táknar þyngdarlögmálskraftinn sem verkar á milli massans, m og sólarinnar og F_J táknar þyngdarlögmálskraftinn sem verkar á milli jarðarinnar og massans, m. Þá gildir að:

$$F_S = F_J \implies \frac{GM_S m}{x^2} = \frac{GM_J m}{(d-x)^2} \implies \frac{(d-x)^2}{x^2} = \frac{M_J}{M_S}$$

Sem við getum umritað þannig að:

$$\left(\frac{d}{x} - 1\right)^2 = \frac{M_J}{M_S} \implies \frac{d}{x} - 1 = \pm\sqrt{\frac{M_J}{M_S}}$$

Við veljum jákvæða formerkið því $d > x$ svo $\left(\frac{d}{x} - 1\right) > 0$. En þar með höfum við að:

$$\frac{d}{x} = 1 + \sqrt{\frac{M_J}{M_S}} \implies x = \frac{d}{1 + \sqrt{\frac{M_J}{M_S}}} = \frac{1{,}0\,\mathrm{AU}}{1 + \sqrt{\frac{2{,}0 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}}{5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}}} = 0{,}998\,\mathrm{AU}.$$

Sem er fjarlægðin frá sólinni að Lagrange-punktinum. En sá punktur er þá í fjarlægðinni $d - x = 0{,}002\,\mathrm{AU}$ frá jörðinni. Þessi punktur er reyndar ekki eini Lagrange-punkturinn sem að jörðin og sólin hafa á milli sín. Þessi punktur er iðulega kallaður L_1 þar sem að það eru í heildina fimm punktar í sólkerfinu þar sem að heildkrafturinn sem verkar á hlut í þeim punkti er núll frá jörðinni og sólinni. Nokkrum gervitunglum hefur verið komið fyrir í L_1 eins og t.d. ACE og DSCOVR gervitunglin. Það er hinsvegar erfitt að skýla gervitunglum þar frá miklum og öflugum sólvindum svo slík gervitungl endast ekki lengi.

Að snúa bolta í bandi

Hugsum okkur að við séum að snúa bolta í bandi í lárétta hringi með hraða v. Ef við skrifum niður kraftajöfnu fyrir hlutinn þá höfum við:

$$\begin{pmatrix} ma \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T\cos\theta \\ T\sin\theta - mg \end{pmatrix}$$

En við sjáum þá úr neðri jöfnunni að:

$$T = \frac{mg}{\sin\theta}.$$

En þá gefur efri jafnan að:

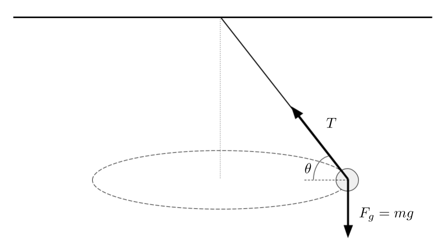
$$a = \frac{T\cos\theta}{m} = \frac{mg\cos\theta}{m\sin\theta} = \cot(\theta)g.$$

En þar sem að hluturinn er á hringhreyfingu þá er $a = \frac{v^2}{r}$ svo við fáum að hraði hlutarins, v, er gefinn með:

$$v = \sqrt{ar} = \sqrt{\cot(\theta)gr},$$

þar sem r er geisli hringsins. Ef lengd bandsins er ℓ þá sjáum við að $r = \ell\cos\theta$ og því er:

$$v = \sqrt{\cot(\theta)gr} = \sqrt{\cot\theta\cos\theta g\ell}.$$



Mynd 8.6: Bolta með massa m snýst í hringi með jöfnum hraða v á hring með geisla r. Lengd bandsins er ℓ og hornið sem bandið m.v. lárétt er θ.

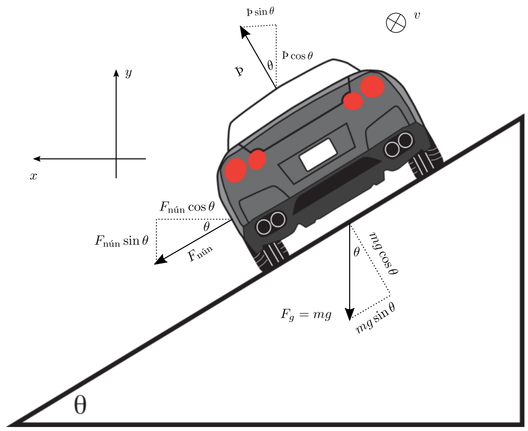
NASCAR beygjur

Hvers vegna eru beygjurnar á NASCAR brautunum í halla? Við skulum skoða það aðeins núna.

$$\vec{F}_{\text{heild}} = \vec{F}_g + \vec{Þ} + \vec{F}_{\text{nún}}.$$

Sem gefur þá miðað við venjulega kartesíska hnitakerfið:

$$\begin{pmatrix} ma \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Þ\sin\theta + F_{\text{nún}}\cos\theta \\ Þ\cos\theta - mg - F_{\text{nún}}\sin\theta \end{pmatrix}$$



Mynd 8.7: Bíll keyrir með hraða v í NASCAR beygju.

Við viljum síðan ákvarða stærsta kyrrstöðunúninginn, $F_{n\acute{u}n} \leq \mu_s Þ$ þannig að bíllinn fari ekki útaf brautinni. Við notum að hluturinn er á hringhreyfingu þannig að $a = \frac{v^2}{r}$ þar sem v er hraði bílsins og r er geisli hjúfurhrings brautarinnar í beygjunni. Áður en hluturinn byrjar að renna er $F_{\text{nún}} = \mu_s Þ$ svo við fáum úr neðri jöfnunni að:

$$0 = Þ\cos\theta - mg - \mu_s Þ\sin\theta \implies Þ = \frac{mg}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}$$

En með því að stinga inn í efri jöfnuna höfum við að:

$$m\frac{v^2}{r} = ma = Þ\sin\theta + \mu_s Þ\cos\theta = \frac{\sin\theta + \mu_s\cos\theta}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}mg$$

En það gefur okkur því að hámarkshraðinn í NASCAR beygju er gefinn með:

$$v = \sqrt{\left(\frac{\sin\theta + \mu_s\cos\theta}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}\right)gr}.$$

Við tökum eftir því að þegar $\theta = 0$ þá fáum við að hámarkshraðinn í flatri beygju er $v = \sqrt{\mu_s gr}$. Ef brautin er núningslaus sjáum við að hámarkshraðinn verður $v = \sqrt{\tan(\theta)gr}$. Við sjáum einnig að því stærra sem θ er því stærri verður hámarkshraðinn í brautinni. En það þýðir að NASCAR ökuþórarnir geta keyrt hraðar í slíkum beygjum. T.d. er dæmigerður kyrrstöðunúningsstuðull milli dekkja og malbiks gefinn með $\mu_s = 0{,}90$ og dæmigerður geisli hjúfurhrings á NASCAR braut er $r = 225\,\text{m}$ og brautirnar halla yfirleitt um $\theta = 35°$. Ef brautirnar myndu ekki halla væri hámarkshraðinn sem NASCAR ökumaður gæti keyrt með í beygjunum gefinn með $v = 45\,\text{m/s} = 160\,\text{km/klst}$. Hinsvegar, þar sem brautin hallar um $\theta = 35°$ miðað við lárétt, þá er hámarkshraðinn sem NASCAR ökumenn geta keyrt í beygjunum gefinn með $v = 98\,\text{m/s} = 350\,\text{km/klst}$.

Hómer Simpson og dauðahnötturinn

Í bíómyndinni „The Simpsons Movie“ sem kom út árið 2007 tekst Hómer að keyra hring á mótorhjóli í svokölluðum dauðahring. Við skulum skoða minnsta hraðann sem Hómer þarf að hafa til þess að hann detti ekki niður í efstu stöðu. Ef við skrifum þá niður kraftajöfnu í efstu stöðu þá höfum við að:

$$ma = mg + Þ$$

Þar sem Þ er þverkrafturinn frá brautinni á Hómer í efstu stöðu. Þar sem að Hómer er á hringhreyfingu þá höfum við að $a = \frac{v^2}{r}$ svo við höfum að:

$$m\frac{v^2}{r} = mg + Þ$$

Við ályktum því að þverkrafturinn sem að verkar á Hómer frá brautinni í efstu stöðu er gefinn með:

$$Þ = m\frac{v^2}{r} - mg$$

En ef Hómer hefur ekki nægan hraða í efstu stöðu þá mun hann detta niður. En þá finnur hann ekki fyrir neinum þverkrafti frá brautinni. Svo minnsti hraðinn þannig að hann sleppi hefur þann eiginleika að $Þ = 0$ en þar með höfum við að:

$$0 = m\frac{v^2}{r} - mg \implies v = \sqrt{gr}$$

Er minnsti hraðinn sem Hómer getur haft í efstu stöðu dauðahringsins án þess að detta niður og hálsbrotna.

Fjarlægð Venusar frá sólinni

Hugsum okkur að við fylgjumst með því hversu lengi Venus er að fara hringinn í kringum sólina. Við tökum þá eftir því að það tekur Venusi 225 daga að fara hringinn í kringum sólina á meðan að það tekur jörðina 365 daga að fara hringinn í kringum jörðina. Við ættum kannski að taka fram að hér erum við að tala um jarðardaga þar sem að einn Venusardagur (þ.e.a.s. tíminn sem það tekur Venusi að snúast um sjálfa sig) eru rúmir 117 jarðardagar. Við segjum þá að Venusarárið sé 225 dagar. Við vitum að fjarlægðin milli jarðarinnar og sólarinnar er $a_J = 1\,\mathrm{AU} = 1{,}5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$. Við getum þá notað lögmál Keplers til þess að ákvarða fjarlægðina milli Venusar og sólarinnar. Við höfum nefnilega samkvæmt þriðja lögmáli Keplers að:

$$\frac{a_J^3}{T_J^2} = \frac{GM_s}{4\pi^2} = \frac{a_V^3}{T_V^2}$$

Þar sem að M_s er massi sólarinnar. Þarna höfum við notað að þriðja lögmál Keplers gildir bæði fyrir Jörðina og fyrir Venusi þar sem að báðar pláneturnar eru á hringhreyfingu um sólina. En þar með fáum við að:

$$\frac{a_J^3}{T_J^2} = \frac{a_V^3}{T_V^2} \implies a_V^3 = \frac{T_V^2}{T_J^2} a_J^3 \implies a_V = \left(\frac{T_V}{T_J}\right)^{3/2} a_J = \left(\frac{225}{365}\right)^{3/2} 1\,\mathrm{AU} = 0{,}72\,\mathrm{AU}.$$

Massi jarðarinnar

Það má líka nota þriðja lögmál Keplers til þess að ákvarða massa jarðarinnar, M_J. Fjölmargar rannsóknir hafa verið gerðar til þess að mæla vegalengdina milli jarðarinnar og tunglsins. Ein slík er að skjóta leysigeisla í áttina að jörðinni og taka tímann á því hversu lengi geislinn er að ferðast fram og til baka (hraði ljósins, $c = 3{,}00 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ er bæði takmarkaður og fastur). Það tekur ljósið um það bil 2,5 s að fara fram og tilbaka. Þannig fæst að vegalengdin milli jarðarinnar og tunglsins er gefin með $a_T = 3{,}84 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$. Við vitum líka út frá tunglárinu að það tekur tunglið $T_T = 27$ daga að fara umhverfis jörðina. En þar með höfum við samkvæmt þriðja lögmálinu að:

$$\frac{a_T^3}{T_T^2} = \frac{GM_J}{4\pi^2}$$

En með því að leysa fyrir massann M_J höfum við því að:

$$M_J = \frac{4\pi^2}{G}\frac{a_T^3}{T_T^2} = \frac{4\pi^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg\,s^2)}} \frac{(3{,}84 \cdot 10^8\,\mathrm{m})^3}{(27 \cdot 24 \cdot 60^2\mathrm{s})^2} = 6{,}16 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}.$$

Sem er ekki í fjarri lagi frá viðteknu gildi $M_J = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$.

8.6 Dæmi

Þyngdarlögmálið

Dæmi 8.1. Geisli tunglsins er $1{,}74 \cdot 10^6$ m og massi tunglsins er $7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg. Hver er þyngdarhröðunin á tunglinu?

Dæmi 8.2. Geisli plánetunnar Mars er $R = 3390\,\mathrm{km}$ og massi plánetunnar er $M = 6{,}39 \cdot 10^{23}\,\mathrm{kg}$. Hver er þyngdarhröðunin á Mars?

Dæmi 8.3. Í Ástardúett Stuðmanna kemur fram að ástin milli Hörpu Sjafnar og Kristins stuðs sé svo sterk að þau séu magnvana og máttlaus. Hversu stór þyngdarlögmálskraftur verkar á milli þeirra ef massi Kristins er $m_K = 88\,\mathrm{kg}$ og massi Hörpu er 67 kg og þau (réttara sagt massamiðjur þeirra) eru í fjarlægðinni $r = 8{,}5\,\mathrm{cm}$ frá hvert öðru? Hver er hröðun Kristins í áttina að Hörpu? En hröðun Hörpu í áttina að Kristni? Hvort þeirra laðast meira að hinu?

Dæmi 8.4. Árið 2015 fann NASA fjarreikistjörnuna Kepler-452b en hún hefur stundum verið kölluð frænka jarðarinnar (hvað sem það nú þýðir). Fjarreikistjarnan Kepler-452b er fimm sinnum massameiri heldur en jörðin, þ.e. $M_K = 5M_J$ og geisli hennar er helmingi stærri, þ.e. $R_K = 1.5R_J$. Hver er þyngdarhröðunin á Kepler-452b?

Dæmi 8.5. Hver er þyngdarlögmálskrafturinn sem verkar á manneskju sem stendur á jörðinni, F_J? Hver er þyngdarlögmálkrafturinn, F_E, sem verkar á manneskju sem stendur á toppi Everest í 8848 m hæð yfir jörðu? Í hvaða hæð yfir jörðu er þyngdarlögmálskrafturinn sem verkar á manneskju aðeins helmingurinn af þyngdarkraftinum sem verkar á manneskju á jörðinni?

Dæmi 8.6. Meðalfjarlægðin milli jarðarinnar og tunglsins er $d = 384.400\,\mathrm{km}$. Massi jarðarinnar er $M_J = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ og massi tunglsins er $M_T = 7{,}35 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$. Til er punktur, sem nefnist Lagrange-punktur, á milli jarðarinnar og tunglsins þar sem að þyngdarkrafturinn frá jörðinni er jafn stór og þyngdarkrafturinn frá tunglinu en það þýðir að enginn heildarkraftur verkar á hlut sem er staðsettur þar. Hversu langt frá jörðinni er Lagrange-punkturinn milli jarðarinnar og tunglsins?

Hringhreyfing

Dæmi 8.7. Bíll með massa 1200 kg keyrir á láréttri, hringlaga, kappakstursbraut með geisla 90 m. Hver er mesti hraðinn sem að bíllinn getur keyrt með ef að núningsstuðullinn milli bílsins og brautarinnar er $\mu = 0{,}65$.

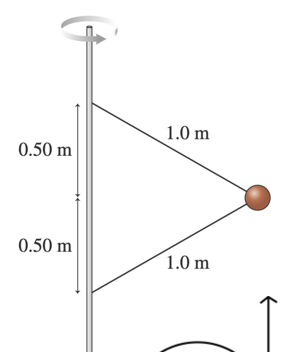
Dæmi 8.8. Davíð ætlar að slöngva steini í höfuðið á Golíat. Hann setur stein með massa 1 kg í slöngvuna og byrjar að sveifla henni í hring í láréttu plani. Slöngvan er 40 cm á lengd og miðlægur kraftur sem verkar á steininn er 10 N. Hver er hraði steinsins?

Dæmi 8.9. Barn með massa $m = 32\,\mathrm{kg}$ situr kyrrt á risastórum disk sem snýst einn hring á 3,0 s. Barnið situr í fjarlægð 1,3 m frá miðju disksins.

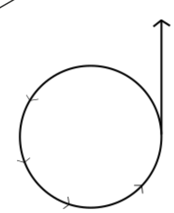
(a) Teiknið kraftamynd fyrir barnið.

(b) Hver er stærð miðsóknarkraftsins sem verkar á barnið?

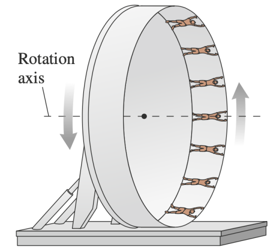
Dæmi 8.10. Tveir vírar eru festir við kúlu með massa $m = 300\,\mathrm{g}$. Kúlan er á hringhreyfingu um stöngina með jöfnum hraða $v = 7{,}5\,\mathrm{m/s}$. Hver er togkrafturinn í vírunum?



Dæmi 8.11. Parísarhjól með 20 m geisla snýr vögnum í hringi, hver með massa 500 kg. Vagnana ber við jörðu í lægstu stöðu. Dag einn bilar vélbúnaður hjólsins. Það byrjar að snúast of hratt þannig að á hvern vagn verkar 3000 N miðsóknarkraftur. Allt í einu losnar vagn af hjólinu með þeim afleiðingum að hann þýtur beint upp á við. Hvaða hæð yfir jörðu nær vagninn áður en hann byrjar að falla aftur til jarðar?



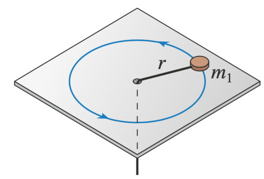
Dæmi 8.12. Skemmtigarðurinn í Smáralind var að fjárfesta í nýju tæki sem kallast Hamstrahjólið. Farþegar koma sér fyrir á jaðri hringsins sem hefur geisla $r = 8{,}0\,\mathrm{m}$. Hringurinn byrjar láréttur en snýst síðan upp í lóðrétta stöðu eins og sjá má á myndinni hér til hægri. Hamstrahjólið snýst einn hring á $4{,}5\,\mathrm{s}$ í lóðréttri stöðu. Farþegi með massa $m = 65\,\mathrm{kg}$ fer nú í tækið.



(a) Hver er þverkrafturinn sem að farþeginn finnur fyrir í efstu stöðu?

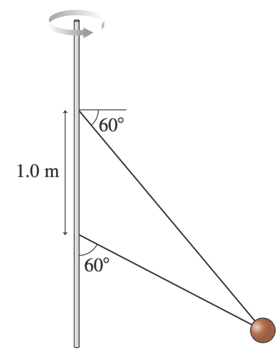
(b) Hver er þverkrafturinn sem að farþeginn finnur fyrir í lægstu stöðu?

(c) Hver er minnsti umferðartíminn sem að Hamstrahjólið má hafa án þess að farþegarnir falli úr tækinu?



Dæmi 8.13. Massi m_1 er á hringhreyfingu með geisla r á láréttu, núningslausu borði. Massinn m_1 er festur með bandi við massa m_2 (það er gat í miðju borðsins) sem hangir lóðrétt undir borðinu. Massinn m_2 er kyrr. Hver er hraði m_1?

Dæmi 8.14. Tveir vírar eru festir við kúlu með massa $m = 2{,}0\,\mathrm{kg}$ eins og sést á myndinni hér til hægri. Kúlan er á láréttri hringhreyfingu með föstum hraða $v = 2{,}5\,\mathrm{m/s}$. Hver er togkrafturinn í hvorum vír fyrir sig?



Dæmi 8.15. Homer Simpson ($109\,\mathrm{kg}$) ætlar að keyra í hring á mótorhjólinu sínu inni í dauðahnettinum. Þá mun Homer vera á hvolfi efst í hnettinum. Dauðahnötturinn hefur geisla $20{,}3\,\mathrm{m}$.

(a) Hver er minnsti hraðinn sem Hómer þarf að hafa í efstu stöðu þannig að hann falli ekki?

(b) Hversu mikill þverkraftur verkar á Homer efst ef hann fer með hraðanum $80{,}0\,\mathrm{km/klst}$?

Dæmi 8.16. Festum band með lengd ℓ við fötu sem er full af vatni. Látum heildarmassa vatnsins vera m. Er hægt að sveifla bandinu heilan hring án þess að vatnið detti úr fötunni?

Dæmi 8.17. Jójó með massa $100\,\mathrm{g}$ er sveiflað í bandi í lóðrétta hringi með geisla $40\,\mathrm{cm}$.

(a) Gerið kraftamyndir og kraftajöfnur fyrir jójóið bæði í efstu og neðstu stöðu.

(b) Hver þarf lágmarkshraði jójósins að vera í efstu stöðu svo að ekki slakni á bandinu?

(c) Notið orkuvarðveislu til þess að finna hraða jójósins þegar það er í efstu stöðu ef það hefur hraðann $5{,}5\,\mathrm{m/s}$ þegar það er í neðstu stöðu.

(d) Hver er þá togkrafturinn í efstu stöðu?

Lögmál Keplers

Dæmi 8.18. Neptúnus er í meðalfjarlægð $4{,}5 \cdot 10^9\,\mathrm{km}$ frá sólu. Hversu langt er eitt ár á Neptúnusi?

Dæmi 8.19. Meðalfjarlægð sólarinnar og jarðarinnar er $1\,\mathrm{AU} = 1{,}5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$. Nýtið ykkur þriðja lögmál Keplers til þess að ákvarða massa sólarinnar.

Dæmi 8.20. Meðalfjarlægð tunglsins og jarðarinnar er $384.400\,\mathrm{km}$. Nýtið ykkur þriðja lögmál Keplers til þess að ákvarða massa jarðarinnar.

Dæmi 8.21. Gervihnöttur með massa $5500\,\mathrm{kg}$ er á sporbraut um jörðina og hefur umferðartíma $6600\,\mathrm{s}$. Ákvarðið:

(a) Geisla sporbrautarinnar.

(b) Stærð þyngdarlögmálkraftsins á gervihnöttinn.

(c) Hæð gervihnattarins yfir jörðu.

Dæmi 8.22. Mars er fjórða reikistjarnan frá sólu. Mars hefur massa $6{,}42 \cdot 10^{23}$ kg og tvö tungl, Fóbos og Deimos. Umferðartími plánetunnar um sólina er 687 dagar. Mars hefur massa $6{,}42 \cdot 10^{23}$ kg, geisla 3390 km. Fóbos er það tungl í sólkerfinu sem er næst reikistjörnu sinni. Fóbos er í 9380 km fjarlægð frá miðju Mars.

(a) Hver er þyngdarhröðunin á Mars?

(b) Hversu langt frá sólinni er Mars?

(c) Hver er umferðartími Fóbosar á sporbraut sinni um Mars?

Dæmi 8.23. Alþjóðlega geimstöðin er á hringlaga braut umhverfis jörðina 409 km frá yfirborði jarðar. Umferðartími hennar er 93 mínútur. Hubble geimsjónaukinn er einnig á hringlaga braut umhverfis jörðina með umferðartíma 96 mínútur. Hve langt frá yfirborði jarðar er Hubble geimsjónaukinn?

Dæmi 8.24. Árið 2061 mun halastjarna Halleys sjást með berum augum frá jörðinni. Halastjarnan er á sporbraut um sólina og mun ljúka fjórðu umferð sinni um sólu frá því að Edmond Halley spáði fyrir um komu hennar fyrst, árið 1758. Þegar halastjarnan var síðast í nándarstöðu, árið 1986 mældist hún í fjarlægðinni $r_p = 0{,}59$ AU frá sólu. Hver er mesta fjarlægðin, r_a, sem að halastjarna Halleys nær í firrðarstöðu, frá sólu?

Dæmi 8.25. Venus er önnur reikistjarnan frá sól. Af öllum reikistjörnum í sólkerfinu er braut Venusar sú sem kemst næst því að vera hringlaga. Reikistjarnan lýkur einni hringferð um sólina á 245 jarðardögum. Jörðin ferðast með hraðanum 30 km/s um sólina. Hver er hraði Venusar?

Dæmi 8.26. Dvergreikistjarnan Plútó gengur um sólu á sporöskjulaga braut. Mesta fjarlægð hennar frá sólu er 49,3 AU og minnsta fjarlægð hennar frá sólu er 29,7 AU. Hver er umferðartími Plútó?

Dæmi 8.27. Braut Venusar um sólina er næstum hringlaga. Venus er í 0,72 AU fjarlægð frá sólu. ($1\,\mathrm{AU} = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m). Notið þriðja lögmál Keplers til að finna umferðartíma Venusar.

Dæmi 8.28. Sporbaugur stærsta tungls Júpiters, Ganymede, um plánetuna er nærri því hringlaga með geisla $1{,}07 \cdot 10^6$ km. Umferðartími Ganymede er 7,16 dagar. Hver er massi Júpiters?

Svör

(1) $g_T = 1{,}62\,\mathrm{m/s^2}$. **(2)** $g_M = 3{,}71\,\mathrm{m/s^2}$. **(3)** $F_G = 54\,\mu\mathrm{N}$, $a_K = 6{,}1 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m/s^2}$, $a_H = 8{,}1 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m/s^2}$, Harpa. **(4)** $g_K = 21{,}8\,\mathrm{m/s^2}$. **(5)** $F_J = \frac{GmM_J}{R_J^2}$, $F_E = \frac{GmM_J}{(R_j+h)^2}$, $h = 2640$ km. **(6)** $x = 346.000$ km. **(7)** 24 m/s. **(8)** 2 m/s. **(9)** 185 N. **(10)** $T_1 = 14$ N, $T_2 = 8{,}3$ N. **(11)** $h_{\max} = 26$ m. **(12)** Þ = 380 N, Þ = 1660 N, $T = 5{,}6$ s. **(13)** $v = \sqrt{\frac{m_2}{m_1} gr}$. **(14)** $T_1 = 15$ N, $T_2 = 7{,}9$ N. **(15)** $v_{\min} = 14{,}1$ m/s, Þ = 1580 N. **(16)** $v > \sqrt{gl}$. **(17)** $v = 2{,}0$ m/s, $v = 3{,}8$ m/s, Þ = 2,6 N. **(18)** $T_N = 164$ ár. **(19)** $M_S = 2{,}0 \cdot 10^{30}$ kg. **(20)** $M_J = 5{,}7 \cdot 10^{24}$ kg. **(21)** $a = 7134$ km, $F_G = 43.000$ N, $h = 763$ km. **(22)** $g_M = 3{,}62\,\mathrm{m/s^2}$, $a_M = 1{,}52$ AU, $T_F = 7$ klst og 40 mín. **(23)** $h_H = 545$ km. **(24)** $r_{\max} = 35{,}2$ AU. **(25)** $v = 34$ km/s. **(26)** $T_P = 248$ ár. **(27)** $T_V = 223$ dagar. **(28)** $M_J = 1{,}89 \cdot 10^{27}$ kg.

Kafli 9

Snúningar

9.1 Hornstaða, hornhraði og hornhröðun

Skilgreining 9.1. Lítum á hring með geisla r. **Hornstaða** hlutar á snúningshreyfingu er táknuð með θ og er mæld í radíónum. Hún er skilgreind þannig að:

$$\theta = \frac{s}{r}$$

Þar sem s táknar **bogalengdina** sem hluturinn hefur ferðast línulega meðfram hringnum. **Hornhraði**, ω, og **hornhröðun**, α, hlutarins eru þá skilgreind þannig að:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt}.$$

Við fáum þá afar sambærilegar jöfnur fyrir snúningshreyfinguna og fyrir línulegu hreyfinguna:

Lögmál 9.2. Lítum á hlut sem er upphaflega staddur í hornstöðu θ_0 og hefur upphafshornhraða ω_0. Gerum ráð fyrir að hluturinn verði fyrir fastri hornhröðun α. Látum θ tákna hornstöðu hlutarins og ω tákna hornhraða hlutarins eftir tímann t. Þá gilda snúningsstöðujöfnurnar:

(i) $\omega = \omega_0 + \alpha t$.

(ii) $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$.

(iii) $2a\Delta\theta = \omega^2 - \omega_0^2$.

Við höfum síðan eftirfarandi tengsl milli snúningshreyfingar og línulegrar hreyfingar:

Lögmál 9.3. Lítum á hlut sem er á snúningshreyfingu með geisla r. Látum línulega bogalengd hlutarins vera gefna með s, línulegan hraða hlutarins vera gefinn með v og hröðun hlutarins vera gefna með a. Látum hornstöðu hlutarins vera θ, hornhröðun hlutarins vera ω og hornhröðunina vera α. Þá gilda eftirfarandi vensl:

$$s = r\theta, \qquad v = r\omega, \qquad a = r\alpha.$$

Útleiðsla: Fyrsta jafnan, $s = r\theta$ er bara umritun á skilgreiningu (9.1). Hinar fást samkvæmt skilgreiningu:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r\theta)}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega, \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha.$$

□

Takið samt eftir að þetta á við um hröðunin samsíða hjólinu sem snýst en ekki hornrétta hröðunina á hjólið (við höfðum þegar skoðað þá hröðun - miðsóknarhröðunina). Því væri í raun nákvæmara að rita:

$$a_{\parallel} = r\alpha, \qquad a_{\perp} = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

9.2 Massamiðjan

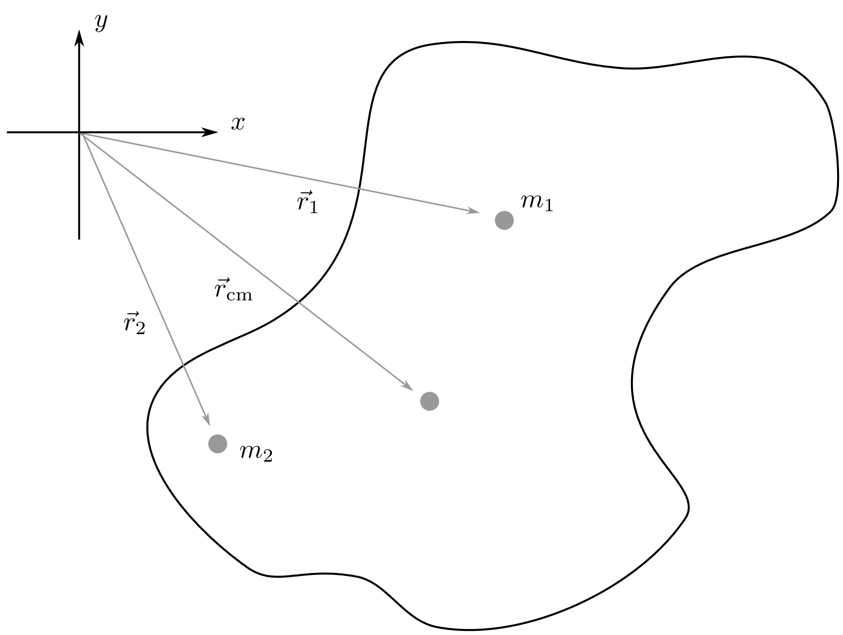
Skilgreining 9.4. Við segjum að hlutur sé **stjarfur** ef að innbyrðis staðsetning agnanna sem hluturinn samanstendur af helst óbreytt við hreyfingu hlutarins.

Hingað til höfum við talað um hvernig punktmassar hreyfast. Núna ætlum við að reyna að taka tillit til lögun hluta í dæmunum sem við reiknum. Það kemur síðan (sem betur fer) í ljós að við getum hugsað um alla hluti eins og þeir væru punktmassar staddir í massamiðju hlutarins. Við þurfum því fyrst að skilgreina hvað við eigum við með massamiðju:

Skilgreining 9.5. Gerum ráð fyrir að við höfum n punktamassa með massa $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sem eru staddir í $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$. **Massamiðja** kerfisins, $\vec{r}_{\mathrm{cm}}$, er þá skilgreind þannig að:

$$\vec{r}_{\mathrm{cm}} := \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{M} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i.$$

Þar sem $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n = \sum_{i=1}^{n} m_i$ er heildarmassi kerfisins.



Mynd 9.1: Við getum skipt stjörfum hlut upp í punktmassa og fundið þannig massamiðju hlutarins.

Þetta væri mjög gagnlegt ef að hlutirnir okkar væru allir punktmassar. Hinsvegar, ef við ætlum að finna massamiðju hlutar sem er samanhangandi t.d. eins og diskur, spýta eða bók þá vandast málin. Því þá þyrftum við að nota skilgreininguna hérna að ofan fyrir hvert einasta atóm í hlutnum! Til þess að auðvelda okkur slíka reikninga til að finna massamiðjur samfelldra hluta þá nota menn svokallaðan tegurreikning (sem þið lærið í 6. bekk í MR). En það er oft líka hægt að nota eðlisfræðileg innsæi (einnig þekkt sem „common sense“) til þess að finna massamiðjur stífrahluta. Til dæmis vitum við að massamiðja einsleitrar kúlu er í miðjunni á kúlunni. Við vitum einnig að massamiðja einsleitrar stangar er í miðju stangarinnar. Ástæðan fyrir því að við höfum svona mikinn áhuga á massamiðjunni er vegna eftirfarandi tveggja lögmála:

Lögmál 9.6. Lýsa má hreyfingu stjarfhlutar í heild sinni út frá hreyfingu massamiðjunnar.

Útleiðsla: Þetta fæst með örlítilli umritun á skilgreiningunni á massamiðjunni:

$$M\vec{r}_{\text{cm}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \implies M\vec{v}_{\text{cm}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \implies M\vec{a}_{\text{cm}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i.$$

En þetta þýðir að við höfum að heildarskriðþungi kerfisins er gefinn með:

$$\vec{p}_{\text{heild}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_{\text{cm}}.$$

Eins sýnir þetta að heildarkrafturinn sem verkar á kerfið gefinn með:

$$\vec{F}_{\text{heild}} = \frac{dp_{\text{heild}}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = M\vec{a}_{\text{cm}}.$$

□

Við sjáum einnig að ef heildarkrafturinn sem verkar á stjarfan hlut er núll þá er heildarskriðþungi stjarfhlutarins varðveittur. Annað sem við sjáum er að ef $U_i = m_i g h_i$ táknar stöðuorku hvers punktmassa fyrir sig þá er heildarstöðuorkan gefin með:

$$U_{\text{heild}} = \sum_{i=1}^{n} m_i g h_i = g \sum_{i=1}^{n} m_i h_i = gMh_{\text{cm}} = Mgh_{\text{cm}}.$$

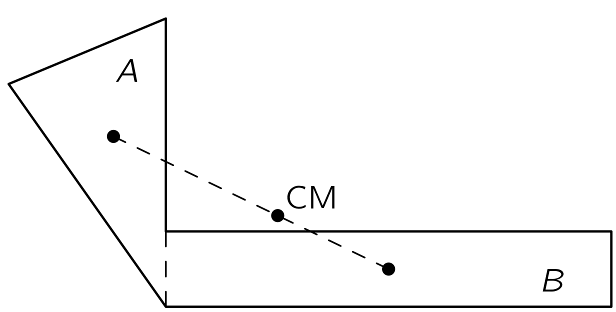
Við munum síðan síðar sýna að:

Lögmál 9.7. Hlutir snúast um massamiðju sína nema þeir séu neyddir til þess að snúast öðruvísi.

Við minnumst að lokum á eftirfarandi niðurstöðu sem sýnir okkur hvernig við getum fundið massamiðjur samsettra hluta (sem samanstanda af mörgum stífum hlutum).

Lögmál 9.8. Látum A vera stjarfan hlut með massamiðju $\vec{r}_A$ og heildarmassa m_A og látum B vera stjarfan hlut með massamiðju $\vec{r}_B$ og heildarmassa m_B. Massamiðja samsetta hlutarins AB er þá:

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{m_A \vec{r}_A + m_B \vec{r}_B}{m_A + m_B}.$$



Mynd 9.2: Þegar við setjum saman tvo stjarfa hluti þá er auðvelt að finna massamiðjur þeirra.

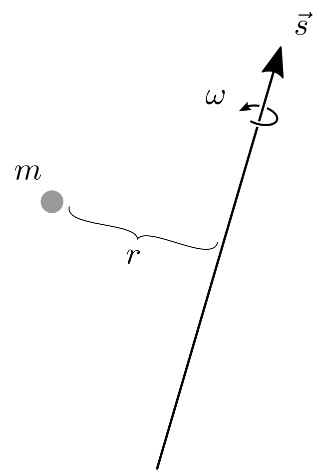
9.3 Hverfitregður og snúningsásar

Skilgreining 9.9. Við segjum að vigur $\vec{s} \in R^3$ sé **snúningsás** fyrir kerfi ef kerfið snýst með jákvæðum snúning umhverfis snúningsásinn.

Það eru margar leiðir til að snúa hlut svo í rauninni geta allir vigrar $\vec{s} \in \mathbb{R}^3$ verið snúningsás fyrir hlutinn. Snúningsásinn getur legið í gegnum hlutinn en snúningsásinn getur einnig legið fyrir utan hlutinn.

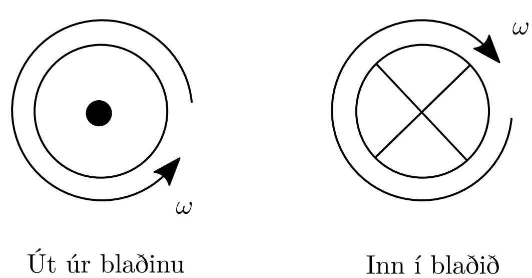
Skilgreining 9.10. Lítum á punktmassa m sem er í fjarlægð r frá snúningsás $\vec{s}$. **Hverfitregða** punktmassans um snúningsásinn er táknuð með I og skilgreind þannig að:

$$I = mr^2.$$



Mynd 9.3: Punktmassi m í fjarlægð r frá snúningsásnum, $\vec{s}$, hefur hverfitregðu $I = mr^2$.

Við athugum að SI-einingar hverfitregðu eru gefnar með: $[I] = [mr^2] = \text{kgm}^2$. Við hugsum um hverfitregðuna sem mælikvarða á það hversu erfitt er að snúa massanum m umhverfis snúningsásinn í fjarlægð r frá honum. Sumir nota orðið snúningsmassi í staðinn fyrir orðið hverfitregða.
Það er hinsvegar erfitt að teikna þrívíða hluti á blaði svo við veljum oftast sjónarhorn í dæmunum okkar þannig að snúningsásinn liggji í stefnuna þvert á blaðið, annað hvort inn í blaðið eða út úr því. Því er þægilegt að taka upp myndrænan ritһátt til að lýsa slíkum snúningsásum á myndum.



Mynd 9.4: Í mörgum dæmum þá liggur snúningsásinn annað hvort inn í blaðið eða út úr því.

Ástæðan sem liggur að baki þessum rithætti sem við sjáum á mynd 9.4 er að við erum að hugsa um ör. Vinstri myndin sýnir þá örvaroddinn koma í áttina að okkur og hægri myndin sýnir síðan stélið á örinni fjarlægjast okkur.

En stjarfir hlutir eru ekki punktmassar. En við getum Við höfum hinsvegar áhuga á því að finna hverfitregður stjarfra hluta um tiltekna snúningsása.

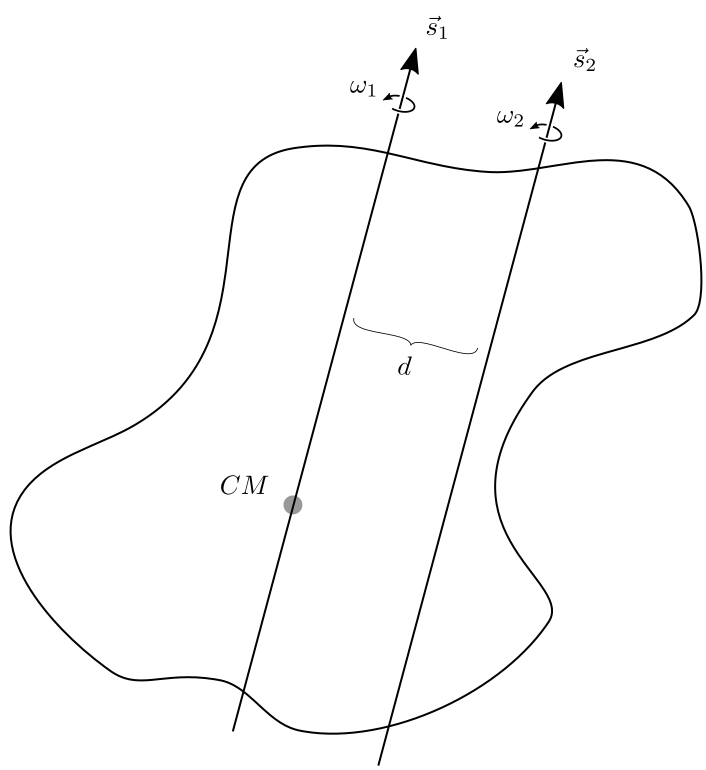
Skilgreining 9.11. Lítum á stjarfan hlut með heildarmassa m. Látum $\vec{s}$ vera snúningsás. Hugsum okkur að við smættum hlutinn upp í punktmassa. Segjum sem svo að hluturinn skiptist upp í n punktmassa sem hver um sig hefur örlítinn massa dm_i og er í fjarlægð r_i frá snúningsásnum. Við segjum að hverfitregða stjarfa hlutarins um snúningsásinn sé summan af hverfitregðum punktmassanna sem hluturinn samanstendur af. Með öðrum orðum þá höfum við að:

$$I = dm_1 r_1^2 + dm_2 r_2^2 + \ldots + dm_n r_n^2 = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 dm_i = \int r^2 dm.$$

Hér höfum við í síðasta skrefinu innleitt shorthand-ritháttinn $\int r^2 dm$ í staðinn fyrir summuna $\sum_{i=1}^{n} r_i^2 dm_i$. Þetta er til að spara blýið í skriffærunum okkar (og pennanum mínum) og ekki eitthvað til þess að óttast.

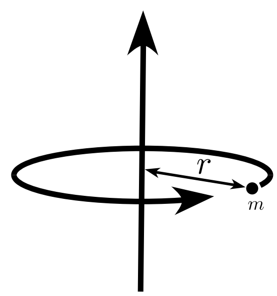
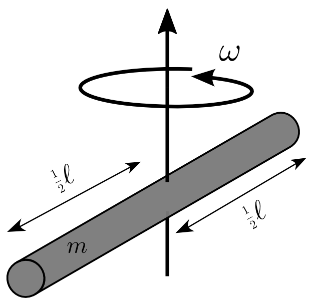
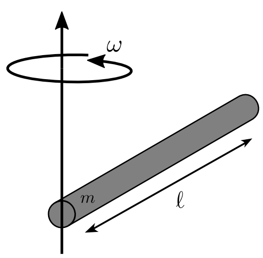
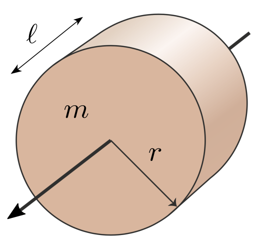
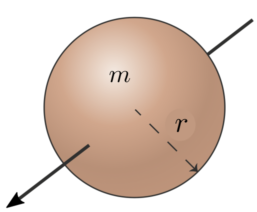
Lögmál 9.12. (Regla Steiners) Lítum á stjarfan hlut með heildarmassa m. Látum $\vec{s}_1$ og $\vec{s}_2$ vera samsíða snúningsása þannig að $\vec{s}_1$ liggur í gegnum massamiðju stjarfa hlutarins. Látum vegalengdina milli snúningsásanna vera d og látum hverfitregðuna um snúningsásinn $\vec{s}_1$ vera I_{cm} og hverfitregðuna um snúningsásinn $\vec{s}_2$ vera I. Þá gildir að:

$$I = I_{\text{cm}} + md^2$$



Mynd 9.5: Snúningsásarnir $\vec{s}_1$ og $\vec{s}_2$ eru samsíða og $\vec{s}_1$ liggur í gegnum massamiðju stjarfa hlutarins.

9.4 Hverfitregður algengra hluta

Mynd	Lýsing	Hverfitregða
	Punktmassi með massa m í fjarlægð r frá snúningsásnum.	$I = mr^2$
	Einsleit stöng af lengd ℓ með massa m um snúningsás sem liggur þvert í gegnum miðju stangarinnar.	$I_{\text{cm}} = \dfrac{1}{12}m\ell^2$
	Einsleit stöng af lengd ℓ með massa m um snúningsás sem liggur þvert í gegnum annan enda stangarinnar.	$I_{\text{endi}} = \dfrac{1}{3}m\ell^2$
	Gegnheil sívalningur með geisla r, lengd ℓ og massa m um snúningsás sem liggur í gegnum miðju sívalningsins.	$I_{\text{cm}} = \dfrac{1}{2}mr^2$
	Gegnheil kúla með geisla r og massa m um snúningsás sem liggur í gegnum miðju kúlunnar.	$I_{\text{cm}} = \dfrac{2}{5}mr^2$

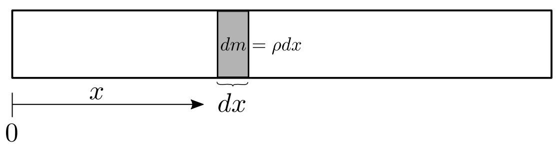
Tafla 9.1: Hverfitregður nokkurra algengra hluta

9.5 Útleiðslur á nokkrum hverfitregðum

Fyrir stöngina þá er þægilegt að byrja á því að reikna hverfitregðuna um annan enda stangarinnar. Við athugum að stöngin hefur línulegan eðlismassa $\rho = \frac{m}{\ell}$. Hugsum okkur nú að við skiptum stönginni niður í litla búta þar sem hver bútur hefur þykkt dx. Þá er massinn í hverjum bút gefinn með $dm = \rho dx$ og við fáum samkvæmt skilgreiningu að:

$$I = \int x^2 dm = \int_0^\ell x^2 \rho dx = \left[\frac{\rho}{3}x^3\right]_0^\ell = \frac{\rho}{3}\left(\ell^3 - 0^3\right) = \frac{\rho}{3}\ell^3 = \frac{1}{3}m\ell^2$$

Þar sem við notuðum í síðasta skrefinu að $\rho = \frac{m}{\ell}$.



Mynd 9.6: Stönginni er skipt í litla punktmassa með massa $dm = \rho dx$ í fjarlægð x frá enda stangarinnar.

Við getum síðan notað Reglu Steiners til að finna hverfitregðuna um massamiðju stangarinnar (hér erum við að nota að snúningsásarnir eru samsíða!). En þá höfum við að:

$$I_{\text{enda}} = I_{\text{cm}} + md^2$$

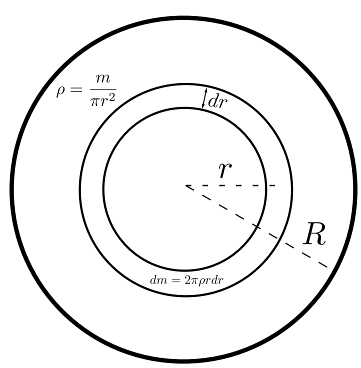
En í okkar tilviki er $d = \frac{\ell}{2}$ svo við fáum að:

$$I_{\text{cm}} = I - md^2 = I_{\text{enda}} - m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}m\ell^2 - \frac{1}{4}m\ell^2 = \frac{1}{12}m\ell^2.$$

Það er ágætt að minna sig á að lögmál Steiners segir okkur að hverfitregðan er alltaf lægst um massamiðjuna. Í okkar tilviki sjáum við að $\frac{1}{12} < \frac{1}{3}$ eins og við var að búast.

Við skulum núna finna hverfitregðu sívalningsins um ás sem liggur í gegnum massamiðjuna. Við skiptum gegnheila sívalningnum upp í litlar gjarðir af þekkt dr og í fjarlægð r frá miðju sívalningsins. Við athugum að eðlismassi sívalningsins á flatareiningu er þá gefinn með $\rho = \frac{m}{\pi R^2}$. Hver gjörð hefur þá massa $dm = 2\pi\rho r dr$ og við fáum að:

$$I = \int r^2 dm = \int_0^R 2\pi\rho r^3 dr = \left[\frac{1}{2}\pi\rho r^4\right]_0^R = \frac{\pi\rho}{2}\left(R^4 - 0^4\right) = \frac{1}{2}mR^2$$

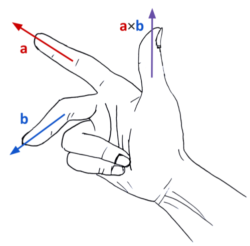


Mynd 9.7: Sívalningnum er skipt upp í þunnar gjarðir með þykkt dr í fjarlægð r frá miðju sívalningsins.

9.6 Kraftvægi

Skilgreining 9.13. Lítum á tvo vigra $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$. **Krossfeldi** vigranna $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er táknað með $\vec{a} \times \vec{b}$, og skilgreint þannig að:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$



Mynd 9.8: Við getum ákvarðað stefnu krossfeldisins með svokallaðri hægri handar reglu.

En eins og með innfeldi vigra þá er til þægilegri leið til þess að hugsa um krossfeldið. Við höfum nefnilega:

Regla 9.14. Látum $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Látum hornið milli vigranna $\vec{a}$ og $\vec{b}$ vera φ. Þá gildir að:

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = ab \sin \varphi.$$

Þar sem að $a = |\vec{a}|$ og $b = \left|\vec{b}\right|$.

Sönnun: Við getum valið hnitakerfið þannig að vigrarnir $\vec{a}$ og $\vec{b}$ liggi í xy-planinu. Þá er $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix}$ og eins er $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{pmatrix}$. Þá sjáum við að krossfeldi vigranna verður $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$. Skrifum síðan $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \cos \alpha \\ a \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b \cos \beta \\ b \sin \beta \\ 0 \end{pmatrix}$, þar sem α og β eru stefnuhorn vigranna $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Þá höfum við að:

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|^2 = (a_x b_y - a_y b_x)^2 = a^2 b^2 (\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta)^2 = a^2 b^2 \sin^2(\alpha - \beta) = a^2 b^2 \sin^2 \gamma$$

Þar sem að $\gamma = \alpha - \beta$ er hornið milli vigranna $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Þar með höfum við sýnt að $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = ab \sin \gamma$. □

Skilgreining 9.15. Lítum á stjarfan hlut sem verður fyrir krafti $\vec{F}$ í fjarlægð $\vec{r}$ frá snúningsás hlutarins. **Kraftvægi** kraftsins $\vec{F}$ er táknað með $\vec{\tau}$ og skilgreint þannig að:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Röðin skiptir máli! Við athugum að þá er stærðin á kraftvæginu gefin með $\tau = rF \sin \varphi$, þar sem φ er hornið milli $\vec{r}$ og $\vec{F}$. Við höfum síðan að 2. lögmál Newtons fyrir snúninga verður:

Lögmál 9.16. (2. lögmál Newtons fyrir snúninga)

$$\tau_{\text{heild}} = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n = I\alpha.$$

9.7 Hverfiþungi

Hliðstæða skriðþungans $p = mv$ er hverfiþunginn.

Skilgreining 9.17. Lítum á stjarfan hlut sem hefur hverfitregðu I og hornhraða ω um tiltekinn snúningsás. **Hverfiþungi** hlutarins um snúningsásinn er þá skilgreindur þannig að

$$L = I\omega.$$

Það er reyndar önnur leið til þess að skilgreina hverfiþunga, en hún gildir fyrir hvern stakan punktmassa. Við höfum nefnilega að:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Fyrir punktmassa. Við sjáum að ef $\vec{p}$ og $\vec{r}$ eru hornréttir þá fæst einmitt að $L = rmv = mvr$. En fyrir punktmassa höfum við einmitt líka að $L = I\omega = mr^2\frac{v}{r} = mvr$. Við sjáum líka að ef við skiptum hlut niður í litla búta þá höfum við að:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i v_i \frac{\vec{\omega}}{\omega} = \vec{\omega} \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = I\vec{\omega}.$$

Lögmál 9.18. (Hverfiþungavarðveisla) Heildarhverfiþungi kerfis er varðveittur ef engin ytri kraftvægi verka á kerfið. Með öðrum orðum, ef L_{fyrir} táknar hverfiþunga kerfis við tíma t_1 og L_{eftir} táknar hverfiþunga kerfis eftir tíma t_2. Þá gildir að:

$$L_{\text{fyrir}} = L_{\text{eftir}}.$$

Útleiðsla: Við athugum að:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \vec{p}}_{=\,0} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}.$$

Við ályktum því að ef $\vec{\tau} = 0$ þá er $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, þ.e.a.s. að hverfiþunginn varðveittur. □

9.8 Snúningsorka

Skilgreining 9.19. Lítum á hlut með geisla r sem snýst um massamiðju sína með hornhraða ω. Við segjum að hluturinn **rúlli án þess að renna** ef við höfum að:

$$v_{\text{cm}} = r\omega, \qquad \text{og} \qquad a_{\text{cm}} = r\alpha.$$

Það er algengt að fólk misskilji þetta þar sem að þetta lítur eins út og jafna sem við höfðum leitt út áður, nefnilega að $v = r\omega$. En sú niðurstaða gildir fyrir punkta á jaðri hringsins í fjarlægð r frá miðju hringsins. Þessi niðurstaða gildir hinsvegar fyrir hraðann á massamiðju hlutarins, v_{cm}. Það er hægt að leiða þetta út með því að skoða vegalengdina sem að massamiðjan ferðast á þeim tíma þar sem að hluturinn er að snúast einn hring. Þá höfum við að vegalengdin sem að punktur á gjörðinni ferðast er $s = 2\pi r$ og tíminn sem það tekur er $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Ef hluturinn rúllar án þess að renna þá er vegalengdin sem massamiðjan ferðast á þeim tíma einnig gefin með $s_{\text{cm}} = 2\pi r$ svo við fáum að

$$v_{\text{cm}} = \frac{s_{\text{cm}}}{T} = \frac{2\pi r}{\frac{2\pi}{\omega}} = r\omega.$$

Þegar hlutir snúast hafa þeir bæði hreyfiroku vegna þess hversu hratt hluturinn er að ferðast og hreyfiorku vegna þess hve hratt hluturinn er að snúast þessu má lýsa þannig að hreyfiorka hlutarins er gefin með:

Skilgreining 9.20. Lítum á stjarfan hlut með massa m og hverfitregðu I. Látum massamiðju hlutarins hafa línulegan hraða v_{cm} og látum hlutinn snúast um snúningsás sem liggur í gegnum massamiðjuna með hornhraða ω. Þá er hreyfiorka hlutarins gefin með:

$$K = K_{\text{hreyfi}} + K_{\text{snúnings}} = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{cm}}^2 + \frac{1}{2}I_{\mathrm{cm}}\omega^2$$

Að lokum skulum við athuga að:

Lögmál 9.21. Lítum á stjarfan hlut sem verður fyrir föstu kraftvægi $\vec{\tau}$ í fjarlægð $\vec{r}$ frá miðju snúningsássins vegna fasta kraftsins $\vec{F}$. Þá er vinna kraftvægisins, τ, við það að flytja hlutinn um horn $\Delta\theta$ gefin með:

$$W = \tau\Delta\theta.$$

Útleiðsla: Við vitum að $W = \Delta K$. Eina breytingin sem verður í hreyfiorkunni er í snúningsorkuliðnum. Við höfum því að:

$$W = \Delta K = \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}I\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)$$

En þar sem að vægið er fast þá höfum við að hornhröðun hlutarins, α, er föst. En þar með gilda hornstöðujöfnurnar okkar svo við höfum að:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

Við stingum því inn í vinnuna og fáum að:

$$W = \frac{1}{2}I\left((\omega_0 + \alpha t)^2 - \omega_0^2\right) = \frac{1}{2}I\left(2\omega_0\alpha t + \alpha^2 t^2\right) = I\alpha\left(\omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2\right) = I\alpha\Delta\theta = \tau\Delta\theta.$$

□

Samantekt

Línuleg hreyfing	**Snúningshreyfing**
$v = \frac{ds}{dt}$	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
$a = \frac{dv}{dt}$	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$2a\Delta s = v^2 - v_0^2$	$2\alpha\Delta\theta = \omega^2 - \omega_0^2$

Tafla 9.2: Stöðujöfnurnar fyrir snúning og línulega hreyfingu.

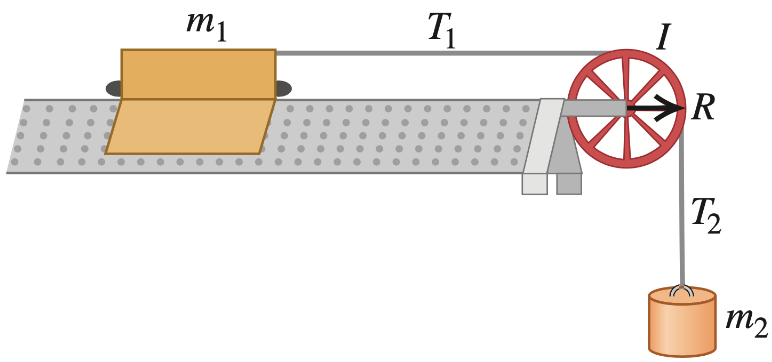
Línuleg hreyfing	**Snúningshreyfing**
$F = ma = \frac{dp}{dt}$	$\tau = I\alpha = rF\sin\varphi = \frac{dL}{dt}$
$F_{\text{heild}} = F_1 + \ldots + F_n$	$\tau_{\text{heild}} = \tau_1 + \ldots + \tau_n$
$p = mv$	$L = I\omega = rp\sin\varphi$
$K = \frac{1}{2}mv^2$	$K_{\text{snú}} = \frac{1}{2}I\omega^2$
$W = Fd\cos\gamma$	$W = \tau\Delta\theta$

Tafla 9.3: Hliðstæðar jöfnur fyrir línulega hreyfingu og snúningshreyfingu.

9.9 Sýnidæmi

Trissa sem er ekki massalaus

Skoðum núna aftur uppstillinguna í tilrauninni togkraftur og hröðun.



Við skrifum niður kraftajöfnurnar fyrir massana:

$$\begin{pmatrix} m_1 a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 - F_{\text{nún}} \\ \text{Þ} - m_1 g \end{pmatrix}$$

Síðan höfum við:

$$m_2 a = m_2 g - T_2$$

Þegar trissan er massalaus þá getum við sagt að $T_1 = T_2$. En núna verður þetta flóknara og við munum fá að $T_1 \neq T_2$ þar sem að trissan hefur massa. Við höfum eftirfarandi vægisjöfnu fyrir trissuna:

$$\tau_{\text{heild}} = I\alpha = T_2 R - T_1 R = (T_2 - T_1)R$$

Við notum síðan að $\alpha = \frac{a}{R}$ og þá höfum við eftirfarandi jöfnuhneppi:

$$\begin{cases} m_1 a = T_1 - \mu m_1 g \\ m_2 a = m_2 g - T_2 \\ Ia = (T_2 - T_1)R^2 \end{cases}$$

Við notum þá sama samlagningartrikk og áður. Við leggjum saman efri tvær jöfnurnar og fáum að:

$$(m_1 + m_2)\, a = (T_1 - T_2) + (m_2 - \mu m_1)\, g$$

Við færum síðan $(T_1 - T_2)$ yfir jafnaðarmerkið og umritum aðeins vægisjöfnuna þannig að $\frac{I}{R^2} a = T_2 - T_1$ og þá sjáum við að:

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right) a = (m_2 - \mu m_1)\, g \implies a = \left(\frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}\right) g$$

Við sjáum að þegar að trissan er massalaus, þ.e.a.s. þegar $I = 0$ þá fáum við úr vægisjöfnunni að $T_2 = T_1$ eins og við notuðum óspart fyrir jól. Við sjáum einnig að þegar $I = 0$ þá fáum við gömlu hröðunina $a = \left(\frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2}\right) g$ eins og við leiddum út fyrir jól fyrir massalausa trissu. Núna bætist hinsvegar við liður í nefnaranum. Það eina sem við eigum eftir á þessum tímapunkti er að finna hverfitregðu trissunnar (reyndar væri hægt að framkvæma tilraun til þess að ákvarða hverfitregðu trissunnar með uppsetningunni sem við notuðum í tilrauninni togkraftur og hröðun). Við vitum reyndar að hverfitregðan mun vera á forminu $I_{\text{trissa}} = \sigma m R^2$ þar sem σ er snúningsstuðull trissunnar. Það þýðir að við getum einfaldað jöfnuna enn frekar þannig að:

$$a = \left(\frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2 + \sigma m} \right) g$$

Þar sem að m er massi trissunnar og σ er snúningsstuðull hennar. Þessi trissa er reyndar undarleg í laginu (venjulega eru trissur bara sívalingslaga og með hverfitregðu $I = \frac{1}{2} m r^2$, þ.e.a.s. með snúningsstuðull $\sigma = \frac{1}{2}$). Við þurfum aðeins að hafa fyrir því að finna hverfitregðuna á þessari trissu. Hún hefur heildarmassann m og geislann R. Við sjáum við að hún er samsett úr þrem stöngum sem við snúum um miðju og gjörð sem er snúið um miðju. Ef allir hlutarnir eru jafnþykkir þá sjáum við að stangirnar hafa lengd $2R$ og gjörðin hefur ummál $2\pi R$ svo að línulegi eðlismassinn er gefinn með:

$$\rho = \frac{m}{3 \cdot 2R + 2\pi R} = \frac{m}{2R(3 + \pi)}$$

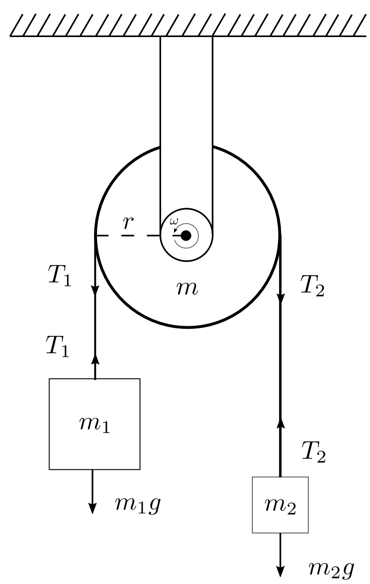
En þá er heildarvægið gefið með:

$$I = 3I_{\text{stöng}} + I_{\text{gjörð}} = 3 \cdot \frac{1}{12}(\rho 2R)R^2 + (\rho 2\pi R)R^2 = \left(\frac{1}{4(3+\pi)} + \frac{\pi}{(3+\pi)} \right) mR^2 = \frac{1 + 4\pi}{4(3+\pi)} mR^2$$

Við sjáum að $\sigma = \frac{1+4\pi}{4(3+\pi)} \approx 0.55$ í þessu tilviki.

Vél Atwoods þar sem trissan er hvorki massalaus né núningslaus

Lítum núna aftur á vél Atwoods þar sem að



$$m_1 a = m_1 g - T_1$$

$$m_2 a = T_2 - m_2 g$$

Loks höfum við vægisjöfnuna fyrir trissuna:

$$I\alpha = (T_1 - T_2) r$$

Við notum trikkið okkar og leggjum saman allar jöfnurnar (og notum að $\alpha = \frac{a}{r}$) til að fá:

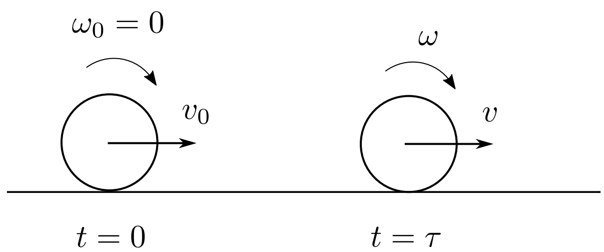
$$\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2}\right) a = (m_1 - m_2)\, g$$

Notum síðan að $I = \frac{1}{2}mr^2$ er hverfitregða trissunnar og fáum að:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m} g.$$

Keilukúla sem rennur áður en hún byrjar að rúlla án þess að renna

Ef þið hafið farið í keilu. Þá hafiði kannski tekið eftir því að keilukúlan byrjar fyrst á því að renna meðfram gólfinu þar til að rétt áður en að hún reikst á kúlukúlurnar þá byrjar hún að rúlla án þess að renna. Við ætlum að reyna að skýra þetta fyrirbæri hér. Hugsum okkur því keilukúlu með massa m og geisla r sem við köstum af stað þannig að massamiðja kúlunnar hefur línulegan hraða v_0 til að byrja með og hornhraði kúlunnar er $\omega_0 = 0$ í upphafi þegar kúlan leggur af stað niður keilubrautina. Við viljum ákvarða tímann τ sem líður þar til að kúlan byrjar að rúlla án þess að renna og vegalengdina x sem kúlan hefur ferðast þá.



Það sem mun valda snúninginum er kraftvægið frá núningskraftinum. Núna er kúlan að renna meðfram yfirborðinu svo að kúlan finnur fyrir hreyfinúningi $F_{\text{nún}} = \mu Þ = \mu mg$ og hann veldur vægi á kúluna sem er gefið með:

$$I\alpha = F_{\text{nún}} r$$

En $I = \sigma mr^2$ þar sem $\sigma = \frac{2}{5}$ svo við höfum að:

$$\sigma mr^2 \alpha = \mu mgr \implies \alpha = \frac{\mu}{\sigma}\frac{g}{r}.$$

Við höfum líka kraftajöfnuna fyrir keilukúluna:

$$\begin{pmatrix} ma \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_{\text{nún}} \\ Þ - mg \end{pmatrix}$$

Svo að hröðunin er gefin með $a = -\mu g$ svo að það hægist á kúlunni. Takið sérstaklega eftir því að það er ekki satt að $a = \alpha r = \frac{\mu}{\sigma} g$ því það gildir einungis þegar kúlan rúllar án þess að renna (þar erum við að nota að $v_{\text{cm}} = r\omega \implies a_{\text{cm}} = r\alpha$). Við sjáum að bæði hornhraði kúlunnar og hornhröðun hennar eru fastar stærðir svo að við vitum að við getum notað stöðujöfnurnar. Kúlan mun byrja að rúlla án þess að renna þegar $v_{\text{cm}} = r\omega$. Við notum því stöðujöfnurnar:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t, \qquad v_{\text{cm}} = v_0 + a_{\text{cm}} t$$

Þegar við setjum þetta saman þá fáum við að:

$$v_{\text{cm}} = r\omega \implies v_0 + a_{\text{cm}} t = r\left(\omega_0 + \alpha t\right) \implies t = \frac{v_0}{\alpha r - a_{\text{cm}}} = \frac{v_0}{\frac{\mu}{\sigma} g + \mu g} = \frac{\sigma}{1+\sigma}\frac{v_0}{\mu g}$$

Við ályktum því að tíminn, τ, sé gefinn með:

$$\tau = \frac{\sigma}{1+\sigma}\frac{v_0}{\mu g}$$

Heildarvegalengdin sem kúlan hefur þá ferðast á þeim tímapunkti er þá gefin með:

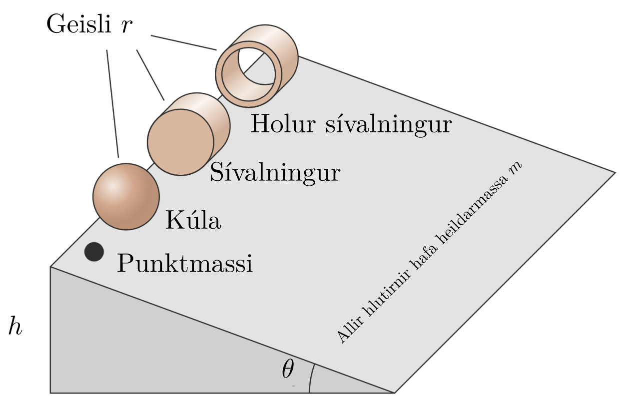
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = v_0\tau - \frac{1}{2}\mu g\tau^2.$$

Við getum metið tölulegt gildi á þessum stærðum fyrir dæmigerða keilubraut. Núningurinn er frekar lítill í slikri braut svo að $\mu = 0{,}1$ og segjum að við köstum kúlunni með upphafshraða $7{,}5\,\mathrm{m/s}$. Heildarlengd keilubrautar er um það bil $d = 20\,\mathrm{m}$. Loks er $\sigma = \frac{2}{5}$ fyrir keilukúlu svo við fáum að:

$$\tau = 2{,}18\,\mathrm{s}, \qquad \text{og} \qquad x = 14{,}0\,\mathrm{m}$$

Eftir það mun kúlan rúlla án þess að renna þar til hún rekst á keilupinnana.

Hver vinnur kapphlaupið?



Við höfum samkvæmt orkuvarðveislu að:

$$mgh = K_{\text{hreyfi}} + K_{\text{snú}} = \frac{1}{2}mv_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2}I_{\text{cm}}\omega^2$$

Við vitum að hlutirnir munu rúlla án þess að renna svo $v_{\text{cm}} = r\omega$ og ef við látum $I = \sigma m r^2$ þar sem σ er snúningsstuðull hlutanna þá fáum við að:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2}\sigma m r^2\left(\frac{v_{\text{cm}}}{r}\right)^2 = \frac{1}{2}(1+\sigma)\,mv_{\text{cm}}^2$$

En það gefur því að lokahraðinn þegar hlutirnir koma niður er gefinn með:

$$v_{\text{cm}} = \sqrt{\frac{2gh}{(1+\sigma)}}$$

Við sjáum því að því stærra sem σ er því hægar kemur hluturinn í mark. Við höfum því að $\sigma_p = 0$ fyrri punktmassann svo hann sigrar. Síðan er $\sigma_k = \frac{2}{5}$ fyrir kúluna svo hún kemur næst í mark. Fyrir sívalninginn er $\sigma_s = \frac{1}{2}$ svo hann kemur næst í mark og loks er $\sigma_{hs} = 1$ fyrir hola sívalninginn svo hann kemur síðast í mark. Ástæðan sem liggur þarna að baki er að stöðuorkan breytist bæði í línulega hreyfiorku og í snúningsorku. Hversu mikið breytist í snúningsorku er háð snúningsstuðli hlutarins. Því meira sem breytist í snúningsorku því hægar kemur hluturinn í mark. Ef við erum ekki sátt með þessa skýringu þá getum við gefið aðra útskýringu sem við skulum sýna að er jafngild þessari sem við vorum að gefa. Við athugum þá að krafturinn sem veldur snúningnum í fyrsta lagi er núningskrafturinn. Við höfum þá kraftvægisjöfnuna:

$$I\alpha = F_{\text{nún}} r$$

og við notum síðan að $\alpha = \frac{a}{r}$ og að $I = \sigma m r^2$ til að fá að:

$$F_{\text{nún}} = \sigma m a$$

Það er reyndar algengur misskilningur sem á sér stað á þessu stigi málsins. Margir halda að $F_{\text{nún}} = \mu m g \cos\theta$ þar sem að $\text{Þ} = m g \cos\theta$. Það fyrra er ekki satt. Besta leiðin til að muna eftir því að þetta gildir ekki er að átta sig á því að hér erum við að glíma við kyrrstöðunúninginn en ekki hreyfinúninginn. Það er vegna þess að það er bara einn punktur á gjörðinni sem snertir jörðina á hverjum tímapunkti. Ef að hluturinn rúllar án þess að renna þá er afstæður hraði þessa punkts miðað við jörðina núll (það er mikilvægt að sannfæra sjálfan sig um að það sé svo!). Það þýðir að $F_{\text{nún}} \leq \mu \text{Þ}$. Við vorum reyndar búin að sýna að $F_{\text{nún}} = \sigma m a$. Ef við skrifum þá niður kraftajöfnu fyrir hlutinn á meðann hann er að renna niður skábrettið þá er:

$$\begin{pmatrix} ma \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m g \sin\theta - F_{\text{nún}} \\ \text{Þ} - m g \cos\theta \end{pmatrix}$$

En þá gefur efri jafnan ásamt $F_{\text{nún}} = \sigma m a$ að

$$ma = m g \sin\theta - F_{\text{nún}} = m g \sin\theta - \sigma m a \implies a = \frac{1}{1+\sigma} g \sin\theta$$

Sem sýnir að hröðunin niður skábrettið er föst! Þetta gefur okkur því samkvæmt tímaóháðu stöðujöfnunni að hraðinn þegar hlutirnir koma niður er gefinn með:

$$v_{\text{cm}} = \sqrt{2a\Delta s} = \sqrt{2a \frac{h}{\sin\theta}} = \sqrt{\frac{2gh}{1+\sigma}}$$

Sem er það sama og við fengum með orkuvarðveislu! Þetta er frekar magnað því við vorum í rauninni að sýna að núningskrafturinn vinnur enga vinnu þegar hlutir rúlla án þess að renna! Þ.e.a.s. engin orka tapast úr kerfinu þegar hlutir rúlla án þess að renna. Við sjáum þá einnig að

$$F_{\text{nún}} = \frac{\sigma}{1+\sigma} m g \sin\theta \leq \mu \text{Þ} = \mu m g \cos\theta$$

Sem er frekar athyglisverð ójafna! Við getum skoðað hana á tvo mismunandi vegu. Við getum annars vegar velt fyrir okkur hvað gerist ef að við breytum horninu. Við sjáum að:

$$\tan\theta \leq \left(1 + \frac{1}{\sigma}\right)\mu \implies \theta_{\max} = \arctan\left(\mu + \frac{\mu}{\sigma}\right)$$

Þetta þýðir að ef að skábrettið hallar of mikið þá mun kúlan okkar byrja að renna. Við getum líka skoðað þetta út frá núningsstuðlinum. Þá sjáum við að

$$\mu \geq \frac{\sigma}{1+\sigma} \tan\theta.$$

Ef svo er ekki þá er núningurinn í fletinum ekki nógu mikill og kúlan byrjar að renna.

9.10 Dæmi

Hornstaða, hornhraði og hornhröðun

Dæmi 9.1. *(RK 12.1.)* BOSCH Höggborvélin PSB 700-2RE (sem fæst í BYKO) hefur hámarkssnúningshraða 3000 snú/mín. Það tekur borvélina 0,75 s að ná þeim snúningshraða úr kyrrstöðu.

(a) Hver er meðalhornhröðun borsins á þeim tíma?

(b) Hversu marga snúninga snýst borinn á þeim tíma sem það tekur hann að ná hámarkssnúningshraða?

Dæmi 9.2. *(RK 12.3.)* Loftviftur eru snjöll leið til að dreifa varma og koma hreyfingu á loft. Lítum á iðnaðarloftviftu sem hefur 142 cm þvermál og snýst með hraða 250 snú/mín. Hugsum okkur að við slökkvum á viftunni. Þá tekur það viftuna 60 s að stöðvast.

(a) Hver er meðalhornhröðun viftunnar frá því að slökkt er á viftunni og þar til viftan hefur stöðvast.

(b) Hver er hornhraði viftunnar, 18 s, eftir að það hefur verið slökkt á viftunni?

(c) Hversu marga snúninga snýst viftan áður en að hún stöðvast?

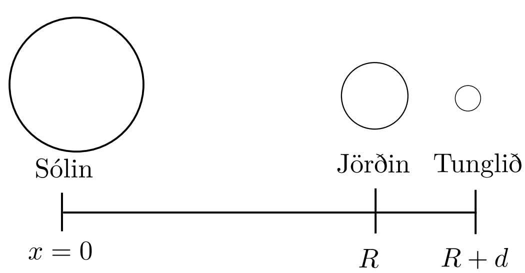
Dæmi 9.3. Geisladiskur varðveitir tónlist sem röð smárra dælda í yfirborði disksins $1{,}0 \cdot 10^{-7}$ m að dýpt. Dældunum er raðað eftir rás sem er eins og spírall að lögun frá innri að ytri brún disksins. Innri geisli spíralsins er 25 mm en sá ytri er 58 mm. Þegar diskur er spilaður er rásin skönnuð með föstum línulegum hraða sem er 1,25 m/s.

(a) Hver er hornhraði geisladisksins þegar verið er að lesa innsta hluta rásarinnar? En þegar ysti hluti rásarinnar er lesinn?

(b) Lengsti afspilunartími geisladisks er 74 mín. Hver er lengd rásar í þannig geisladiski ef við réttum úr henni og gerðum úr henni rás eftir beinni línu?

Massamiðja

Dæmi 9.4. *(RK 12.5.)* Jörðin hefur massa $M_J = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, tunglið hefur massa $M_T = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg og sólin hefur massa $M_S = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg. Meðalfjarlægðin milli jarðarinnar og tunglsins er $d = 3{,}84 \cdot 10^{8}$ m og meðalfjarlægðin milli jarðarinnar og sólarinnar er $R = 1\,\mathrm{AU} = 1{,}50 \cdot 10^{11}$ m. Hugsum okkur að Sólin, Jörðin og Tunglið liggi í beinni línu (í þessari röð). Veljum hnitakerfi þar sem að sólin er í $x = 0$, jörðin er í $x = R$ og tunglið er í $x = R + d$.

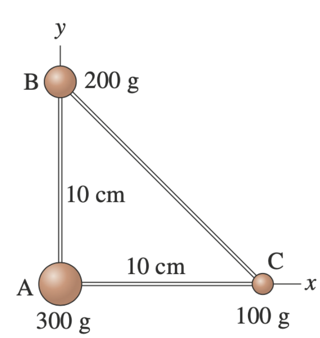


(a) Ákvarðið massamiðju jarðarinnar og tunglsins.

(b) Ákvarðið massamiðju sólarinnar og jarðarinnar.

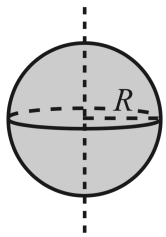
(c) Ákvarðið massamiðju kerfisins.

Dæmi 9.5. *(RK 12.6.)* Ákvarðið massamiðju eftirfarandi kerfisins hér til hægri þar sem að punktmassarnir þrír eru tengdir með massalausum vírum og punkturinn A er staðsettur í upphafspunkti hnitakerfisins.

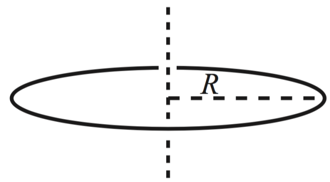


Hverfitregður og snúningsásar

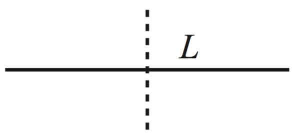
Dæmi 9.6. Finnið hverfitregður eftirfarandi hluta:



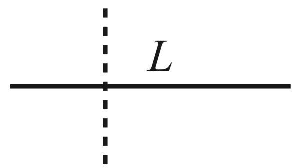
(a) Gegnheil kúla með massa m og geisla R miðað við ás gegnum miðju kúlunnar.



(b) Gjörð með massa m og geisla R miðað við ás gegnum miðjuna, hornrétt á flötinn.

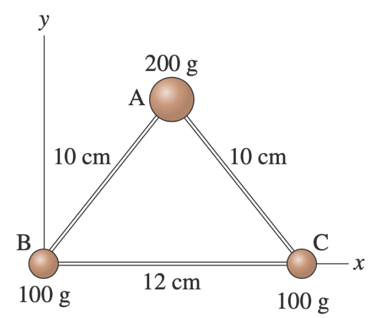


(c) Stöng með massa m af lengd L miðað við ás gegnum miðju stangarinnar.



(d) Stöng með massa m af lengd L miðað við ás í fjarlægð $L/3$ frá enda stangarinnar.

Dæmi 9.7. *(RK 12.15.)* Massarnir þrír sem sjást á myndinni hér til hægri eru festir saman með massalausum vírum.



(a) Ákvarðið massamiðju kerfisins.

(b) Ákvarðið hverfitregðu kerfisins um ás sem liggur inn í blaðið í gegnum punktinn A.

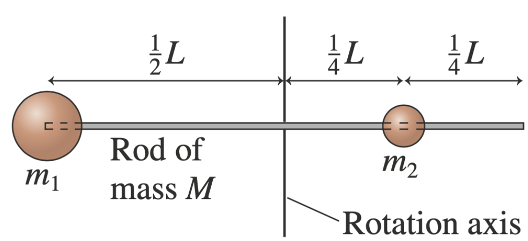
(c) Ákvarðið hverfitregðu kerfisins um ás sem liggur í gegnum punktana B og C.

Dæmi 9.8. *(RK 12.17.)* Brunavarnarhurð nokkur hefur massa $m = 20\,\mathrm{kg}$, hæð $h = 210\,\mathrm{cm}$, breidd $b = 84\,\mathrm{cm}$ og þykkt $þ = 10\,\mathrm{cm}$.

(a) Hver er hverfitregða hurðarinnar um lóðréttan ás sem liggur í gegnum hjarirnar?

(b) Hver er hverfitregða hurðarinnar um láréttan ás sem liggur þvert á hurðina í hæð $y = 12\,\mathrm{cm}$?

Dæmi 9.9. *(RK 12.51)* Á myndinni hér fyrir neðan er kúla með massa $m_1 = 2{,}0\,\mathrm{kg}$ fest við stöng með massa $M = 3{,}5\,\mathrm{kg}$ sem hefur lengd $L = 1{,}2\,\mathrm{m}$. Í fjarlægð $\frac{1}{4}L = 30\,\mathrm{cm}$ frá enda stangarinnar er kúla með massa $m_2 = 1{,}0\,\mathrm{kg}$.



(a) Ákvarðið hverfitregðu kerfisins um miðju stangarinnar.

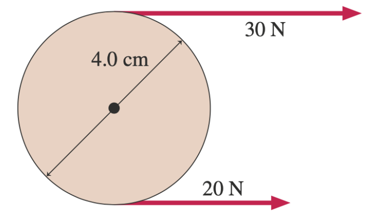
(b) Ákvarðið massamiðju kerfisins.

(c) Ákvarðið hverfitregðu kerfisins um snúningsás sem liggur í gegnum massamiðju kerfisins.

Dæmi 9.10. Uppbygging jarðarinnar er þannig að hún samanstendur kjarna með geisla $r_k = 3500\,\mathrm{km}$ sem hefur eðlismassa $\rho_k = 1{,}3 \cdot 10^4\,\mathrm{kg/m^3}$. Utan á kjarnanum liggur síðan möttullinn og jarðskorpan sem hafa eðlismassa $\rho_m = 4{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$. Geisli jarðarinnar er $r_m = 6400\,\mathrm{km}$. Hver er eðlismassi jarðarinnar, I_J, um ás sem liggur í gegnum miðju hennar?

Kraftvægi

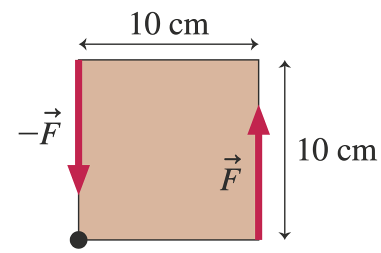
Dæmi 9.11. *(RK 12.18.)* Lítum á gegnheila sívalinginn hér til hægri sem hefur massa $m = 1{,}5\,\mathrm{kg}$ og geisla $r = 4{,}0\,\mathrm{cm}$.



(a) Ákvarðið kraftvægið, τ, sem verkar á sívalinginn um ás sem liggur út úr blaðinu.

(b) Notið 2. lögmál Newtons fyrir snúninga til þess að ákvarða hornhröðun gegnheila sívalingsins.

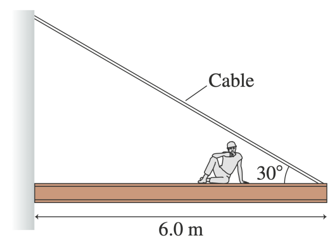
Dæmi 9.12. *(RK 12.19.)* Lítum á myndina hér til hægri. Þar má sjá gegnheilan rétthyrning sem hefur hliðarlengdir $\ell = 10\,\mathrm{cm}$ og massa $m = 150\,\mathrm{g}$. Krafti $F = 50\,\mathrm{N}$ er beitt beint upp á neðra hægra horn rétthyrningsins. Á sama tíma er jafnstórum (en gagnverkandi) krafti beitt beint niður á efra, vinstra horn rétthyrningsins.



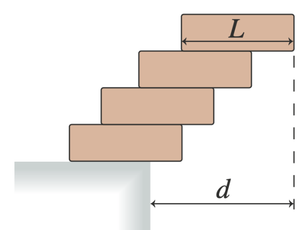
(a) Ákvarðið kraftvægið um ás sem liggur út úr blaðinu í gegnum neðri, vinstri hornpunkt rétthyrningsins.

(b) Ákvarðið kraftvægið um massamiðju rétthyrningsins.

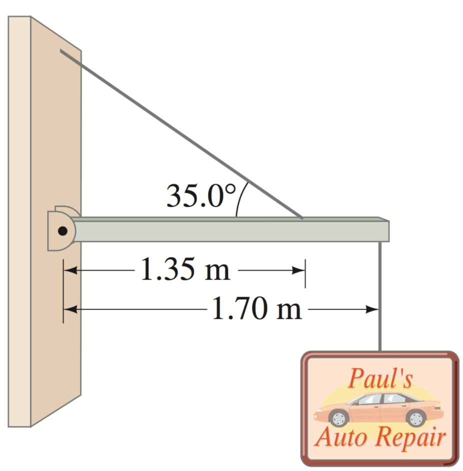
Dæmi 9.13. *(RK 12.59.)* Iðnaðarmaður með massa $m = 80\,\mathrm{kg}$ situr (að borða hádegismatinn sinn) í $2{,}0\,\mathrm{m}$ fjarlægð frá enda stálbjálksins (sem hefur heildarlengdina $6{,}0\,\mathrm{m}$). Massi stálbjálkans er $1450\,\mathrm{kg}$. Hver er togkrafturinn í vírnum sem heldur bjálkanum og iðnarðarmanninum uppi?



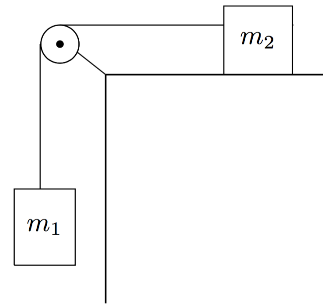
Dæmi 9.14. *(RK 12.61.)* Þið eruð að taka þátt í framkvæmdakeppni framhaldsskólanna. Þið hafið fengið 4 eins kubba með massa m og lengd L. Markmiðið ykkar er að reyna að stafla kubbunum þannig að þeir geti staðið eins langt fram af borðinu um vegalengd d eins og sést á mynd hér til hægri. Hvert er stærsta gildið á d?



Dæmi 9.15. Fyrir utan bifreiðaverkstæði Pálmfríðar hengur stórt auglýsingarskilti sem hefur massann $21{,}9\,\mathrm{kg}$. Skiltið er fest með vír í einsleita bómu af lengd $1{,}70\,\mathrm{m}$. Bóman hefur massa $15{,}8\,\mathrm{kg}$. Þar að auki er vír festur við bómuna $1{,}35\,\mathrm{m}$ frá enda veggjarins. Sá vír myndar $35°$ horn miðað við lárétt. Finnið togkraftana í báðum vírunum ásamt lóðréttum og láréttum kröftum sem hjarir bómunnar verka með á vegginn.



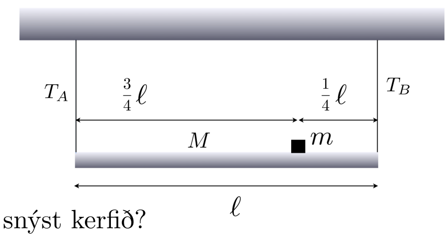
Dæmi 9.16. Kassi með massa $m_2 = 11\,\mathrm{kg}$ liggur á láréttum fleti með núningsstuðul $\mu = 0.3$. Kassinn er festur með vír við annan kassa með massa $m_1 = 18\,\mathrm{kg}$ yfir trissu með massa $m = 3{,}1\,\mathrm{kg}$ og geisla $r = 0{,}14\,\mathrm{m}$.



(a) Finnið hornhröðun trissunnar um ás sem liggur í gegnum miðju trissunnar út úr blaðinu.

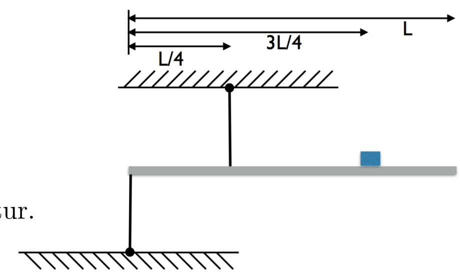
(b) Finnið hröðun kerfisins eftir að því er sleppt úr kyrrstöðu.

Dæmi 9.17. Einsleitum bjálka með massa $M = 16{,}8\,\mathrm{kg}$ og af lengd $\ell = 2{,}0\,\mathrm{m}$ er haldið uppi af tveimur eins vírum með togkröftum T_A og T_B. Lítill kubbur með massa $m = 5{,}2\,\mathrm{kg}$ situr á bitanum í fjarlægð $\frac{1}{4}\ell$ frá öðrum enda bjálkans.



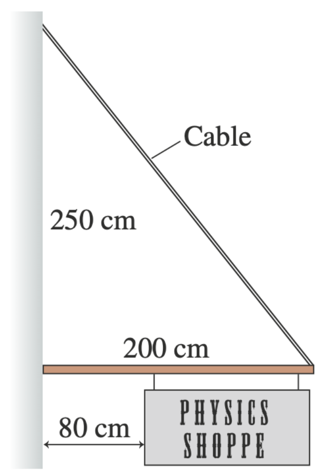
(a) Skrifið niður kraftajöfnur og kraftvægisjöfnur.
(b) Ákvarðið togkraftana T_A og T_B í vírunum.
(c) Nú klippum við vírinn sem hefur togkraft T_B. Hver verður hornhröðun kerfisins rétt eftir að klippt hefur verið á vírinn? Um hvaða snúningsás snýst kerfið?

Dæmi 9.18. Einsleitum planka með massa $m_p = 10\,\mathrm{kg}$ og lengd $L = 2{,}0\,\mathrm{m}$ er haldið í jafnvægi með tveimur massalausum vírum. Á plankanum stendur þar að auki líill kassi með massa $m_k = 5\,\mathrm{kg}$.

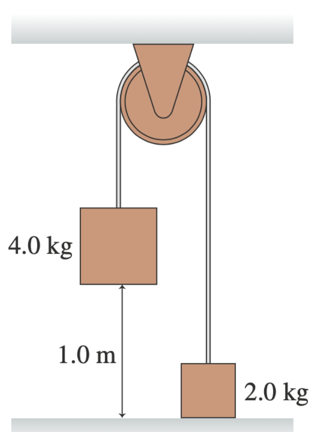


(a) Finnið togkraftinn T_1 í vírnum sem festur er niður í gólf.
(b) Finnið togkraftinn T_2 í vírnum sem festur er upp í loft.
(c) Nú klippum við vírinn sem festur er niður í gólf.
Finnið hornhröðun plankans rétt eftir að vírinn hefur verið klipptur.

Dæmi 9.19. *(RK 12.62.)* Skilti af lengd 120 cm hengur úr 5,0 kg bómu af lengd 200 cm. Massalaus vír er festur við enda bómunnar í vegginn 250 cm ofar eins og sjá má á myndinni hér til hægri. Hver er mesta þyngdin sem skiltið má hafa ef vírinn slitnar þegar togkrafturinn í strengnum fer yfir 300 N?



Dæmi 9.20. *(RK 12.86.)* Tveir massar, $m_1 = 4{,}0\,\mathrm{kg}$ og $m_2 = 2{,}0\,\mathrm{kg}$ eru festir með massalausu bandi yfir trissu (sem er hvorki núninglaus né massalaus!) með geisla $r = 12\,\mathrm{cm}$ og massa $m = 2{,}0\,\mathrm{kg}$. Vægi núningskraftsins er 0,50 Nm um hjólás trissunar (inn í blaðið). Hversu langur tími, t, líður frá því að kerfinu er sleppt úr kyrrstöðu og þar til að stóri massinn, m_1, lendir á jörðinni, 1,0 m neðar?



Hverfiþungi og hverfiþungavarðveisla

Dæmi 9.21. *(RK 12.46.)* Vínýlplata snýst með föstum hornhraða $33\frac{1}{3}$ snúninga á mínútu. Massi vínýlplötu er 180 g og geisli hennar er $r = 15{,}3\,\text{cm}$.

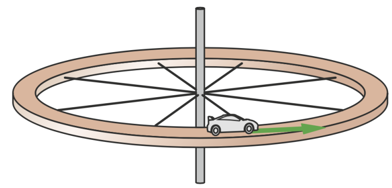
(a) Hver er hornhraði vínýlplötunnar?

(b) Hver er hverfitregða vínýlplötunnar?

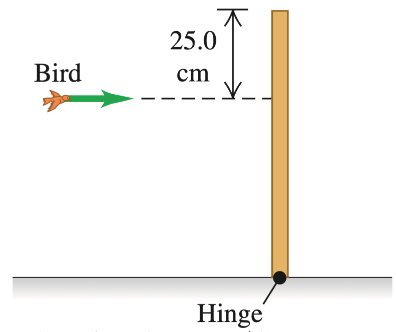
(c) Hver er hverfiþungi vínýlplötunnar?

(d) Nú er leirklessu með massa $m = 240\,\text{g}$ sleppt lóðrétt ofan á vínílplötuna í fjarlægð $d = 7{,}5\,\text{cm}$ frá miðju plötunnar. Hver verður sameiginlegur hornhraði kerfisins við það?

Dæmi 9.22. *(RK 12.88.)* Lítll rafmagnsbíll með massa $m = 200\,\text{g}$ keyrir af stað úr kyrrstöðu á brautinni sem sést á myndinni hér til hægri. Geisli brautarinnar er $r = 30\,\text{cm}$ og massi hennar er $M = 1{,}0\,\text{kg}$. Litlar dældir eru í brautinni fyrir dekk bílsins þannig að hann keyri ekki útaf brautinni. Hver verður hornhraði brautarinnar eftir að bíllinn nær hámarkshraða, $v = 0{,}75\,\text{m/s}$, afstætt miðað við brautina.



Dæmi 9.23. Fugl með massa $m = 500\,\text{g}$ flýgur með láréttum hraða $v_0 = 2{,}0\,\text{m/s}$ og klessir á lóðrétta stöng í fjarlægð $y = 25\,\text{cm}$ frá toppi einsleitarar stangar sem hefur heildarlengd $\ell = 0{,}75\,\text{m}$ og massa $M = 1{,}50\,\text{kg}$. Stöngin er fest með hjörum um neðsta punktinn og getur aðeins snúist um þann ás. Áreksturinn er því miður þannig að aumingja fuglinn rotast og fellur meðvitundarlaus beint niður (með lárétta hraðann $v = 0$) eftir áreksturinn. Hver verður hornhraði stangarinnar rétt eftir áreksturinn?



Dæmi 9.24. Tunglið er að fjarlægjast jörðina um 4 cm á ári. Þetta veldur því að jörðin fer að snúast hægar. Að lokum mun þetta leiða til þess að umferðartími tunglsins um jörðina verður sá sami og umferðartími jarðarinnar (samanber Karon, tungl Plútós). Í þessu dæmi munum við reyna að meta það hver lokasnúningshraði jarðarinnar verður. Látum M_J tákna massa jarðarinnar, M_T tákna massa tunglsins

(a) Finnið hornhraða jarðarinnar, ω_J, og hornhraða tunglsins, ω_T, um snúningsás jarðarinnar (núverandi).

(b) Finnið hverfitregðu jarðar, I_J, og núverandi hverfitregðu tungls, I_{T1}, um snúningsás jarðarinnar.

(c) Táknum nú lokahornhraða jarðarinnar með ω og lokafjarlægðina milli tungls og jarðar með d. Notið þyngdarlögmál Newtons (ásamt því að tunglið sé á hringhreyfingu um jörðina) til að sýna:

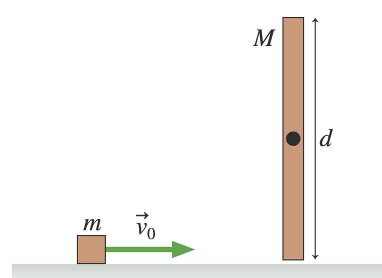
$$\omega^2 d^3 = GM_J$$

(d) Hverfiþungi kerfisins um snúningsás jarðarinnar er þá gefinn með $L_2 = I_{T2}\omega$ þar sem að I_{T2} táknar hverfitregðu tunglsins eftir færslu tunglsins. Hér höfum við gert ráð fyrir því að $I_J \ll I_{T2}$ og að því megi hunsa liðinn $I_J\omega$. Nýtið ykkur varðveislu hverfiþungans ásamt niðurstöðunni í lið **(c)** til að finna bæði lokahornhraðan ω og lokafjarlægðina d.

(e) Hversu langur yrði sólarhringurinn þá?

Dæmi 9.25. *(RK 12.78.)* Byssukúlu með massa $m = 10\,\text{g}$ og upphafshraða $v_0 = 400\,\text{m/s}$ er skotið inn í hurð með massa $M = 10\,\text{kg}$ í láréttri fjarlægð $x = 80\,\text{cm}$ frá hjörum dyranna. Hurðin hefur breidd $b = 95\,\text{cm}$, þykkt $þ = 5{,}0\,\text{cm}$ og hæð $h = 2{,}10\,\text{m}$. Byssukúlan festist í hurðinni við áreksturinn. Hver verður hornhraði hurðarinnar eftir áreksturinn?

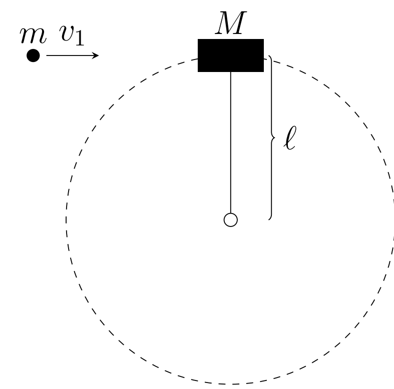
Dæmi 9.26. *(RK 12.89.)* Kubbur með massa m rennur eftir núninglausu yfirborði með upphafshraða v_0 þar til að hann lendir í fullkomlega fjaðrandi árekstri við neðsta hlutann á einsleitri stöng af lengd d og með massa M. Nagli hefur verið settur í miðja stöngina þannig að hún getur aðeins snúist um miðju sína. Hver verður hraði kubbsins eftir áreksturinn?



Snúningsorka og snúningsvinnulögmálið

Dæmi 9.27. *(RK 12.69.)* Gegnheill sívalingur með massa m, geisla r og af lengd ℓ, rúllar án þess að renna meðfram láréttum fleti með hraða 5,0 m/s þar til að hann kemur að skábretti sem hallar um $\theta = 22°$ miðað við lárétt. Hversu langt upp skábrettið kemst sívalingurinn áður en að hann byrjar að rúlla aftur niður?

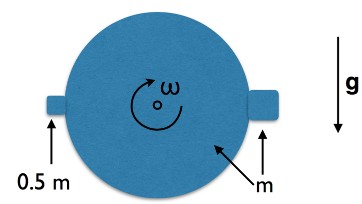
Dæmi 9.28. *(Vorpróf 2018)* Byssukúlu með massa $m = 4{,}8\,\mathrm{g}$ og hraða $v_1 = 400\,\mathrm{m/s}$ er skotið inn í kubb með massa $M = 2{,}2\,\mathrm{kg}$ sem hvílir á láréttum fleti. Núningsstuðullinn milli kubbsins og flatarins er $\mu = 0{,}10$. Kubburinn er festur við massalausa stöng og af lengd $\ell = 50\,\mathrm{cm}$. Kerfið snýst um enda stangarinnar eftir hringferli eins og sýnt er á mynd.



(a) Finnið hornhraða kerfisins, ω_0, rétt eftir að byssukúlan hefur stöðvast inni í kubbnum, t.d. með því að nota hverfiþungavarðveislu.

(b) Hversu langt ferðast kubburinn áður en núningur stöðvar hann? Svarið í radíönum og gráðum. Merkið inn á myndina staðsetningu þar sem kubburinn stöðvast.

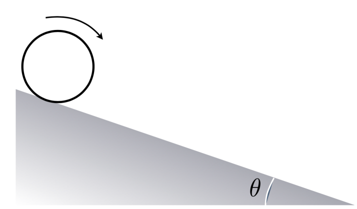
Dæmi 9.29. *(Vorpróf 2018)* Diskur með massa $m = 1{,}2\,\mathrm{kg}$ og geisla $r = 50\,\mathrm{cm}$ getur snúist um núningslausann, lárettan ás (sem stefnir út úr blaðinu). Á diskinn eru festir tveir kubbar eins og sjá má á mynd. Vinstra meginn er festur kubbur með massann $\frac{1}{2}m = 0{,}60\,\mathrm{kg}$ en hægra meginn er festur kubbur með massann $m = 1{,}2\,\mathrm{kg}$.



(a) Finnið hornhröðun kerfisins rétt eftir að því er sleppt úr kyrrstöðu.

(b) Notið orkuvarðveislu til þess að finna hornhraða kerfisins þegar þyngri massinn er í lægstu stöðu og sá léttari er í efstu stöðu.

Dæmi 9.30. Giftingarhringur með massa 6,0 g og geisla 7,0 mm rúllar án þess að renna úr kyrrstöðu niður skáplan sem hallar um $\theta = 23°$.

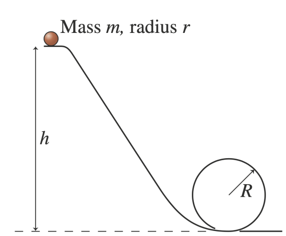


(a) Hver er hraði massamiðjunnar eftir að hringurinn hefur rúllað 2,0 m niður eftir skáplaninu?

(b) Hver er lágmarksnúningsstuðull μ milli plans og gjarðar til þess að gjörðin rúlli án þess að renna?

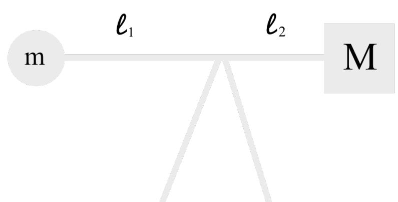
Dæmi 9.31. *(RK 12.74.)* Blýantur með massa m og lengd ℓ stendur lóðréttur á láréttu borði. Einhver ýtir örlítið við blýantinum þannig að hann byrjar að detta. Hver verður hornhraði blýantsins rétt áður en að hann lendir á jörðinni? Gerum ráð fyrir að neðsti hluti blýantsins haldist í snertingu við borðið þar til að hann lendir.

Dæmi 9.32. *(RK 12.75.)* Glerkúla með massa m og geisla r rúllar án þess að renna niður brautina sem sést á myndinni hér til hægri. Hvert er minnsta gildið á hæðinni, h, þannig að kúlan komist allan hringinn (með geisla R) án þess að detta í efstu stöðu?

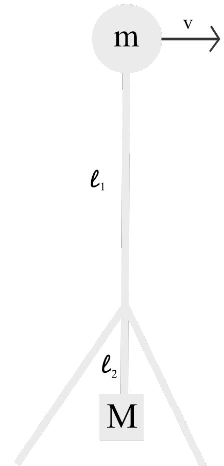


Erfið dæmi

Dæmi 9.33. Í borgarumsátrum miðalda voru valslöngvur ómissandi tæki, en þær valslöngvur sem við þekkjum best eiga líklegast rætur sínar að rekja til soldánadæmis Ayyubída á 12. öld e.o.t. (en voru mögulegu fundnar upp fyrst í Austur Rómarveldi á 11. öldinni) og breiddust þaðan út til Evrópu og Kína. Athugum eiginleika einfaldaðrar valslöngvu, sjá myndir 9.10 og 9.11. Valslöngvan virkar þannig að massalaus *armur* af lengd L er festur á *öxul* í hæð h frá jörðinni sem skiptir arminum í *kastarm* af lengd ℓ_1 og *fallarm* af lengd ℓ_2. Við enda kastarmsins er fest massalaus *karfa* sem geymir stein af massa m. Við fallarminn er fest *mótvigt* af massa M. Gerum ráð fyrir að armurinn bogni ekki, að enginn núningur sé í kerfinu og hunsum massa allra festinga og aukahluta sem gætu komið við sögu.



Mynd 9.10: Valslöngva fest í hvíldarstöðu.



Mynd 9.11: Valslöngva þegar steinninn sleppur.

(a) Finnið hverfitregðu kerfisins, I, um snúningsásinn, sem fall af m, M, ℓ_1, ℓ_2 og þekktum föstum.

(b) Steininum er sleppt þegar heildarvægið á arminn er núll. Finnið hornhraða steinsins, ω, þegar hann sleppur úr körfunni sem fall af m, M, ℓ_1, ℓ_2, I og þekktum föstum með því að nota orkuvarðveislu.

(c) Finnið hversu langt steinninn fer áður en hann lendir á jörðinni sem fall af $m, M, \ell_1, \ell_2, h, I$ og þekktum föstum.

(d) Látum massa steinsins vera 45 kg, massa mótvigtarinnar vera 2000 kg, lengd kastarmsins vera 12 m, lengd fallarmsins vera 2,0 m og hæð öxulsins vera 6,0 m. Hversu langt kastast steinninn?

Dæmi 9.34. Skoðum kústskaft með einsleita massadreifingu sem hefur lengd L og massa M. Gerum ráð fyrir að þykkt þess sé óveruleg og það standi lóðrétt í jafnvægi á sléttum fleti. Enginn núningur verkar milli flatar og kústskafts. Hleypt er af byssu nálægt skaftinu og henni haldið þannig að þegar byssukúlan festist í skaftinu er kúlan í hæð x yfir miðju skaftsins og hraði kúlunnar v er í lárétta stefnu. Massi byssukúlunnar er m.

(a) Notið skriðþungavarðveislu til að finna línulegan hraða skaftsins, u, eftir áreksturinn.

(b) Látum y_1 tákna massamiðju skaftsins fyrir áreksturinn og látum y_2 tákna massamiðju skaftsins eftir áreksturinn. Ákvarðið bæði y_1 og y_2 ásamt stærðinni $y := y_2 - y_1$.

(c) Finnið hverfiþungann, L_1, fyrir áreksturinn um ás sem liggur í gegnum nýju massamiðjuna.

(d) Finnið hverfitregðu stangarinnar, I_y, um ás í gegnum nýju massamiðjuna, sem fall af m, M, x, L.

(e) Nýtið ykkur hverfiþungavarðveislu til þess að finna hornhraða stangarinnar, ω, um massamiðjuna.

(f) Finnið x sem fall af L, M, m og v þ.a. neðsti punktur skaftsins verði kyrr rétt eftir áreksturinn.

Svör

(1) $\alpha = 410\,\mathrm{rad/s^2}$, $\frac{\Delta\theta}{2\pi} = 18{,}3$ snúningar. **(2)** $\alpha = -0{,}43\,\mathrm{rad/s^2}$, $\omega = 18{,}3\,\mathrm{rad/s}$, $\frac{\Delta\theta}{2\pi} = 125$ snúningar.

(3) $\omega_{\text{innri}} = 50\,\mathrm{rad/s}$, $\omega_{\text{ytri}} = 22\,\mathrm{rad/s}$, $s = 5{,}6\,\mathrm{km}$. **(4)** $x_a - R = \frac{M_T}{M_J+M_T}d = 4{,}67\cdot 10^6\,\mathrm{m}$, $x_b = \frac{M_J}{M_S+M_J}R = 4{,}50\cdot 10^5\,\mathrm{m}$, $x_c = \frac{M_J R + M_T(R+d)}{M_S+M_J+M_T} = 4{,}56\cdot 10^5\,\mathrm{m}$. **(5)** $\binom{x_{\mathrm{cm}}}{y_{\mathrm{cm}}} = \binom{1{,}7\,\mathrm{cm}}{3{,}3\,\mathrm{cm}}$. **(6)** $I_a = \frac{2}{5}mR^2$, $I_b = mR^2$, $I_c = \frac{1}{12}mL^2$, $I_d = \frac{1}{9}mL^2$. **(7)** $\binom{x_{\mathrm{cm}}}{y_{\mathrm{cm}}} = \binom{6{,}0\,\mathrm{cm}}{4{,}0\,\mathrm{cm}}$, $I_A = 2{,}0\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$, $I_{BC} = 1{,}3\,\mathrm{kg\,m^2}$. **(8)** $I_{\text{hjarir}} = 4{,}7\,\mathrm{kg\,m^2}$, $I_{\text{lárétt}} = 24{,}6\,\mathrm{kg\,m^2}$. **(9)** $I_{\text{miðja}} = 1{,}23\,\mathrm{kg\,m^2}$, $x_{\mathrm{cm}} = -14\,\mathrm{cm}$, $I_{\mathrm{cm}} = 1{,}1\,\mathrm{kg\,m^2}$. **(10)** $I_J = 8{,}0\cdot 10^{37}\,\mathrm{kg\,m^2}$.

(11) $\tau_{\text{heild}} = -0{,}40\,\mathrm{Nm}$, $\alpha = 330\,\mathrm{rad/s^2}$. **(12)** $\tau_a = 5{,}0\,\mathrm{Nm}$, $\tau_b = 5{,}0\,\mathrm{Nm}$. **(13)** $T = 15.000\,\mathrm{N}$.

(14) $d_n \leq \frac{(n+1)}{4}\ell$. **(15)** $T = 642\,\mathrm{N}$, $F_x = 526\,\mathrm{N}$, $F_y = 1{,}98\,\mathrm{N}$. **(16)** $a = 4{,}73\,\mathrm{m/s^2}$, $\alpha = 33{,}8\,\mathrm{rad/s^2}$.

(17) $T_A = 95\,\mathrm{N}$, $T_B = 121\,\mathrm{N}$, $\alpha = 7{,}1\,\mathrm{rad/s^2}$. **(18)** $T_1 = 196\,\mathrm{N}$, $T_2 = 344\,\mathrm{N}$, $\alpha = 9{,}1\,\mathrm{rad/s^2}$.

(19) $m_s \leq 30{,}5\,\mathrm{kg}$. **(20)** $t = 0{,}95\,\mathrm{s}$. **(21)** $\omega_1 = 3{,}49\,\mathrm{rad/s}$, $I_1 = 2{,}11\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$, $L_1 = 7{,}35\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$, $\omega_2 = 2{,}12\,\mathrm{rad/s}$. **(22)** $\omega_{\text{braut}} = 0{,}42\,\mathrm{rad/s}$. **(23)** $\omega_2 = 1{,}78\,\mathrm{rad/s}$. **(24)** $\omega_J = 7{,}27\cdot 10^{-5}\,\mathrm{rad/s}$, $\omega_T = 2{,}69\cdot 10^{-6}\,\mathrm{rad/s}$, $I_J = 8{,}0\cdot 10^{37}\,\mathrm{kg\,m^2} \approx 9{,}7\cdot 10^{37}\,\mathrm{kg\,m^2}$, $I_{T_1} = 1{,}1\cdot 10^{40}\,\mathrm{kg\,m^2} \gg I_J$, $L_1 = 3{,}5\cdot 10^{34}\,\mathrm{kg\,m^2}$, $d = 5{,}7\cdot 10^8\,\mathrm{m} = 1{,}5R_T$, $\omega = 1{,}5\cdot 10^{-6}\,\mathrm{rad/s}$, $T = 49$ dagar. **(25)** $\omega_2 = 1{,}06\,\mathrm{rad/s}$. **(26)** $v = \frac{m-\frac{1}{3}M}{m+\frac{1}{3}M}v_0$.

(27) $h = 1{,}9\,\mathrm{m}$. **(28)** $\omega_0 = 1{,}74\,\mathrm{rad/s}$, $\Delta\theta = 0{,}77\,\mathrm{rad} = 44°$. **(29)** $\alpha = 4{,}91\,\mathrm{rad/s^2}$, $\omega = 3{,}1\,\mathrm{rad/s}$.

(30) $v_{\mathrm{cm}} = 4{,}43\,\mathrm{m/s}$, $\mu \geq \frac{\sigma}{1+\sigma}\tan\theta = 0{,}21$. **(31)** $\omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}$. **(32)** $h > \frac{27}{10}R$. **(33)** $I = 14.500\,\mathrm{kg\,m^2}$, $\omega = 2{,}16\,\mathrm{rad/s}$, $x = 49{,}5\,\mathrm{m}$. **(34)** $u = \frac{mv}{m+M}$, $y = \frac{mx}{m+M}$, $L_1 = \frac{mM}{m+M}vx$, $I_y = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{mM}{m+M}x^2$, $\omega = \frac{L_1}{I_y}$, $x = \frac{1}{6}L$.

Kafli 10

Flæðiefni og þrýstingur

10.1 Eðlismassi

Skilgreining 10.1. Lítum á einsleitan hlut með massa m og rúmmál V. **Eðlismassi** hlutarins er táknaður með ρ og skilgreindur sem massi hlutarins á rúmmálseiningu þ.e.

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Við sjáum að víddir eðlismassans eru kg/m^3. Í eftirfarandi töflu höfum við síðan tekið saman nokkra þekkta eðlismassa:

Efni	**Eðlismassi** [kg/m^3]
Platína	21.400
Gull	19.300
Kvikasilfur	13.600
Blý	11.300
Silfur	10.500
Kopar	8900
Járn	7800
Stál	7800
Ál	2700
Steinsteypa	2000
Blóð	1060
Sjór	1035
Vatn (4 °C)	1000
Ís	920
Olía	900
Bensín	680
Gufa (100 °C)	598
Andrúmsloft	1,29
Helíum	0,18

Tafla 10.1: Eðlismassar nokkurra efna við 0 °C og 1 atm (nema þar sem annað er tekið fram)

Ef við þekkjum rúmmál hlutarins og eðlismassa hans þá er auðvelt fyrir okkur að reikna massa hlutarins með því að umrita skilgreininguna á eðlismassanum. Þá höfum við að:

$$m = \rho V.$$

10.2 Þrýstingur

Þrýstingur og kraftur eru náskyld fyrirbæri, í daglegri umfjöllun virðist oft vera lítill munur á þessum tveim fyrirbærum. Það er hinsvegar munur, sem við munum skýra núna:

Skilgreining 10.2. Lítum á flöt með flatarmál A sem á verkar kraftur $\vec{F}$. **Þrýstingurinn** sem hluturinn finnur fyrir er táknaður með P og skilgreindur þannig að:

$$P = \frac{F_\perp}{A},$$

þar sem $F_\perp$ er sá hluti kraftsins $\vec{F}$ sem verkar þvert á yfirborðsflatarmálið A.

Við sjáum að víddir þrýstings eru $\mathrm{N/m^2}$ en sú stærð hefur fengið heitið Pascal og er táknuð með $\mathrm{Pa} = \mathrm{N/m^2}$. Þetta er oft umritað þannig að:

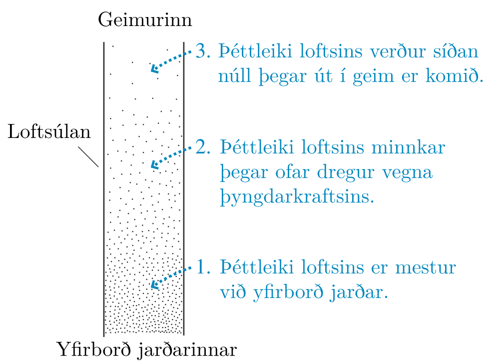
$$F_\perp = PA.$$

10.3 Staðalloftþrýstingur

Loftið sem við öndum að okkur er flæðiefni. Þar sem að þéttleiki loftsins er miklu minni heldur en t.d. þéttleiki vatnsins þá veitir það okkur minni viðstöðu þegar við hreyfum okkur í gegnum það. En það er samt þung byrði sem hvílir ofan á okkur vegna loftsins sem er ofan á herðum okkar. Heildarþrýstingurinn vegna þyngdar loftsins sem hvílir ofan á herðum okkar er gefinn með:

Skilgreining 10.3. **Staðalloftþrýstingur** er þrýstingurinn, P_0, sem við finnum fyrir vegna loftsúlunnar sem hvílir ofan á okkur. Gildi hans er gefið með:

$$P_0 = 1\,\mathrm{atm} = 101{,}3\,\mathrm{kPa} = 1{,}013 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}.$$



Mynd 10.1: Skýringarmynd af loftsúlunni sem sýnir hvernig að þéttleiki loftsins minnkar þegar ofar dregur. Heildarmassinn sem hvílir ofan á herðum okkur vegna súrefnissameindanna ákvarðar staðalþrýstinginn.

Þetta er reyndar smá misleiðandi því einföld sál gæti haldið að að heildarkrafturinn sem verkar á herðar okkar, ef herðar okkar hafa yfirborðsflatarmál $A = 4{,}0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^2$, væri gefinn með:

$$F = P_0 A = 1{,}013 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \cdot 4{,}0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^2 = 4000\,\mathrm{N}.$$

En það myndi þá samsvara því að massi $m = \frac{F}{g} = 410\,\mathrm{kg}$ væri lagður ofan á herðar okkar - sem getur ekki staðist! Hvað er að gerast? Það sem gleymist oft í þrýstingsumræðunni er að það er ekki þrýstingurinn sjálfur sem skiptir máli heldur þrýstingsbreytingin. Í þessu tilviki þrýstingsbreytingin yfir og undir herðunum á okkur (reyndar er þrýstingurinn meiri við neðra borð axla okkar svo að heildakrafturinn sem við finnum fyrir vegna þrýstingsins er upp en ekki niður!).

10.4 Lögmál Pascals

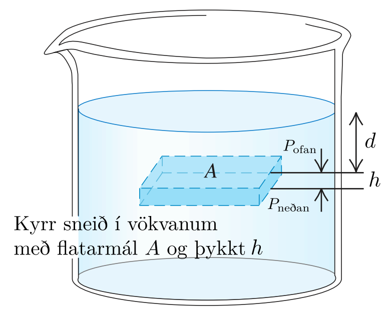
Skoðum vökva með eðlismassa $\rho_{\text{vökvi}}$. Við gerum ráð fyrir að vökvinn sé um það bil kyrr. Skoðum lárétta sneið af vökvanum sem hefur þverskurðarflatarmáli A og hæð h. Látum efri brún kassans sem við skoðum vera við dýpt d en neðri brúnina vera við dýpt $d + h$. Þá er þrýstingurinn á efra borð sneiðarinnar vegna loftsúlunnar og vökvans sem liggur fyrir ofan þverskurðarflatarmálið fenginn með:

$$P_{\text{ofan}} = P_0 + \frac{\rho_{\text{vökvi}} g d A}{A} = P_0 + \rho_{\text{vökvi}} g d.$$

Eins er þrýstingurinn á neðra borð sneiðarinnar gefið með:

$$P_{\text{neðan}} = P_0 + \frac{\rho_{\text{vökvi}} g (d + h) A}{A} = P_0 + \rho_{\text{vökvi}} g (d + h).$$

Þar sem að dýptin var að aukast um h. En þar með sjáum við að þrýstingsbreytingin er gefin með:



Mynd 10.2: Kyrr sneið í vökvanum af þykkt h á dýpi d sem hefur þverskurðarflatarmál A.

$$\Delta P = P_{\text{neðan}} - P_{\text{ofan}} = (P_0 + \rho_{\text{vökvi}} g (d + h)) - (P_0 + \rho_{\text{vökvi}} g d) = \rho_{\text{vökvi}} g h = \rho_{\text{vökvi}} g \Delta d.$$

Þar sem að $h = \Delta d$ er dýptarbreytingin í vökvanum. Við sjáum að þrýstingurinn eykst með vaxandi dýpt. Við höfum þar með sýnt að:

Lögmál 10.4. (Lögmál Pascals) Lítum á vökva með eðlismassa $\rho_{\text{vökvi}}$. Látum P_1 tákna þrýsting vökvans á dýpi d_1 og látum P_2 tákna þrýsting vökvans á dýpi d_2. Þá gildir að þrýstingsbreytingin er gefin með:

$$\Delta P = \rho_{\text{vökvi}} g \Delta d.$$

Í raun höfum við sýnt mun almennari niðurstöðu heldur en lögmál Pascals hér að ofan. Við höfum sýnt að þrýstingurinn P við dýpið d í vökva með eðlismassa $\rho_{\text{vökvi}}$ er gefinn með:

$$P = P_0 + \rho_{\text{vökvi}} g d$$

þar sem P_0 táknar staðalloftþrýstinginn. Það sem er merkilegt við þessa framsetningu er að við sjáum að þrýstingurinn helst fastur alls staðar við sama dýpi í vökvanum!

10.5 Lögmál Arkímedesar

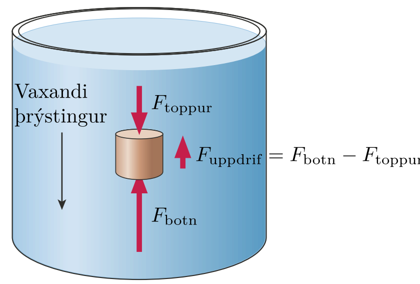
Fræg er sagan af Arkímedesi og krúnu Hiero II Sýrakúsukonungs. Hiero hafði fengið gullsmið nokkurn til þess að smíða kórónu handa sér. En fúskarinn blandaði silfri í blönduna og hélt þannig eftir hluta gullsins. Útaf undarlegri lögun kórónunnar reyndist erfitt að mæla rúmmál hennar (og þar með eðlismassa hennar). Það var ekki fyrr en Arkímedes uppgötvaði sniðuga leið til þess að mæla rúmmál óreglulegra hluta með því að sökkva þeim í vatn sem það komst upp um svikahrappinn. Sagan segir að Arkímedes hafi eftir uppgötvunina hlaupið nakinn um stræti Sýrakúsu og öskrað: *„Eureka!“* sem á forngrísku merkir *„Ég hef fundið“*. Í daglegu tali þá er lögmál Arkímedesar oftast sett fram með eftirfarandi hætti: *„Sérhver hlutur sem sökkt er að hluta til eða alveg í vökva léttist um það sem nemur þyngd þess vökva sem hann ryður frá sér.“* En formlega höfum við að:

Lögmál 10.5. (Lögmál Arkímedesar) Lítum á hlut með eðlismassa ρ_{hlutur} og rúmmál V_{hlutur} sem sökkt er í vökva með eðlismassa $\rho_{\text{vökvi}}$ sem umlykur hlutinn. Þá verkar á hlutinn uppdrifskraftur, F_{uppdrif}, vegna þrýstingsmunarins, sem er gefinn með:

$$F_{\text{uppdrif}} = \rho_{\text{vökvi}} V_{\text{hlutur}} g.$$

Útleiðsla: Við skulum leiða niðurstöðuna út fyrir kassa með eðlismassa ρ_{hlutur} og rúmmál $V_{\text{hlutur}} = Ah$ þar sem A er þverskurðarflatarmál kassans og h er hæð hans. Hugsum okkur nú að við dýfum kassanum í vökva með eðlismassa $\rho_{\text{vökvi}}$. Þá er ljóst að á neðra borð kassans verkar meiri kraftur vegna þrýstingsins heldur en á efra borðið þar sem að þrýstingurinn er meiri neðar í vökvanum. Látum y_{botn} tákna hæðina sem botn kassans er við og látum y_{toppur} tákna hæðina sem toppur kassans er við. Þá höfum við að:

$$\begin{aligned} F_{\text{uppdrif}} &= F_{\text{botn}} - F_{\text{toppur}} \\ &= AP_{\text{botn}} - AP_{\text{toppur}} \\ &= A\Delta P \\ &= A\rho_{\text{vökvi}} g \Delta y \\ &= \rho_{\text{vökvi}} V_{\text{hlutur}} g. \qquad \square \end{aligned}$$



Mynd 10.3: Uppdrifskrafturinn orsakast af þrýstingsmuninum við efra og neðra borð hlutarins.

10.6 Inngangur að vökvaaflfræði

Skilgreining 10.6. Við segjum að streymi vökva sé

(i) **lagstreymt** ef hraði vökvans er lítill og stefna hans breytist lítið sem fall af staðsetningu.

(ii) **iðustreymt** ef hraði vökvans er mikill og stefna hans breytist ört sem fall af staðsetningu.

Skilgreining 10.7. Við segjum að vökvi sé **ósamþjappanlegur** ef að eðlismassi vökvans, $\rho(\vec{r}, t) = \rho$, er fasti sem fall af bæði staðsetningu og tíma.

Í alvörunni eru ekki til nein ósamþjappanleg flæðiefni. Þetta er hinsvegar mjög góð nálgun í flestum þeim tilvikum sem við munum skoða.

Skilgreining 10.8. Við segjum að vökvi sé **seigjulaus** ef að það er enginn núningur á milli sameinda vökvans.

Aftur, þá er tæknilega séð ekki til neitt seigjulaust flæðiefni. Hinsvegar þá er ofurflæðandi helíum svo gott sem seigjulaust við 2 K.

Skilgreining 10.9. Vökvi er sagður vera **kjörvökvi** ef hann er lagstreyminn, ósamþjappanlegur og seigjulaus.

10.7 Samfeldnilögmálið

Skilgreining 10.10. Lítum á vökva sem sem streymir hornrétt í gegnum yfirborð A með hraða v. **Flæði** vökvans, er táknað með Φ, og skilgreint þannig að:

$$\Phi = Av.$$

Það er oftast þægilegast að ímynda sér vatnsflæði í gegnum vatnsrör sem hefur breytilega þykkt og hæð þegar maður leiðir út hinar ýmsu niðurstöður í vökvafræði. Hinsvegar, þá gilda niðurstöðurnar í mun almennara samhengi.

Lögmál 10.11. Flæði, Φ, í ósamþjappanelgum vökvum, er varðveitt. M.ö.o. höfum við að:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Útleiðsla: Skoðum lítinn tíma dt. Þá mun vatnið hafa streymt inn um pípuna um vegalengd $\Delta x_1 = v_1 dt$ en á út um pípuna um vegalengd $\Delta x_2 = v_2 dt$. En þá er massi vatnsins sem kemur inn í pípuna gefið með

$$m_{\text{inn}} = \rho_{\text{vökvi}} A_1 \Delta x_1 = \rho_{\text{vökvi}} A_1 v_1 dt.$$

Það sem streymir út er síðan gefið með:

$$m_{\text{út}} = \rho_{\text{vökvi}} A_2 \Delta x_2 = \rho_{\text{vökvi}} A_2 v_2 dt.$$

En massi vatnsins sem fer inn verður að vera jafn massa vatnsins sem fer út svo við höfum að:

$$m_{\text{inn}} = m_{\text{út}} \implies \rho_{\text{vökvi}} A_1 v_1 dt = \rho_{\text{vökvi}} A_2 v_2 dt \implies A_1 v_1 = A_2 v_2.$$

Sem sýnir að flæði vökvans, Φ, er varðveitt stærð.

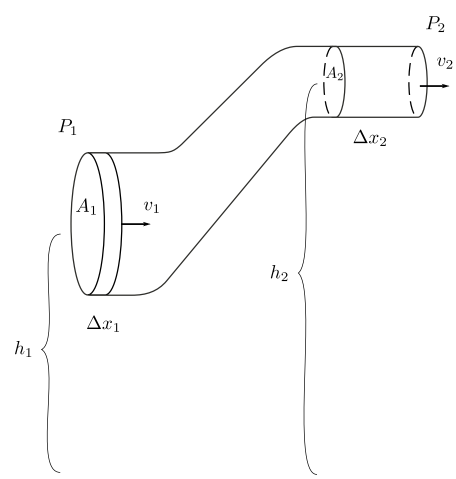
$\square$

10.8 Lögmál Bernoullis

Lögmál 10.12. (Lögmál Bernoullis) Lítum á sneið í kjörvökva þar sem að þrýstingurinn er P_1 og vökvinn streymir í gegnum yfirborð A_1 með hraða v_1. Lítum á aðra sneið í vökvanum þar sem að þrýstingurinn er P_2 og vökvinn streymir í gegnum yfirborð A_2 með hraða v_2. Þá er stærðin $P + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2$ varðveitt, eða með öðrum orðum:

$$P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Útleiðsla: Skoðum flæði vökvans við lítinn tíma dt. Þá hefur vökvinn færst inn í rörið um vegalengd $\Delta x_1 = v_1 dt$ og út úr rörinu um vegalengd $\Delta x_2 = v_2 dt$. Við athugum að samkvæmt samfelldnilögmálinu þá er rúmmál vökvans sem yfirgefur rörið jafnt, þ.e.



$$A_1 \Delta x_1 = A_1 v_1 dt = A_2 v_2 dt = A_2 \Delta x_2.$$

Þrýstingurinn í rörinu þegar vatnið er að streyma inn í pípuna vinnur þá vinnu á vatninu sem jafngildir:

$$W_1 = F_1 \Delta x_1 = P_1 A_1 \Delta x_1, \qquad W_2 = -F_2 \Delta x_2 = -P_2 A_2 \Delta x_2.$$

Þar sem að $\vec{F}_2$ og $\Delta \vec{x}_2$ eru gagnstefna. En þá gefur vinnulögmálið að:

$$\begin{aligned}
W_{\text{heild}} = \Delta K &\implies W_1 + W_2 + W_g = \Delta K \\
&\implies P_1 A_1 \Delta x_1 - P_2 A_2 \Delta x_2 - m_1 g \Delta h = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \\
&\implies P_1 A_1 \Delta x_1 - P_2 A_2 \Delta x_2 - \rho A_1 \Delta x_1 g \Delta h = \frac{1}{2}\rho A_2 \Delta x_2 v_2^2 - \frac{1}{2}\rho A_1 \Delta x_1 v_1^2 \\
&\implies P_1 - P_2 - \rho g \Delta h = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 \\
&\implies P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2.
\end{aligned}$$

$\square$

10.9 Dæmi

Þrýstingur

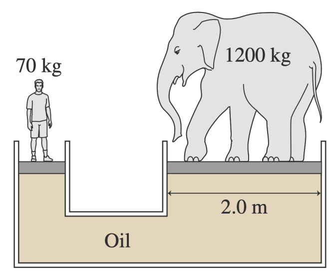
Dæmi 10.1. *(RK 14.6.)* Hæsti punktur yfirborðs jarðar er Everestfjall, 8850 m yfir sjávarmáli, en sá lægsti í Challengergjá í Maríanadjúpálnum í Kyrrahafinu, á 10.994 m dýpi undir sjávarmáli. Hver er þrýstingurinn á botni Maríanadjúpálsins? (Eðlismassi sjávar er $\rho_{\text{sjór}} = 1030\,\text{kg/m}^3$).

Dæmi 10.2. *(RK 14.9.)* Eðlismassi vants er $\rho_{\text{vatn}} = 1000\,\text{kg/m}^3$ en eðlismassi olíu er $\rho_{\text{olía}} = 950\,\text{kg/m}^3$. Það þýðir að olía flýtur ofan á vatni. Í stórum vatnstanki hefur olíu verið hellt út í tankinn. Vatnsyfirborðið er í hæð 120 cm en olían hefur þykkt 50 cm. Hver er þrýstingurinn á botni vatnstanksins?

Dæmi 10.3. *(RK 14.10.)* Kafbátur nokkur hefur glugga með geisla $r = 10\,\text{cm}$ og þykkt $þ = 8{,}0\,\text{cm}$. Framleiðandi kafbátsins segir að glerið geti þolað heildarkraft $F_{\text{heild}} = 2{,}0 \cdot 10^6\,\text{N}$. Hver er mesta dýpt sem kafbáturinn má kafa ef þrýstingurinn inni í kafbátnum er alltaf 1 atm.

Dæmi 10.4. Bergljót Vilbertsdóttir keyrir bílnum sínum fram af bjargi. Þegar bíllinn hefur sokkið niður á 6,0 m dýpi reynir Bergljót að opna bílhurðina sem hefur flatarmál $0{,}76\,\text{m}^2$. Hversu miklum krafti þarf Bergljót að beita á bílhurðina til þess að opna hana ef þrýstingurinn inni í bílnum er 1,0 atm?

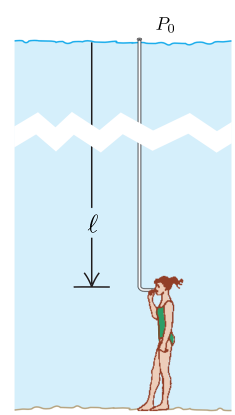
Dæmi 10.5. *(RK 14.42.)* Fíll með massa $M = 1200\,\text{kg}$ stendur ofan á hægri bullunni í vökvalyftu sem hefur geislann $r_2 = 1{,}0\,\text{m}$. Karið er fyllt með olíu sem hefur eðlismassann $\rho_{\text{olía}} = 950\,\text{kg/m}^3$. Á vinstri bullunni (í sömu hæð og fíllinn) stendur maður með massann $m_1 = 70\,\text{kg}$.



(a) Hver er geisli bullunnar sem maðurinn stendur á?

(b) Nú kemur eiginkona mannsins og stígur ofan á bulluna með manninum sínum. Þá sígur vinstri bullan niður um vegalengd $d = 35\,\text{cm}$ en fíllinn helst kyrr í sömu hæð og áður. Hver er massi eiginkonunar?

Dæmi 10.6. Það er hin prýðilegasta skemmtun að snorkla. Það eru hinsvegar takmarkanir á því hversu djúpt snorklari má kafa. Eftir því sem að dýpið verður meira verður þrýstingsmunurinn meiri. Manneskjan þolir mest 6000 Pa þrýstingsmun áður en hún hættir að geta andað. Hver er lengd lengstu snorklunarpípu þannig að snorklari geti andað í gegnum hana?



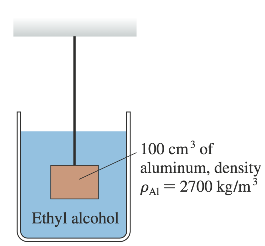
Lögmál Arkímedesar

Dæmi 10.7. *(RK 14.23)* Þegar leirstytta er vegin í lofti sýnir kraftmælirinn 28,4 N en þegar styttunni er dýft ofan í vatn þá sýnir kraftmælirinn aðeins 17,0 N. Hver er eðlismassi leirstyttunnar?

Dæmi 10.8. *(RK 14.24)* Gegnheil frauðplastkúla með þvermál 50 cm og eðlismassa $150\,\text{kg/m}^3$ flýtur úti á rúmsjó. Hversu stórt hlutfall kúlunnar hvílir undir yfirborði sjávar?

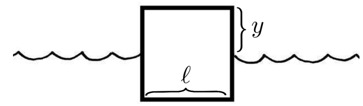
Dæmi 10.9. Sjór hefur eðlismassa $\rho_{\text{sjór}} = 1027\,\text{kg/m}^3$ og ís hefur eðlismassa $\rho_{\text{ís}} = 920\,\text{kg/m}^3$. Hversu stór hluti af ísjaka stendur upp úr yfirborði sjávar?

Dæmi 10.10. *(RK 14.21.)* Álkubbur með rúmmál $100\,\text{cm}^3$ og eðlismassa $\rho_{\text{ál}} = 2700\,\text{kg/m}^3$ hangir á 5,0 cm dýpi í íláti sem er fyllt með etanóli ($\rho_{\text{etanól}} = 789\,\text{kg/m}^3$). Kubburinn hangir kyrr í massalausu bandi. Hver er togkrafturinn í bandinu?

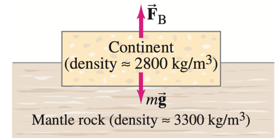


Dæmi 10.11. *(RK 14.71)* Botninn á stálbát (meira eins og stálkassi sem vantar lok) hefur breidd $b = 5{,}0\,\text{m}$, lengd $\ell = 10\,\text{m}$ og þykkt $d = 2{,}0\,\text{cm}$. Hliðar bátsins hafa þyktina $þ = 0{,}50\,\text{cm}$. Eðlismassi stáls er $\rho_{\text{stál}} = 7900\,\text{kg/m}^3$. Hver er minnsta hæðin, h, sem að hliðar bátsins þurfa að hafa þannig að hann geti flotið á lygnum sjó?

Dæmi 10.12. **(Vorpróf 2019)** Gegnheill kassi með allar hliðar jafnlangar, $\ell = 0{,}50\,\mathrm{m}$, og með eðlismassa $\rho_k = 650\,\mathrm{kg/m^3}$ flýtur úti á rúmsjó. Eðlismassi sjávar er $\rho_s = 1027\,\mathrm{kg/m^3}$. Finnið hæð kassans, y, sem flýtur fyrir ofan yfirborð sjávar.



Dæmi 10.13. Einfalt líkan af flekahreyfingum lítur á sem svo að flekarnir samanstandi af rétthyrningslaga kubbum með þykkt þ $= 35\,\mathrm{km}$ og eðlismassa $\rho_{\text{fleki}} = 2800\,\mathrm{kg/m^3}$ sem fljóta á jarðmöttlinum sem er vökvi með eðlismassa $\rho_{\text{möttull}} = 3300\,\mathrm{kg/m^3}$. Hversu stór hluti af hæð jarðskorpunnar flýtur fyrir ofan yfirborð möttulsins?

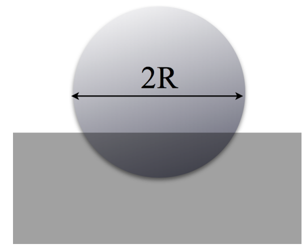


Dæmi 10.14. *(RK 14.54.)* Gormur með gormstuðul $k = 35\,\mathrm{N/m}$ er festur í annan enda við loftið og í hinn endan við sívalning með massa $m = 1{,}0\,\mathrm{kg}$, geisla $r = 2{,}5\,\mathrm{cm}$ og hæð $h = 10\,\mathrm{cm}$. Sívalningnum er haldið þannig að gormurinn sé hvorki strekktur né þjappaður. Íláti með vatni er komið fyrir þannig að neðra borð sívalningsins snertir vatnið. Þegar kerfinu er sleppt úr kyrrstöðu byrjar sívalningurinn að sveiflast um í vatninu þar til að núningurinn við vatnið stöðvar sívalninginn ofan í vatninu við dýpt d. Hvert er gildið á dýptinni d?

Dæmi 10.15. Plastbolti með geisla $R = 0{,}19\,\mathrm{m}$ flýtur á vatni þannig að 24% af rúmmáli boltans eru fyrir neðan vatnsborðið.

(a) Hve miklum krafti þarf að beita á boltann til þess að halda honum öllum rétt fyrir neðan vatnsborðið?

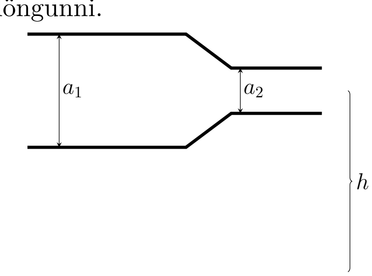
(b) Hver verður hröðun boltans einmitt þegar honum er sleppt?



Samfelldnilögmálið og Lögmál Bernoullis

Dæmi 10.16. *(RK 14.26.)* Garðslanga nokkur hefur þvermál þ $= 19\,\mathrm{mm}$. Hver er hraði vatnsins þegar það yfirgefur slönguna ef það tekur 8 mín að fylla uppblásna 600 L barnavaðlaug með garðslöngunni.

Dæmi 10.17. **(Vorpróf 2018)** Vatn streymir í vatnsröri. Vatnsrörið liggur lárétt í hæðinni $h = 1{,}2\,\mathrm{m}$ og fer úr því að hafa þvermál $a_1 = 4{,}5\,\mathrm{cm}$ niður í að hafa þvermál $a_2 = 1{,}4\,\mathrm{cm}$ eins og sjá má á mynd. Hraði vatnsins í breiðari endanum er $v_1 = 0{,}40\,\mathrm{m/s}$.

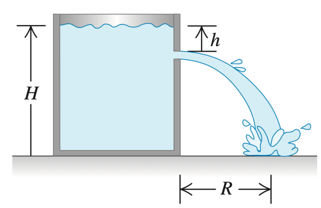


(a) Hver er hraði vatnsins, v_2, í mjórri enda vatnsrörsins?

(b) Hvert er flæði vatnsins í hvorum hluta fyrir sig?

(c) Hver er þrýstingsmunurinn á milli breiðari og mjórri enda vatnsrörsins?

Dæmi 10.18. Vatnstankar Perlunnar eru sívalningar með geisla $r = 12\,\mathrm{m}$ og hæð $H = 10\,\mathrm{m}$.

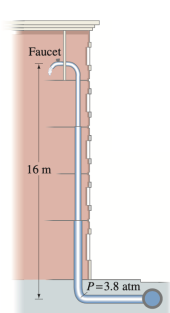


(a) Hversu margir lítrar af vatni komast fyrir í vatnstönkunum? Hver er þrýstingurinn á botni vatnstankanna?

(b) Hugsum okkur nú að skemmdarvargar skeri hringlaga gat á vatnstankinn með þvermál þ $= 3{,}0\,\mathrm{cm}$ í fjarlægð $h = 2{,}5\,\mathrm{m}$ frá toppi tanksins. Hver verður hraði vatnsins rétt eftir að gatið hefur verið skorið þegar það spýtist út úr gatinu? Hvert verður flæði þess? Hvar lendir vatnið?

Dæmi 10.19. Flugvél hefur massa $1{,}7 \cdot 10^6\,\mathrm{kg}$ og loftið við neðra borð vængsins hefur hraða $95\,\mathrm{m/s}$. Þverskurðarflatarmál vænganna er $1200\,\mathrm{m^2}$. Hversu hratt þarf loftið við efra borð vængsins að ferðast til þess að flugvélin haldist í loftinu án þess að hrapa?

Dæmi 10.20. Vatn við þrýsting 3,8 atm streymir inn með hraðanum $0{,}78\,\mathrm{m/s}$ í gegnum rör með geisla 2,5 cm í kjallaranum á skrifstofubyggingu Lalla lögfræðings. Lalli ætlar að fá sér ískalt og svalandi vatnsglas á efstu hæðinni 16 m ofar svo hann kveikir á krananum. Þar er geisli rörsins búinn að minnka niður í 1,4 cm. Finnið flæði vökvans og þrýstinginn í vatnshananum á efstu hæðinni.



Svör

(1) $P = 1{,}11 \cdot 10^8\,\mathrm{Pa} = 1100\,\mathrm{atm}$. **(2)** $P = 1{,}18 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} = 1{,}16\,\mathrm{atm}$. **(3)** $d = 6290\,\mathrm{m}$. **(4)** $F = 45.000\,\mathrm{N}$.

(5) $r_1 = 0{,}24\,\mathrm{m}$, $m_2 = 59\,\mathrm{kg}$. **(6)** $h = 0{,}61\,\mathrm{m}$. **(7)** $\rho_{\mathrm{hlutur}} = 2500\,\mathrm{kg/m^3}$. **(8)** $p = 15\,\%$. **(9)** $1 - p = 10{,}4\,\%$.

(10) $T = 1{,}88\,\mathrm{N}$. **(11)** $h = 15{,}7\,\mathrm{cm}$. **(12)** $y = 0{,}18\,\mathrm{m}$. **(13)** $y = 5{,}3\,\mathrm{km}$. **(14)** $x = 2{,}71\,\mathrm{cm}$.

(15) $\rho_{\mathrm{hlutur}} = 240\,\mathrm{kg/m^3},\ F = 214\,\mathrm{N},\ a = 31\,\mathrm{m/s^2}$. **(16)** $\Phi = 1{,}25 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3/s} = 1{,}25\,\mathrm{L/s},\ v = 4{,}4\,\mathrm{m/s}$.

(17) $v_2 = 4{,}1\,\mathrm{m/s}$, $\Phi = 6{,}36 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^3/s} = 0{,}64\,\mathrm{L/s}$, $\Delta P = -8300\,\mathrm{Pa} = 0{,}082\,\mathrm{atm}$. **(18)** $P = 2{,}0 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} = 1{,}97\,\mathrm{atm}$, $v_2 = 7{,}0\,\mathrm{m/s}$, $\Phi = 4{,}95\,\mathrm{L/s}$, $x = 8{,}6\,\mathrm{m}$. **(19)** $v_2 = 180\,\mathrm{m/s}$. **(20)** $v_2 = 2{,}5\,\mathrm{m/s}$, $P_2 = 2{,}25 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} = 2{,}22\,\mathrm{atm}$.

Kafli 11

Einföld sveifluhreyfing

„Deyr fé, deyja frændur, deyr sjálfur hið sama. En hreyfilýsing deyr aldrei þeim er góðan getur“

- Íslenskt orðatiltæki

11.1 Ritháttur

Í þessum kafla munum við nota punktarithættinn (sem er einnig stundum nefndur flugnaklessurithátturinn):

$$a = \ddot{x}, \quad v = \dot{x}$$

fyrir línulegu hreyfinguna og tilheyrandi fyrir snúningshreyfinguna:

$$\alpha = \ddot{\theta}, \quad \omega = \dot{\theta}$$

Þá getum við umritað lögmálin okkar sem:

$$F = ma = m\ddot{x}, \quad p = mv = m\dot{x}, \qquad \tau = I\alpha = I\ddot{\theta}, \quad L = I\omega = I\dot{\theta}.$$

Markmið okkar í klassískri eðlisfræði er nánast alltaf að ákvarða staðsetningu hluta sem fall af tíma. Við erum þá að leita að því sem við köllum hreyfilýsingu hlutarins, sem við skulum nú skilgreina:

Skilgreining 11.1. Við segjum að við höfum **hreyfilýsingu** hlutar ef við þekkjum staðsetningu hans, $\vec{r}(t)$, sem fall af tíma, t.

Við höfum áður fundið hreyfilýsingu hluta sem höfðu fasta hröðun, a. Þá höfðum við séð að hreyfilýsing hlutarins var gefin með $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$. Við höfum semsagt:

Lögmál 11.2. Hreyfilýsing hlutar sem verður fyrir fastri hröðun, a, er gefin með:

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Þar sem s_0, v_0 tákna upphafsstaðsetningu og upphafshraða hlutarins.

Við sjáum að til þess að ákvarða hreyfilýsingu hlutarins þá þurfum við að þekkja upphafsstaðsetningu hans og upphafshraða hlutarins. En hvað ef hröðunin er ekki föst? Er þá einhver leið fyrir okkur til þess að ákvarða hreyfilýsingu hlutarins? Það kemur í ljós að í sérstökum tilvikum þá getum við einmitt gert það!

11.2 Einföld sveifluhreyfing

Skilgreining 11.3. Við segjum að hlutur sé á **einfaldri sveifluhreyfingu** með **sveiflutíðni** ω ef lýsa má staðsetningu hans, $z(t)$, með jöfnu af gerðinni

$$\ddot{z} = -\omega^2 z.$$

Við höfum síðan almennt lögmál sem segir okkur hvernig hreyfilýsing hlutar á einfaldri sveifluhreyfingu lítur út. Við höfum nefnilega að:

Regla 11.4. Lítum á hlut á einfaldri sveifluhreyfingu með sveiflutíðni ω sem nýtur jöfnunnar

$$\ddot{z} = -\omega^2 z.$$

Þá er hreyfilýsing hlutarins gefin með:

$$z(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t).$$

Þar sem $A, B \in \mathbb{R}$ eru ótilteknir fastar sem ákvarðast af upphafsskilyrðunum $z(0) = A$ og $\dot{z}(0) = B\omega$.

Sönnun: Til að sýna að þetta sé lausn þá athugum við að:

$$\dot{z}(t) = \frac{dz}{dt} = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$$

Athugum svo að:

$$\ddot{z}(t) = \frac{d\dot{z}}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t) + B\omega^2\sin(\omega t) = -\omega^2\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right) = -\omega^2 z(t).$$

$\square$

Regla 11.5. (Hornafallhax Arnars) Til eru rauntölur α, β, ϕ og φ þannig að:

$$A\cos\theta + B\sin\theta = \alpha\cos(\theta + \phi) = \beta\sin(\theta + \varphi)$$

Sönnun: Við fáum að:

$$A\cos\theta + B\sin\theta = \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\theta + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\theta\right)$$

Skilgreinum síðan punktinn $P_{AB} := \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$. Þá er ljóst að P_{AB} liggur á einingarhringnum því:

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 = 1$$

En því má finna $x \in [0, 2\pi]$ þannig að:

$$P_{AB} = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right) = (\cos x, \sin x)$$

og því getum við ritað:

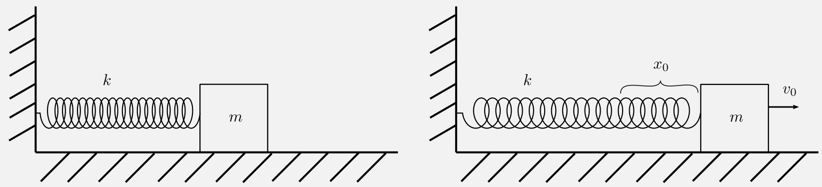
$$A\cos\theta + B\sin\theta = \sqrt{A^2+B^2}\,(\cos x\cos\theta + \sin x\sin\theta) = \sqrt{A^2+B^2}\cos(\theta - x).$$

Þar sem við höfum notað summureglu fyrir kósínus. En þar með höfum við sýnt að til séu slíkir fastar α, β, ϕ og φ. Nánar tiltekið þá er $\alpha = \beta = \sqrt{A^2+B^2}$, $\phi = -x = -\arctan\left(\frac{B}{A}\right)$ og $\varphi = \phi + \frac{\pi}{2}$.

$\square$

11.3 Gormar

Lögmál 11.6. Lítum á gorm með gormstuðul k sem er festur í annan endann við kubb með massa m sem hvílir á núningslausum, láréttum fleti. Hugsum okkur að við drögum kubbinn út þannig að gormurinn strekkist um vegalengd x_0 frá jafnvægisstöðu sinni. Hugsum okkur að við sleppum kubbnum með upphafshraða v_0.

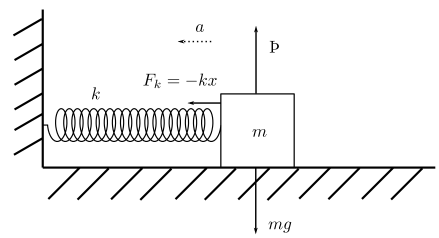


Þá er gormurinn á einfaldri sveifluhreyfingu um jafnvægisstöðu sína og hreyfilýsing gormsins er

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

Þar sem $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ er sveiflutíðni gormsins. Sveiflutími gormsins er gefinn með $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Útleiðsla Skoðum kraftamynd fyrir kubbinn. Gormkrafturinn er alltaf í gagnstæða stefnu miðað við strekkingu/þjöppun gormsins svo við höfum að:



$$ma = -kx \implies m\ddot{x} = -kx \implies \ddot{x} = -\frac{k}{m}x.$$

Svo að gormurinn er á einfaldri sveifluhreyfingu með horntíðni $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Samkvæmt reglu 11.4 má því finna fasta $A, B \in \mathbb{R}$ þannig að:

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

Við athugum að upphafsskilyrðið $x(0) = x_0$ gefur að:

$$x_0 = x(0) = A\cos(\omega \cdot 0) + B\sin(\omega \cdot 0) = A \cdot 1 + B \cdot 0 = A.$$

Athugum síðan að með því að diffra $x(t)$ höfum við að:

$$v(t) = \dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$$

Upphafsskilyrðið $v(0) = v_0$ gefur þá að:

$$v_0 = v(0) = -A\omega\sin(\omega \cdot 0) + B\omega\cos(\omega \cdot 0) = -A\omega \cdot 0 + B\omega \cdot 1 = B\omega \implies B = \frac{v_0}{\omega}.$$

En þar með höfum við sýnt að hreyfilýsing gormsins sé gefin með:

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t).$$

Að lokum athugum við að lotutími sveiflunnar er þá fundin með því að athuga að:

$$\omega T = 2\pi \implies T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Sem er þá tíminn sem líður frá því að gorminum er sleppt og þar til hann er aftur á sama stað. □

Lögmál 11.7. Hreyfilýsingu gormsins í lögmáli 11.6 má einnig rita á eftirfarandi formi:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Þar sem $A, \varphi \in \mathbb{R}$ eru fastar sem ákvarðast af upphafsskilyrðunum $x(0) = x_0$ og $v(0) = \dot{x}(0) = v_0$.

Útleiðsla: Þetta leiðir beint af Hornafallahaxi Arnars (regla 11.5). Talan A kallast þá **útslag** gormsins og talan φ kallast **fasahorn**. Við sjáum reyndar með samanburði við hornafallahax Arnars að þá er:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}, \qquad \varphi = -\arctan\left(\frac{v_0}{x_0\omega}\right)$$

□

Lögmál 11.8. Orkan er varðveitt fyrir gormhreyfinguna í lögmáli 11.6.

Útleiðsla: Athugum fyrst að ef $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ þá er $\dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$. Höfum að:

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2}m\left(-A\omega\sin(\omega t + \varphi)\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(A\cos(\omega t + \varphi)\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2}kA^2. \end{aligned}$$

Þar sem við höfum notað að $\omega^2 = \frac{k}{m}$ ásamt reglu Pýþagórasar $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$. □

11.4 Lóðréttur gormur

En hvað ef við festum gorminn okkar lóðrétt við loft og hengjum síðan massa neðan á gorminn? Þá mun gormurinn fá nýja jafnvægisstöðu, y_0, sem við getum fundið með því að athuga að þá er:

$$mg = ky_0 \implies y_0 = \frac{mg}{k}.$$

Hugsum okkur síðan að við strekkjum gorminn út um eitthvað y (miðað við nýju jafnvægisstöðu gormsins). Þá mun gormurinn sveiflast um nýju jafnvægisstöðuna sína y_0 með sveiflutíðni $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Við höfum nefnilega að kraftajafnan verður:

$$ma = -k(y + y_0) + mg \implies \ddot{y} = -\frac{k}{m}y + g - \frac{k}{m}y_0 = -\frac{k}{m}y$$

Þar sem við höfum notað að $y_0 = \frac{mg}{k}$. En þar með sjáum við að aftur er gormurinn á einfaldri sveifluhreyfingu (um nýju jafnvægisstöðu gormsins) með sveiflutíðni $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ og hreyfilýsingin er gefin með:

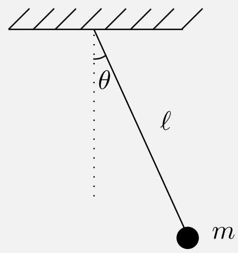
$$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

þar sem A og φ eru fastar sem ákvarðast út frá upphafsskilirðunum $y(0)$ og $v(0) = \dot{y}(0)$. Við getum líka sýnt að orkan er varðveitt í lóðréttum sveiflum. Höfum að:

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}k(y + y_0)^2 - mg(y + y_0) \\ &= \frac{1}{2}kA^2 + ky_0y + \frac{1}{2}ky_0^2 - mgy - mgy_0 \\ &= \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}mgy_0. \end{aligned}$$

11.5 Pendúll

Lögmál 11.9. Lítum á pendúl sem samastendur af massa m sem hangir í massalausu bandi af lengd ℓ. Hugsum okkur að við drögum massann út þannig að upphafshornið sem bandið myndar við lóðrétt sé θ_0 og hugsum okkur að við sleppum massanum með upphafshornhraða ω_0.

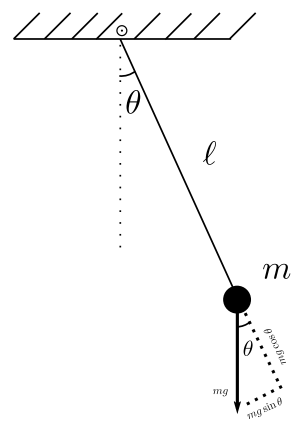


Þá er pendúllinn á einfaldri sveifluhreyfingu um jafnvægisstöðu sína og hreyfilýsing pendúlsins er

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) + \frac{\omega_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

Þar sem $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ er sveiflutíðni pendúlsins. Sveiflutími pendúlsins er gefinn með $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$.

Útleiðsla Skoðum kraftamynd fyrir pendúlinn. Skrifum niður kraftvægisjöfnu um snúningsás pendúlsins (veljum snúningsásinn út úr blaðinu því þá er θ jákvætt í snúningsstefnuna). Við höfum þá að kraftvægisjafnan verður:



$$\tau_{\text{heild}} = \tau_m \implies I\alpha = -mg\ell \sin\theta$$

Notum síðan að $\alpha = \ddot{\theta}$ og notum nálgunina að $\sin\theta \approx \theta$ fyrir lítil horn. Þá höfum við að kraftvægisjafnan verður:

$$I\ddot{\theta} = -mg\ell \sin\theta \approx -mg\ell\theta$$

En hverfitregða massans m um snúningsásinn er $I_m = m\ell^2$ svo við ályktum að:

$$m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\theta \implies \ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\theta$$

Svo að pendúllinn er á einfaldri sveifluhreyfingu með horntíðni $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$. Samkvæmt reglu 11.4 má því finna fasta $A, B \in \mathbb{R}$ þannig að:

$$\theta(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

Upphafsskilyrðið $\theta(t) = \theta_0$ gefur þá að $A = \theta_0$ og við athugum að $\dot{\theta}(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$ svo við ályktum að upphafsskilyrðið $\dot{\theta}(0) = \omega_0$ gefur að $B = \frac{\omega_0}{\omega}$.

$\square$

Lögmál 11.10. Lítum á pendúl sem samastendur af massa m sem hangir í massalausu bandi af lengd ℓ. Þá er hreyfilýsing pendúlsins gefin með

$$\theta(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t + \varphi\right)$$

Þar sem $A, \varphi \in \mathbb{R}$ ákvarðast af upphafsskilyrðunum $\theta(0) = \theta_0$ og $\dot{\theta}(0) = \omega_0$.

Reyndar höfum við að $A = \sqrt{\theta_0^2 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$ og $\varphi = -\arctan\left(\frac{\omega_0}{\theta_0\omega}\right)$ samkvæmt hornafallahaxi Arnars.

11.6 Flókin sveifluhreyfing (ítarefni)

Nú þegar við höfum talað aðeins um einfalda sveifluhreyfingu getum við talað aðeins um flókna sveifluhreyfingu. Fyrir flókna sveifluhreyfingu bætum við loftmótsstöðu inn í líkanið okkar (núningnum er síðan afar sambærilega bætt við). En loftmótstaðan er háð hraða hlutarins og loftmótstöðukraftinum má lýsa með $F_L = -\beta v$ þar sem v er hraði hlutarins og β er fasti sem er háður eðlismassa hlutarins, þverskurðarflatarmáli og eðlismassa flæðiefnisins sem hluturinn hreyfist í (í þessu tilviki loft). Kraftajafnan okkar verður þá fyrir gorminn:

$$ma = -\beta v - kx \implies m\ddot{x} = -\beta\dot{x} - kx$$

Sem við getum þá umritað á eftirfarandi form:

$$\ddot{x} = -\frac{\beta}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x = -2\gamma\dot{x} - \omega^2 x$$

þar sem við höfum skilgreint dempunarfastann $\gamma = \frac{\beta}{2m}$ og sveiflutíðnina $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. En lausn diffurjöfnunnar hér að ofan er þá gefin með:

$$\boxed{x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\Omega t + \phi).}$$

Þar sem $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$ og A, ϕ eru fastar sem ákvarðast af upphafsskilyrðunum. Við getum sannað að svo sé með því að diffra ágiskunina okkar:

$$v(t) = \dot{x}(t) = -A\gamma e^{-\gamma t}\cos(\Omega t + \phi) - A\Omega e^{-\gamma t}\sin(\Omega t + \phi)$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = A\gamma^2 e^{-\gamma t}\cos(\Omega t + \phi) + 2A\gamma\Omega e^{-\gamma t}\sin(\Omega t + \phi) - A\Omega^2 e^{-\gamma t}\cos(\Omega t + \phi)$$

En þar með höfum við einmitt að:

$$\begin{aligned}
-2\gamma\dot{x} - \omega^2 x &= Ae^{-\gamma t}\left(\left(2\gamma^2 - \omega^2\right)\cos(\Omega t + \phi) + 2\gamma\Omega\sin(\Omega t + \phi)\right) \\
&= Ae^{-\gamma t}\left(\left(\gamma^2 - \Omega^2\right)\cos(\Omega t + \phi) + 2\gamma\Omega\sin(\Omega t + \phi)\right) = \ddot{x}.
\end{aligned}$$

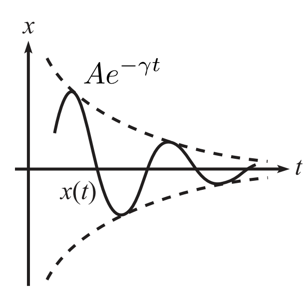
En það sýnir að $x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\Omega t + \varphi)$ sé lausn á diffurjöfnunni $\ddot{x} = -2\gamma\dot{x} + \omega^2 x$. En það er önnur leið til þess að líta á þetta. Við getum hugsað okkur að $\cos(\Omega t + \phi)$ lýsi sveifluhreyfingu gormsins en að útslagið sé að dempast með tíma samkvæmt $A(t) = A_0 e^{-\gamma t}$ þar sem A_0 er útslagið í upphafi við tímann $t = 0$. En þá höfum við að orka kerfisins minnkar sem fall af tíma samkvæmt:

$$\begin{aligned}
E(t) &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\
&= \frac{1}{2}mA_0^2 e^{-2\gamma t}\left(\gamma\cos(\Omega t + \phi) + \Omega\sin(\Omega t + \phi)\right)^2 + \frac{1}{2}kA_0^2 e^{-2\gamma t}\cos^2(\Omega t + \phi) \\
&= \frac{1}{2}kA_0^2 e^{-2\gamma t} + \frac{\gamma^2}{\omega^2}e^{-2\gamma t}\cos(2\Omega t + 2\phi) + \frac{\gamma\Omega}{\omega^2}e^{-2\gamma t}\sin(2\Omega t + 2\phi) \\
&= \frac{1}{2}kA_0^2 e^{-2\gamma t} + \frac{\gamma}{\omega}e^{-2\gamma t}\cos(2\Omega t + \varphi)
\end{aligned}$$

þar sem við höfum skilgreint $\varphi = 2\phi + \arctan\left(1 - \frac{\omega^2}{\gamma^2}\right)$.
Ef við gerum síðan þá nálgun (án réttlætingar) að $kA_0^2 \gg \frac{\gamma}{\omega}$ þá sjáum við að:

$$\boxed{E(t) \approx \tfrac{1}{2}kA_0^2 e^{-2\gamma t}.}$$

En þar með höfum við sýnt að bæði útslag og orka í flókinni sveifluhreyfingu deyr smátt og smátt út með vísishrörnun.



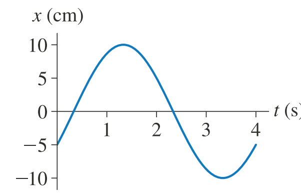
Mynd 11.1: Hreyfilýsing þar sem útslagið hrörnar.

11.7 Dæmi

Gormar

Dæmi 11.1. *(RK 15.1.)* Vagn með massa $m = 0{,}82\,\mathrm{kg}$ er festur við gorm með gormstuðul $k = 35\,\mathrm{N/m}$ í verklegu tilraunastofunni. Vagninn getur runnið meðfram láréttum fleti og eftir að við strekkjum á gorminum þá sveiflast vagninn á milli 20 cm og 70 cm á brautinni. **(a)** Hver er sveiflutíðni sveiflunnar? **(b)** Hver er sveiflutími massans? **(c)** Hvert er útslag gormsins? **(d)** Hver er mesti hraði vagnsins á sveifluhreyfingunni? **(e)** Hver er mesta hröðun vagnsins á sveifluhreyfingunni?

Dæmi 11.2. *(RK 15.4.)* Hlutur á einfaldri sveifluhreyfingu hefur sveiflutíma 1,82 s og útslag 20 cm. Hversu langan tíma tekur það hlutinn að fara frá jafnvægisstöðu sinni í $x = 0\,\mathrm{cm}$ og í $x = 5\,\mathrm{cm}$?



Dæmi 11.3. *(RK 15.5.)* Lítum á myndina hér til hægri. Á myndinni má sjá stöðu-tíma graf af hlut á einfaldri sveifluhreyfingu. Ákvarðið: **(a)** Hvert er útslag sveiflunnar? **(b)** Hver er sveiflutíminn? **(c)** Hver er sveiflutíðnin? **(d)** Hvert er fasahornið? **(e)** Hver er hreyfilýsing hlutarins? **(f)** Hver er hámarkshraði hlutarins, $v_{\max}$? **(g)** Hver er hámarkshröðun hlutarins, $a_{\max}$?

Dæmi 11.4. *(RK 15.16.)* Massi $m = 200\,\mathrm{g}$ er festur við gorm með gormstuðul $k = 32\,\mathrm{N/m}$. Við tímann $t = 0$ er massinn staddur í $x = 5{,}0\,\mathrm{cm}$ og hefur hraðann $v_x = -30\,\mathrm{cm/s}$. Ákvarðið **(a)** Sveiflutíðnina **(b)** Sveiflutímann **(c)** Hreyfilýsinguna **(d)** Mesta útslagið **(e)** Mesta hraðann **(f)** Mestu hröðunina.

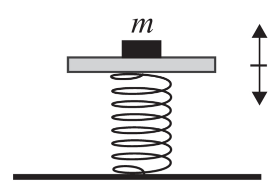
Dæmi 11.5. *(RK 15.19.)* Nemandi nokkur er að hoppa á trampólíni. Í hæsta punkti eru fætur hans 55 cm fyrir ofan trampólínið en í lægstu stöðu sígur trampólíndúkurinn niður um 15 cm áður en nemandinn skýst aftur upp. Í hversu langan tíma er nemandinn í snertingu við trampólínið?

Dæmi 11.6. **(Vorpróf 2016)** Einfaldri sveifluhreyfingu er lýst með jöfnunni $x(t) = 0{,}35\cos(15{,}0t + 0{,}60)$ þar sem allar stærðir eru í SI-einingum og horn mæld í radíönum. **(a)** Finnið mesta hraða í sveiflunni. Við hvaða gildi á x er hraðinn mestur? **(b)** Hver er mesta hröðunin í sveiflunni? Við hvaða gildi á x verður hröðunin mest?

Dæmi 11.7. **(Vorpróf 2017)** Staðsetningu 0,650 kg massa á einfaldri sveifluhreyfingu sem festur er við gorm með gormstuðul k má lýsa með jöfnunni $x(t) = 0{,}25\sin(4{,}70 \cdot t)$ þar sem allar stærðir eru í SI-einingum og horn í radíönum. **(a)** Hvert er útslag sveifluhreyfingarinnar? **(b)** Hver er sveiflutíðnin? **(c)** Hver er sveiflutíminn? **(d)** Hver er heildarorka massans? **(e)** Hver er hreyfiorka massans þegar $x = 15\,\mathrm{cm}$?

Dæmi 11.8. **(Vorpróf 2019)** Kubbur með massa 400 g hvílir á núningslausum láréttum fleti. Hann er festur við gorm með gormstuðul $k = 62\,\mathrm{N/m}$ og dreginn út um vegalengd 12 cm frá jafnvægisstöðu gormsins. Kubbnum er sleppt úr kyrrstöðu þannig að hann byrjar að sveiflast með einfaldri sveifluhreyfingu um jafnvægisstöðu sína. **(a)** Finnið sveiflutíma kubbsins. **(b)** Finnið hreyfilýsingu kubbsins, það er, finnið staðsetningu hans, $x(t)$, sem fall af tíma. **(c)** Við hvaða tíma er hraði kubbsins mestur? **(d)** Hver er mesta hröðunin sem kubburinn verður fyrir á sveifluhreyfingunni?

Dæmi 11.9. **(Vorpróf 2013)** Myndin hér til hægri sýnir sveiflukerfi sem samanstendur af gormi með áfastri láréttri plötu. Platan er á lóðréttri sveifluhreyfingu með 6,0 cm sveifluvídd og sveiflutíma 0,80 s. Ofan á plötunni liggur hlutur með massann $m = 100\,\mathrm{g}$. **(a)** Hver er hröðun plötunnar í neðstu stöðu sveiflunnar? **(b)** Með hversu stórum krafti þrýstir platan á hlutinn í neðstu stöðu sveiflunnar?



Dæmi 11.10. *(RK 15.48.)* Hugrakkur nemandi með massa 75 kg stekkur fram af brú með 12 m langri (massalausri) teygju sem er fest við fætur nemandans. Líta má á teygjuna sem gorm með gormstuðull 430 N/m. **(a)** Hversu langt fyrir neðan brúnna verður lægsti punkturinn sem nemandinn nær í stökkinu? **(b)** Hver er hröðun nemandans í lægsta punkti stökksins? **(c)** Hversu langan tíma tekur það nemandan að ná þessum lægsta punkti?

Hreyfilýsing pendúls

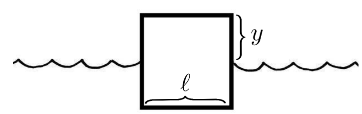
Dæmi 11.11. *(RK 15.28.)* Festum massa $m = 200\,\mathrm{g}$ á enda $1{,}0\,\mathrm{m}$ pendúls. Hver er sveiflutími pendúlsins á Venusi þar sem þyngdarhröðunin er $g_V = 8{,}87\,\mathrm{m/s^2}$? En á Mars þar sem þyngdarhröðunin er $g_M = 3{,}71\,\mathrm{m/s^2}$?

Dæmi 11.12. *(RK 15.30.)* Massi $m = 100\,\mathrm{g}$ er festur í pendúl af lengd $1{,}0\,\mathrm{m}$ og sleppt úr kyrrstöðu þegar pendúllinn myndar horn $\theta_0 = 8{,}0°$ miðað við lárétt. Hversu langur tími líður frá því að pendúlnum er sleppt og þar til að hann myndar horn $\theta = 4{,}0°$ miðað við lóðrétt hinum meginn miðað við jafnvægisstöðu pendúlsins?

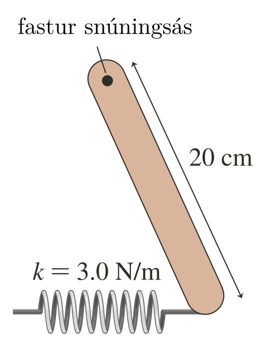
Dæmi 11.13. *(RK 15.55.)* Segja má að Galíleó Galíleí hafi fundið upp tímann. Sagan segir að árið 1583 þegar hann var staddur í messu í kaþólsku dómkirkjunni í Pisa þá hafi hann tekið eftir lampa sem sveiflaðist fram og til baka fyrir ofan altarið. Hann tók eftir því að sveiflutími lampans var alltaf sá sami óháð útslagi lampans. Galíleó notaði púlsinn sinn til þess að meta sveiflutímann. Hver er lengd pendúlsins ef Galíleó mælir að 5 pendúlsveiflur taki um það bil 37 hjartslög og hjartað hans slær 80 slög/mín?

Öðruvísi sveifluhreyfing

Dæmi 11.14. **(Vorpróf 2019)** Gegnheill kassi með allar hliðar jafnlangar, $\ell = 0{,}50\,\mathrm{m}$, og með eðlismassa $\rho_k = 650\,\mathrm{kg/m^3}$ flýtur úti á rúmsjó. Eðlismassi sjávar er gefinn með $\rho_s = 1027\,\mathrm{kg/m^3}$. Fugl með massa $9{,}0\,\mathrm{kg}$ sest á kassann svo að yfirborðið lækkar. Þegar fuglinn flýgur af kassanum byrjar kassinn að sveiflast um jafnvægisstöðu sína með einfaldri sveifluhreyfingu. Finnið hreyfilýsingu kassans, $y(t)$.



Dæmi 11.15. *(RK 15.66.)* Hugsum okkur að við ætlum að smíða hax póstlagninarfyrirtæki sem sendir pakka milli Íslands og Ástralíu (hinum meginn á hnettinum). Hugsum okkur að í staðinn fyrir að sigla eða fljúga með pakkana þá ákveðum við að bora göng beint í gegnum miðju jarðarinnar. Hugsum okkur síðan að við hendum pakkanum ofan í göngin. Hunsum eins og alltaf loftmótstöðu og gerum ráð fyrir því að jörðin hafi einsleitan eðlismassa. Þá mun þyngdarkrafturinn sem pakkinn finnur fyrir breytast eftir því sem hann nálgast miðju jarðarinnar. Reyndar er hægt að sýna að í fjarlægð r frá miðju jarðarinnar þar sem $0 < r < R$ og R er geisli jarðarinnar þá er þyngdarhröðunin gefin með $g(r) = \frac{r}{R}g$ þar sem $g = 9{,}82\,\mathrm{m/s^2}$ er þyngdarhröðunin við yfirborð jarðarinnar. Hversu langan tíma tæki þá að senda pakka til Ástralíu?



Dæmi 11.16. *(RK 15.81.)* Hér til hægri sést einsleit stöng af lengd $\ell = 20\,\mathrm{cm}$ með massa $m = 200\,\mathrm{g}$. Stöngin er fest með nagla í efri endan og við gorm með gormstuðul $k = 3{,}0\,\mathrm{N/m}$ við neðri endann. Þegar stöngin hangir algjörlega lóðrétt þá er gormurinn í jafnvægisstöðu sinni. Nú drögum við stöngina út um horn θ_0 miðað við lárétt og sleppum stönginni úr kyrrstöðu. Hver verður sveiflutíðni stangarinnar?

Svör

(1) $\omega = 6{,}53\,\mathrm{rad/s}$, $T = 0{,}96\,\mathrm{s}$, $A = 25\,\mathrm{cm}$, $v_{\max} = 1{,}63\,\mathrm{m/s}$, $a_{\max} = 10{,}7\,\mathrm{m/s^2}$. **(2)** $\tau = 73\,\mathrm{ms}$.

(3) $A = 10\,\mathrm{cm}$, $T = 4{,}0\,\mathrm{s}$, $\omega = 1{,}57\,\mathrm{rad/s}$, $v_{\max} = 0{,}16\,\mathrm{m/s}$, $a_{\max} = 0{,}25\,\mathrm{m/s^2}$. **(4)** $\omega = 12{,}6\,\mathrm{rad/s}$, $T = 0{,}50\,\mathrm{s}$, $A = 5{,}5\,\mathrm{cm}$, $v_{\max} = 0{,}69\,\mathrm{m/s}$, $a_{\max} = 8{,}7\,\mathrm{m/s^2}$. **(5)** $\tau = 0{,}13\,\mathrm{s}$. **(6)** $v_{\max} = 5{,}3\,\mathrm{m/s}$, $a_{\max} = 79\,\mathrm{m/s^2}$. **(7)** $T = 1{,}34\,\mathrm{s}$, $E = 0{,}45\,\mathrm{J}$, $K = 0{,}29\,\mathrm{J}$. **(8)** $T = 0{,}51\,\mathrm{s}$, $\tau = 0{,}13\,\mathrm{s}$, $a_{\max} = 18{,}5\,\mathrm{m/s^2}$. **(9)** $a_{\max} = 3{,}74\,\mathrm{m/s^2}$, $Þ = 1{,}4\,\mathrm{N}$. **(10)** $\ell + x = 20{,}4\,\mathrm{m}$, $a_{\max} = 45{,}7\,\mathrm{m/s^2}$, $T = 2{,}34\,\mathrm{s}$. **(11)** $\omega_V = 2{,}98\,\mathrm{rad/s}$, $\omega_M = 1{,}93\,\mathrm{rad/s}$. **(12)** $\tau = 0{,}67\,\mathrm{s}$. **(13)** $\ell = 7{,}8\,\mathrm{m}$. **(14)** $\omega = \sqrt{\frac{\rho_{\text{vökvi}}g}{\rho_{\text{hlutur}}\ell}} = 5{,}6\,\mathrm{rad/s}$, $A = 3{,}6\,\mathrm{cm}$.

(15) $T = 42$ mín og 10 sek. **(16)** $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2\ell} + \frac{3k}{m}}$.

Kafli 12

Bylgjur

12.1 Hvað er bylgja?

Skilgreining 12.1. Látum $\psi(x,t)$ lýsa fráviki hlutar frá jafnvægisstöðu sinni sem fall af staðsetningu, x og tíma, t. Við segjum að hluturinn sé á **bylgjuhreyfingu** með **bylgjuhraða** c ef frávikið uppfyllir **bylgjujöfnuna**:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$

Ef við notum punktritháttt fyrir $\frac{\partial}{\partial t}$ og merktritháttt fyrir $\frac{\partial}{\partial x}$ þá getum við skrifað bylgjujöfnuna sem:

$$\ddot{\psi} = c^2 \psi''$$

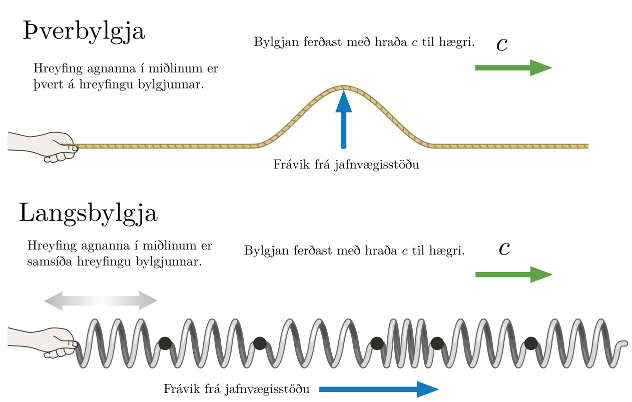
Við athugum að einingarnar á ψ eru $[\psi] = \mathrm{m}$ því það lýsir fjarlægð frá jafnvægisstöðu. Bylgjuhraðinn c er almennt háður efninu eða **miðlinum** sem bylgjan berst í. Við þurfum síðan að taka fram tvær mismunandi gerðir af hreyfingarstefnum sem að bylgjur geta haft:

Skilgreining 12.2. Við segjum að bylgja sé

(i) **langsbylgja** ef hreyfing agnanna í miðlinum er þvert á hreyfistefnu bylgjunnar.

(ii) **þverbylgja** ef hreyfing agnanna í miðlinum er samsíða hreyfistefnu bylgjunnar.

Til dæmis eru sveiflur í gítarstreng dæmi um þverbylgjur. Annað dæmi um þverbylgjur eru gárurnar sem myndast í yfirborði vatns eftir að stein er sleppt ofan í vatnið. Hljóð er síðan dæmi um langsbylgjur.

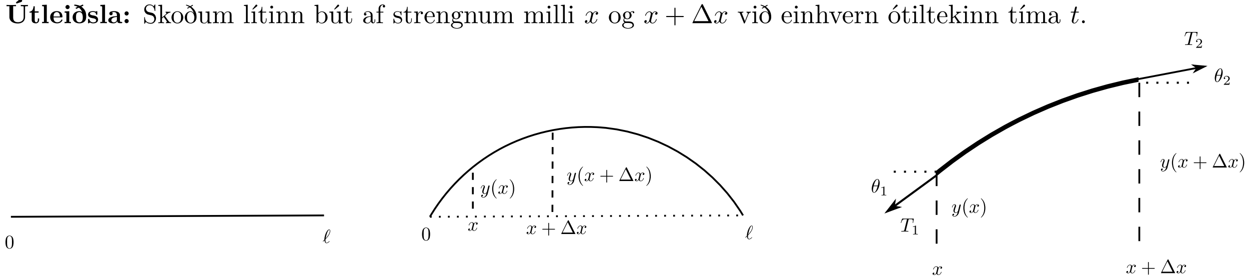


12.2 Staðbylgjur á streng

Lögmál 12.3. Lítum á streng með massa m af lengd ℓ sem festur er í báða enda. Látum $\mu = \frac{m}{\ell}$ vera línulegan þéttleika strengsins og látum togkraftinn í vírnum vera T. Látum $y = y(x,t)$ tákna lóðrétt frávik strengsins frá jafnvægisstöðu sinni bæði sem fall af tíma, t, og láréttri staðsetningu, $x \in [0,\ell]$. Þá uppfyllir frávikið á strengnum eftirfarandi bylgjujöfnu með bylgjuhraða $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

$$\ddot{y} = \frac{T}{\mu} y''$$

Útleiðsla: Skoðum lítinn bút af strengnum milli x og $x + \Delta x$ við einhvern ótiltekinn tíma t.



Þá er massinn í þessum litla bút af strengnum gefinn með $\frac{\Delta x}{\ell} m = \mu \Delta x$. Kraftajafnan verður þá:

$$\mu \Delta x \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_2 \cos\theta_2 - T_1 \cos\theta_1 \\ T_2 \sin\theta_2 - T_1 \sin\theta_1 \end{pmatrix}$$

Strengurinn er ekki að færast til í láréttu stefnuna svo að $\ddot{x} = 0$. Ef við notum síðan nálgunina að $\cos\theta \approx 1$ þá sjáum við að efri jafnan gefur okkur að $T_2 = T_1$ svo að togkrafturinn í vírnum er um það bil fastur meðfram strengnum og þar með er $T = T_1 = T_2$. Neðri jafnan er frekar athyglisverð því þar er $\ddot{y} \neq 0$ þar sem að strengurinn lyftist upp og hefur því færst úr stað. Við notum þá nálgunina $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \approx \frac{\theta}{1} = \theta \approx \sin\theta$. En $\tan\theta = \frac{dy}{dx} = y'$ samkvæmt skilgreiningu á hallatölu svo að við ályktum að:

$$\mu \Delta x \ddot{y} = T\left(y'(x + \Delta x, t) - y'(x,t)\right)$$

En þar með ályktum við að:

$$\ddot{y} = \frac{T}{\mu} \frac{y'(x+\Delta x, t) - y'(x,t)}{\Delta x} = \frac{T}{\mu} y''$$

Við höfum þar með sýnt að staðbylgjur á streng uppfylla bylgjujöfnuna:

$$\ddot{y} = \frac{T}{\mu} y''$$

□

Það er líka hægt að leiða út bylgjuhraðann með víddargreiningu. Þá er $c = m^\alpha \ell^\beta T^\gamma$ og við fáum að:

$$\mathrm{m}^1\mathrm{s}^{-1} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = [c] = [m]^\alpha [\ell]^\beta [T]^\gamma = (\mathrm{kg})^\alpha (\mathrm{m})^\beta \left(\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}\right)^\gamma = (\mathrm{kg})^{\alpha+\gamma} (\mathrm{m})^{\beta+\gamma} (s)^{-2\gamma}$$

sem gefur okkur því jöfnuhneppið:

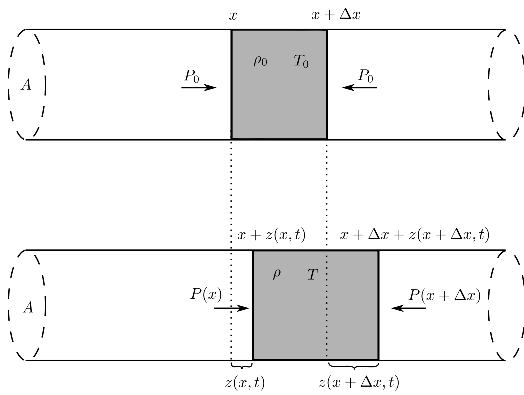
$$\begin{cases} 1 = \beta + \gamma \\ 0 = \alpha + \gamma \\ -1 = -2\gamma \end{cases}$$

En þar með getum við ályktað að $\gamma = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$ og $\alpha = -\frac{1}{2}$ en það gefur okkur því að $c = \sqrt{\frac{T\ell}{m}} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$.

12.3 Hljóðbylgjur

Lögmál 12.4. Lítum á ræmu af kjörgasi með rúmmál V_0 sem er við þrýsting P_0 og hefur hitastig T_0. Látum eðlismassa gasins vera ρ_0 og látum $z = z(x,t)$ tákna frávik kjörgasins frá upphafsstaðsetningunni. Þá uppfyllir frávikið bylgjujöfnuna, $\ddot{z} = \frac{P_0}{\rho_0} z''$, með bylgjuhraða $c = \sqrt{\frac{P_0}{\rho_0}}$

Útleiðsla: Skoðum ræmu af lofti með þverskurðarflatarmál A og af lengd Δx sem er í upphafi kyrr (áður en að hljóðbylgjan berst á þennan stað). Þá er þrýstingurinn á báðar hliðar ræmunnar jafn P_0 og loftið í ræmunni hefur eðlismassa ρ_0 og hitastig T_0. Við höfum þá að massinn í þessari litlu loftræmu er $m = \rho_0 A \Delta x$. Eftir að hljóðbylgjan berst á þennan stað þá mun loftið færast frá jafnvægisstöðunni sinni um einhverja vegalengd þannig að vinstri endinn færist frá x yfir í $x + z(x,t)$ og hægri endinn færist frá $x + \Delta x$ yfir í $x + \Delta x + z(x + \Delta x, t)$. En þar með mun rúmmál ræmunnar breytast frá því í upphafi að vera V_0 yfir í að vera:



$$V = A\left(\Delta x + z(x+\Delta x,t) - z(x,t)\right) = A\Delta x\left(1 + \frac{z(x+\Delta x,t) - z(x,t)}{\Delta x}\right) = V_0\left(1 + z'\right).$$

Þar sem að við höfum notað skilgreininguna á afleiðunni. En þar sem að rúmmálið hefur breyst þá hefur þrýstingurinn líka breyst! Við getum notað gaslögmálið $PV = nRT$ (sem við munum leiða út síðar í kafla 15 um Varmafræði) til þess að athuga hvernig þrýstingurinn breytist þegar rúmmálið breytist. Á þessum tímapunkti ætlum við að gera sömu mistök og Isaac Newton (ekki leiðum að líkjast!) í útleiðslunni og segja að hitastigsbreytingin sé mjög lítil svo $T \approx T_0$ (það er ekki alveg satt!) og að þess vegna sé $PV = nRT = P_0 V_0$ svo að við fáum að:

$$P = \frac{P_0 V_0}{V} = \frac{P_0 V_0}{V_0(1+z')} = P_0\left(1+z'\right)^{-1} \approx P_0(1 - z')$$

Þar sem við höfum notað nálgunina $(1+x)^n \approx 1 + nx$ fyrir $x \ll 1$ sem er lítið. En þá gefur kraftajafnan að:

$$\rho_0 V_0 \ddot{z} = m\ddot{z} = \left(P(x) - P(x+\Delta x)\right)A = P_0\left(z'(x+\Delta x,t) - z'(x,t)\right)A = P_0\left(\frac{z'(x+\Delta x,t) - z'(x,t)}{\Delta x}\right)V_0$$

Við notum síðan skilgreininguna á afleiðunni ásamt því að stytta út V_0 til þess að álykta að $\ddot{z} = \frac{P_0}{\rho_0} z''$. $\square$

Við sjáum þá að með þessari aðferð (sem er upphaflega eftir Newton) fáum við að hraði hljóðsins er:

$$v_{\text{hljóð}} = \sqrt{\frac{P_0}{\rho_{\text{loft}}}} = \sqrt{\frac{101{,}3\,\text{kPa}}{1{,}225\,\text{kg/m}^3}} = 288\,\text{m/s}.$$

Sem er í nærri lagi við að viðtekið gildi á hraða hljóðsins í lofti $v_{\text{hljóð}} = 343\,\text{m/s}$. Reyndar er auðvelt að laga mistökin sem Newton gerði (eftir að við lærum hvað óvermið ferli er í kafla 15 um Varmafræði). Það kemur í ljós að hitastigið á loftinu er að breytast nógu mikið til þess að nálgunin $T \approx T_0$ sé ekki nógu góð! Reyndar kemur í ljós að það er til önnur varðveitt stærð sem nefnist óvermnióbreytan, PV^γ, þar sem γ er fasti sem er háður sameindauppbyggingu kjörgasins og nefnist Laplacefastinn eða óvermnisstuðullinn. Fyrir loft er hægt að sýna að $\gamma_{\text{loft}} = \frac{7}{5}$. Með því að laga útleiðsluna þá getum við sýnt að þá verður hljóðhraðinn gefinn með:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$$

En þá fæst að $v_{\text{hljóð}} = \sqrt{\frac{\gamma_{\text{loft}} P_0}{\rho_{\text{loft}}}} = 340\,\text{m/s}$.

12.4 Að leysa bylgjujöfnuna

Í kaflanum um einfalda sveifluhreyfingu þá sýndum við að lausnir á diffurjöfnunni $\ddot{z} = -\omega^2 z$ voru gefnar með $z(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ og við skilgreindum útslag sveiflunnar, A, sveiflutímann, T, og sveiflutíðnina, ω. Það kemur í ljós að bylgjujafnan er í rauninni bara það sem við fáum þegar við setjum saman sveifluhreyfingu í tíma og rúmi, þ.e.a.s. lausnir bylgjujöfnunnar, $\psi(x,t)$, munu sveiflast með einfaldri sveifluhreyfingu sem fall af tíma og sem fall af stöðu!

Lögmál 12.5. Grunnlausnir bylgjujöfnunnar $\ddot{\psi} = c^2\psi''$ eru gefnar með:

$$\psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \varphi_0)$$

Þar sem ω er sveiflutíðni; A er útslag; φ_0 er fasahorn og $k := \frac{\omega}{c}$ er **bylgjutala** bylgjunnar.

Útleiðsla: Við diffrum bara. Athugum að:

$$\dot{\psi} = -\omega A\cos(kx - \omega t + \varphi_0), \qquad \text{þannig að} \qquad \ddot{\psi} = -\omega^2 A\sin(kx - \omega t + \varphi_0).$$

Athugum síðan að:

$$\psi' = -Ak\cos(kx - \omega t + \varphi_0), \qquad \text{þannig að} \qquad \psi'' = -Ak^2\sin(kx - \omega t + \varphi_0).$$

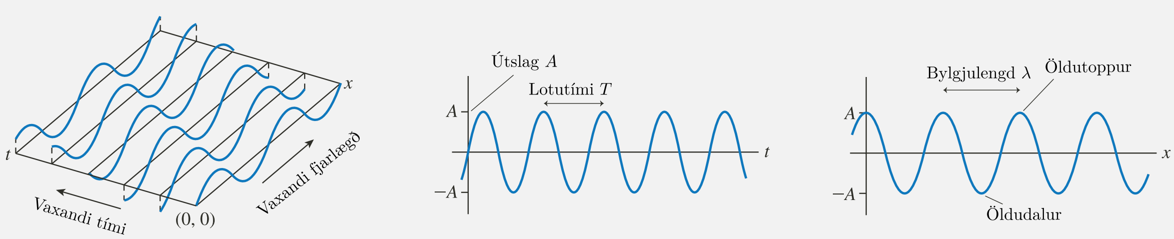
En þar með höfum við að:

$$\ddot{\psi} = -\omega^2 A\sin(kx - \omega t + \varphi_0) = -c^2k^2\sin(kx - \omega t + \varphi_0) = c^2\psi''.$$

Þar sem við höfum notað skilgreininguna á bylgjutölunni, $\omega = kc$.

□

Skilgreining 12.6. Látum $\psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \varphi_0)$ vera grunnlausn á bylgjujöfnunni.



(i) Við segjum að **lotutími** bylgjunnar sé $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

(ii) Við segjum að **bylgjulengd** bylgjunnar sé $\lambda = \frac{2\pi}{k}$.

(iii) Við segjum að **tíðni** bylgjunnar sé $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$.

Reyndar ættum við líka að minnast á að við hugsum um lotutímann sem tímann sem líður á milli hverar sveiflu sem fall af tíma og bylgjulengdin er vegalengdin sem líður milli hverar sveiflu (það er að segja hversu langt er á milli öldutoppanna).

Lögmál 12.7. Látum c vera bylgjuhraða bylgju með bylgjulengd λ og tíðni f. Þá gildir að:

$$c = \lambda f.$$

Útleiðsla: Við fáum að:

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \lambda f.$$

□

12.5 Afl og styrkur

Skilgreining 12.8. Látum ΔE tákna breytingu á orku á kerfi vegna vinnunnar sem er unnin á því á tímanum Δt. Þá er **aflið**, P, skilgreint þannig að:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t}.$$

Þetta er í rauninni meðalaflið á tímanum Δt. Við getum líka skrifað aflið á formi örsmæða. Þá er yfirleitt skipt orkubreytingunni út fyrir vinnunna þannig að: $P = \frac{dW}{dt}$. Við sjáum að $[P] = \mathrm{J/s} = \mathrm{W}$ en sú stærð hefur fengið nafnið Watt til heiðurs skoska verkfræðingnum James Watt. Það er hinsvegar eðlilegt að tala um afl tiltekins krafts svo við athugum að:

Lögmál 12.9. Látum $\vec{F}$ tákna fastann kraft sem verkar á hlut með hraðavigur $\vec{v}$. Afl kraftsins er þá

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Útleiðsla: Við fáum að:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{F} \cdot \Delta\vec{s}\right) = \underbrace{\frac{d\vec{F}}{dt}}_{=0} \cdot \Delta\vec{s} + \vec{F} \cdot \underbrace{\frac{d\Delta\vec{s}}{dt}}_{=\vec{v}} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Þar sem við höfum notað að $\frac{d\vec{F}}{dt} = 0$ því $\vec{F}$ er fastur kraftur. $\square$

Skilgreining 12.10. Látum P vera afl bylgju og látum A vera yfirborðsflatarmál sem bylgjan breiðist út í gegnum. **Bylgjustyrkur** bylgjunnar er táknaður með I og skilgreindur þannig að:

$$I = \frac{P}{A}$$

Ef við erum með uppsprettu sem er kúlusamhverf, og sendir því bylgjur í allar áttir, þá mun aflið dreifast jafnt yfir kúlu með yfirborðsflatarmál $A = 4\pi r^2$ í fjarlægð r frá uppsprettunni. Þá höfum við að bylgjustyrkurinn er gefinn með $I = \frac{P}{4\pi r^2}$ í fjarlægð r frá uppsprettunni.

Við komum nú loksins að ljótustu jöfnu sem þið munið nokkru sinni læra á skólagögnu ykkar í MR, þ.e.a.s. skynstyrksjöfnunni:

Skilgreining 12.11. Gerum ráð fyrir að við höfum hljóðuppsprettu með hljóðstyrk I. Þá er **skynstyrkur hávaðans**

$$\beta = \beta_0 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Þar sem $\beta_0 = 10\,\mathrm{dB}$ og $I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$.

Sálfræðirannsóknir í hljóðeðlisfræði hafa leitt í ljós að fólk segir að hljóð sé tvöfalt hærra við það að skynstyrkur hávaðans hækki um $10\,\mathrm{dB}$. Hinsvegar þá eykst skynstyrkur hávaðans aðeins um $3\,\mathrm{dB}$ við það að tvöfalda afl uppsprettunnar, $P_2 = 2P_1$, eins og við skulum nú sýna:

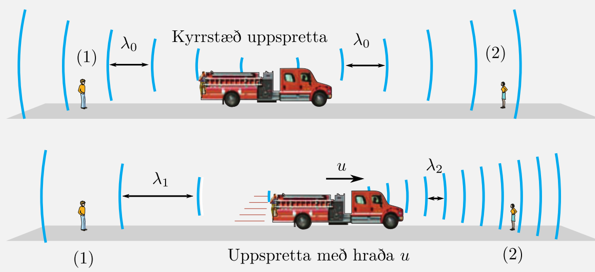
$$\beta_2 - \beta_1 = \beta_0 \log_{10}\left(\frac{P_2}{AI_0}\right) - \beta_0 \log_{10}\left(\frac{P_1}{AI_0}\right) = \beta_0 \log_{10}\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = \beta_0 \log_{10}(2) = 3\,\mathrm{dB}.$$

12.6 Dopplerhrif

Kyrrstæður viðtakandi og uppspretta sem hreyfist

Lögmál 12.12. Látum f_0 vera tíðnina á bylgjunum sem að uppspretta sendir frá sér. Látum uppsprettuna fjarlægjast kyrrstæðan viðtakanda (1) og nálgast kyrrstæðan viðtakanda (2) með hraða u. Þá gildir að tíðnin sem viðtakendurnir heyra er gefin með:

$$f_1 = \left(\frac{c}{c+u}\right) f_0, \qquad f_2 = \left(\frac{c}{c-u}\right) f_0$$



Útleiðsla: Látum $T_0 = \frac{1}{f_0}$ tákna tímann sem líður milli þess að uppsprettan sendir frá sér bylgju. Þá mun bylgjulengdin lengjast (fyrir viðtakanda 1) samkvæmt:

$$\lambda_1 = \lambda_0 + uT_0$$

Þar sem að uppsprettan mun hafa færst til um vegalengd uT_0 milli þess að senda frá sér bylgjurnar. En hraði hljóðsins, c, er óbreyttur í miðlinum svo við ályktum að:

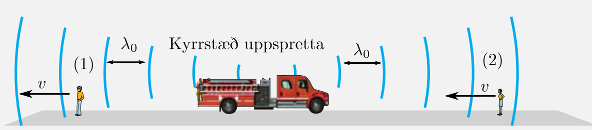
$$f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{c}{\lambda_0 + uT_0} = \frac{c}{\lambda_0 + \frac{u}{f_0}} = \frac{cf_0}{\lambda_0 f_0 + u} = \left(\frac{c}{c+u}\right) f_0.$$

Með sömu reikningum fæst að $f_2 = \left(\frac{c}{c-u}\right) f_0$. □

Viðtakandi sem hreyfist og kyrrstæð uppspretta

Lögmál 12.13. Látum f_0 vera tíðnina á bylgjunum sem að kyrrstæð uppspretta sendir frá sér. Látum viðtakanda (1) nálgast uppsprettuna og látum viðtakanda (2) fjarlægjast uppsprettuna með hraða v. Þá gildir að tíðnin sem viðtakendurnir heyra er gefin með:

$$f_1 = \left(\frac{c-v}{c}\right) f_0, \qquad f_2 = \left(\frac{c+v}{c}\right) f_0$$



Útleiðsla: Látum $T_0 = \frac{1}{f_0}$ tákna tímann sem líður milli þess að uppsprettan sendir frá sér bylgju og látum T_1 tákna tímann sem líður milli þess að viðtakandi (1) greinir bylgjurnar. Þá er vegalengdin sem viðtakandinn ferðast á milli þess að greina bylgjuna $\lambda_0 + vT_1$ en vegalengdin sem bylgjan þarf að ferðast á sama tíma er þá cT_1. Við fáum því að:

$$\lambda_0 + vT_1 = cT_1 \implies T_1(c-v) = \lambda_0 \implies T_1 = \frac{\lambda_0}{c-v} \implies f_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{c-v}{\lambda_0} = \left(\frac{c-v}{c}\right) f_0.$$

Sömu reikningar gefa síðan að $f_2 = \left(\frac{c+v}{c}\right) f_0$. □

Allsherjarjafnan

Ef við setjum þessar tvær hugmyndir saman þá fáum við:

Lögmál 12.14. Látum f_0 vera tíðnina sem að uppspretta með hraða u sendir frá sér í áttina að viðtakanda með hraða v. Þá gildir að tíðnin sem viðtakandinn heyrir er gefin með:

$$f = \left(\frac{c \pm v}{c \pm u}\right) f_0$$

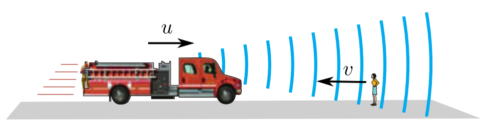
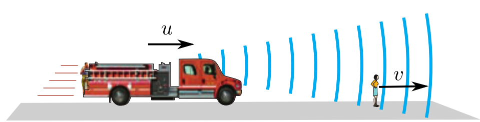
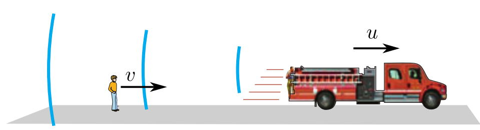
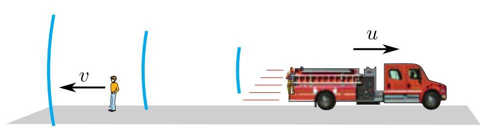
Þar sem c táknar bylgjuhraðann í miðlinum, v táknar hraða viðtakandans og u táknar hraða uppsprettunnar. Formerkið á v er jákvætt ef viðtakandinn er að ferðast í áttina að uppsprettunni en neikvætt ef viðtakandinn er að ferðast frá uppsprettunni. Formerkið á u er jákvætt ef uppsprettan er að ferðast í burtu frá viðtakandanum en neikvætt ef uppsprettan er að ferðast að viðtakandanum.

Útleiðsla: Þetta fæst einfaldlega með því að margfalda saman niðurstöðurnar í lögmálunum tveim á undan:

$$f = \left(\frac{c \pm v}{c}\right)\left(\frac{c}{c \pm u}\right) f_0 = \left(\frac{c \pm v}{c \pm u}\right) f_0.$$

□

Við tökum síðan saman í litla töflu þessi fjögur tilvik og hvernig þau líta út:

Mynd	**Lýsing**	**Tíðni**
	Viðtakandi nálgast uppsprettu. Uppspretta nálgast viðtakanda.	$f = \left(\frac{c+v}{c-u}\right) f_0$
	Viðtakandi fjarlægist uppsprettu. Uppspretta nálgast viðtakanda.	$f = \left(\frac{c-v}{c-u}\right) f_0$
	Viðtakandi nálgast uppsprettu. Uppspretta fjarlægist viðtakanda.	$f = \left(\frac{c+v}{c+u}\right) f_0$
	Viðtakandi fjarlægist uppsprettu. Uppspretta fjarlægist viðtakanda.	$f = \left(\frac{c-v}{c+u}\right) f_0$

Tafla 12.1: Allsherjarjafnan í öllum fjórum tilvikum.

12.7 Eigintíðnir og eiginsveifluhættir

Við höfðum séð að grunnlausnir bylgjujöfnunnar voru bylgjupúlsar af gerðinni $\psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \varphi_0)$. Nú þurfum við að kafa aðeins dýpra í bylgjujöfnuna $\ddot{\psi} = c^2\psi''$. Við athugum að:

Lögmál 12.15. Lítum á bylgjujöfnuna $\ddot{\psi} = c^2\psi''$. Með því að aðskilja bylgjufallið í rúmhnit og tímahnit $\psi(x,t) = f(x)g(t)$ þá sést að hvort hnit fyrir sig er á einfaldri sveifluhreyfingu:

$$f'' = -k^2 f, \qquad \ddot{g} = -\omega^2 g.$$

Þar sem k er bylgjutalan og $\omega = kc$ er sveiflutíðnin.

Útleiðsla: Við aðskiljum bylgjufallið í rúmhnit og tímahnit, $\psi(x,t) = f(x)g(t)$. Við höfum þá að:

$$\ddot{\psi} = c^2\psi'' \implies f\ddot{g} = c^2 f'' g \implies \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{g}}{g} = \frac{f''}{f}$$

En vinstri hliðin er einungis fall af t og hægri hliðin er einungis fall af x. En þar með getum við ályktað að báðar hliðarnar verða að vera fastar! Þar með er til neikvæður fasti $-k^2$ (það er ekki augljóst að fastinn þurfi að vera neikvæður en ef maður gerir ráð fyrir að fastinn sé núll eða jákvæður þá fæst mótsögn!). Fastinn k mun síðan reynast vera bylgjutalan! Við höfum þá að:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{g}}{g} = -k^2, \qquad \frac{f''}{f} = -k^2.$$

Sem við getum umritað sem:

$$\ddot{g} = -(kc)^2 g, \qquad f'' = -k^2 f$$

En þetta eru jöfnur fyrir tvær (mismunandi) einfaldar sveifluhreyfingar! Við ályktum því að:

$$g(t) = \alpha\cos(kct + \beta), \qquad f(x) = \gamma\sin(kx + \delta).$$

Þar sem α, β, γ og δ er fastar sem ákvarðast út frá upphafsskilyrðunum. En þar með höfum við sýnt að:

$$\psi(x,t) = f(x)g(t) = \alpha\gamma\sin(kx + \delta)\cos(kct + \beta)$$

Við notum síðan liðunarreglur hornafalla, $2\sin(u)\cos(v) = \sin(u+v) + \sin(u-v)$ til þess að fá:

$$\psi(x,t) = A\sin(kx + kct + \phi) + A\sin(kx - kct + \varphi)$$

Þar sem við höfum skilgreint nýja fasta $A = \frac{\alpha\gamma}{2}$, $\phi = \delta + \beta$ og $\varphi = \delta - \beta$. Ef við skilgreinum að lokum sveiflutíðnina sem $\omega = kc$ þá höfum við sýnt að grunnlausnirnar eru gefnar með

$$\psi(x,t) = A\sin(kx + \omega t + \phi) + A\sin(kx - \omega t + \varphi).$$

Á þessum tímapunkti er hugsanlega vert að minnast á það að við segjum að $\psi_V(x,t) = A\sin(kx + \omega t + \phi)$ sé staðbylgja sem ferðast til vinstri en að $\psi_H(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \varphi)$ sé staðbylgja sem ferðast til hægri (sjá bls. 100-102 í grænu bókinni til skýringar fyrir formerkið).

Skilgreining 12.16. Við segjum að jaðarskilyrði séu

(i) **Dirichlet** eða **lokuð** jaðarskilyrði ef $\psi(0,t) = \psi(\ell,t) = 0$.

(ii) **Neumann** eða **opin** jaðarskilyrði ef $\psi'(0,t) = \psi'(\ell,t) = 0$.

(iii) **Blönduð** jaðarskilyrði ef annar endinn hefur Neumann jaðarskilyrði og hinn endinn hefur Dirichlet jaðarskilyrði, þ.e. $\psi(0,t) = \psi'(\ell,t) = 0$ eða $\psi'(0,t) = \psi(\ell,t) = 0$.

Við sjáum að jaðarskilyrðin eru í rauninni bara skilyrði sem við setjum á rúmhnitið af bylgjufallinu. Það segir til um það til dæmis hvort að strengur sé festur í báða enda (gítarstrengur) eða hvort að annar endirinn sé laus (blönduð jaðarskilyrði) eða hvort að þetta sé eins og opin pípa sem við blásum í gegnum (opin jaðarskilyrði. Þau eru semsagt rúmfræðilegar skorður sem að hluturinn sem við erum að skoða hefur. Það kemur í ljós að aðeins út frá því hver jaðarskilyrði strengsins eru þá getum við vitað hvernig hann mun sveiflast (og þar með hvaða tóna hann mun gefa frá sér).

Lögmál 12.17. Annað hvort Dirichlet eða Neumann jaðarskilyrði.

$$\lambda_n = \frac{2\ell}{n}, \qquad f_n = nf_1, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Útleiðsla: Við höfðum sýnt að rúmhnitið fyrir bylgjufallið var: $f(x) = \gamma \sin(kx + \delta)$. Við athugum síðan að $\psi(0,t) = \psi(\ell,t) = 0$ er jafngilt því að $f(0) = f(\ell) = 0$. En þá höfum við að:

$$f(0) = 0 \implies \gamma \sin(k \cdot 0 + \delta) = 0 \implies \gamma \sin(\delta) = 0 \implies \delta = 0$$

En þar með er $f(x) = \gamma \sin(kx)$. Við athugum síðan að:

$$f(\ell) = 0 \implies \gamma \sin(k\ell) = 0 \implies k\ell = n\pi$$

En þar með höfum við sýnt að $k = \frac{n\pi}{\ell}$. En það þýðir einmitt að $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\ell}{n}$. Við setjum síðan merkimiða n á bylgjulengdina til þess að minna okkur á að þetta er háð heiltölunni n. Við athugum síðan að tilheyrandi tíðni er þá fundin með:

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = n\frac{c}{2\ell} = n\frac{c}{\lambda_1} = nf_1.$$

Fyrir Neumann skilyrðin þá höfum við að $f'(x) = \gamma k \cos(k\ell + \delta)$ og þá

$$f'(0) = 0 \implies \gamma k \cos(\delta) = 0 \implies \delta = \pm\frac{\pi}{2}.$$

En það er jafngilt því að $f'(x) = \gamma k \sin(k\ell)$ og þá fæst með sömu reikningum og áðan að eigintíðnirnar og eiginbylgjulengdirnar verða eins og fyrir Dirichlet skilyrðið.

□

Lögmál 12.18. Blönduð, hálf-opin jaðarskilyrði

$$\lambda_n = \frac{4\ell}{2n-1}, \qquad f_n = (2n-1)f_1, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Útleiðsla: Ef $f(0) = 0$ þá höfum við eins og áður að þá sé $\delta = 0$ svo $f(x) = \gamma \sin(kx)$. Síðan athugum við að $f'(x) = \gamma k \cos(kx)$ og þá höfum við að:

$$f'(\ell) = 0 \implies \gamma k \cos(k\ell) = 0 \implies k\ell = -\frac{\pi}{2} + n\pi \implies k = \frac{(2n-1)\pi}{2\ell}$$

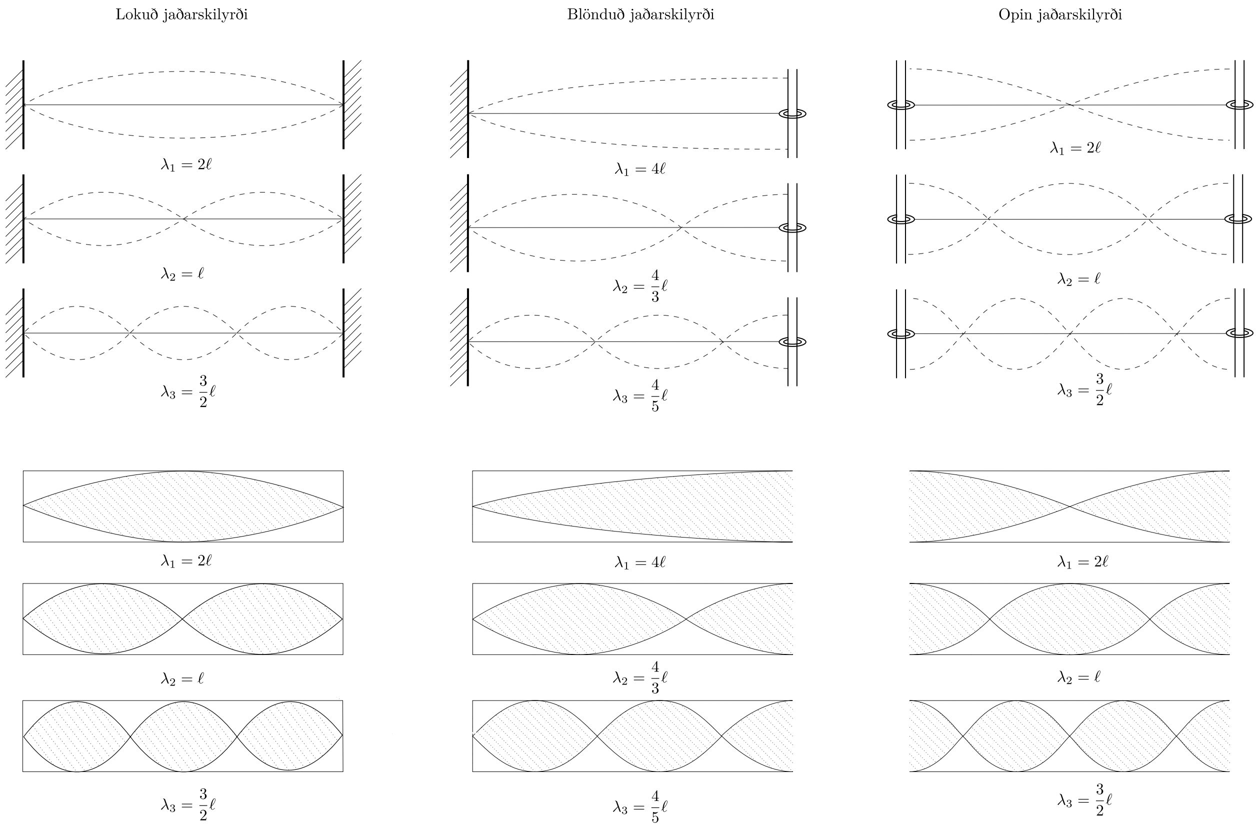
(Eina ástæðan fyrir að við veljum $-\frac{\pi}{2}$ en ekki $\frac{\pi}{2}$ er til þess að $n \in \mathbb{Z}_+$ en ekki $n \in \mathbb{N}$ í loksvarinu). En þar með höfum við að:

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k} = \frac{4\ell}{2n-1}, \qquad \text{sem gefur þá að} \qquad f_n = \frac{c}{\lambda_n} = (2n-1)\frac{c}{4\ell} = (2n-1)\frac{c}{\lambda_1} = (2n-1)f_1.$$

□

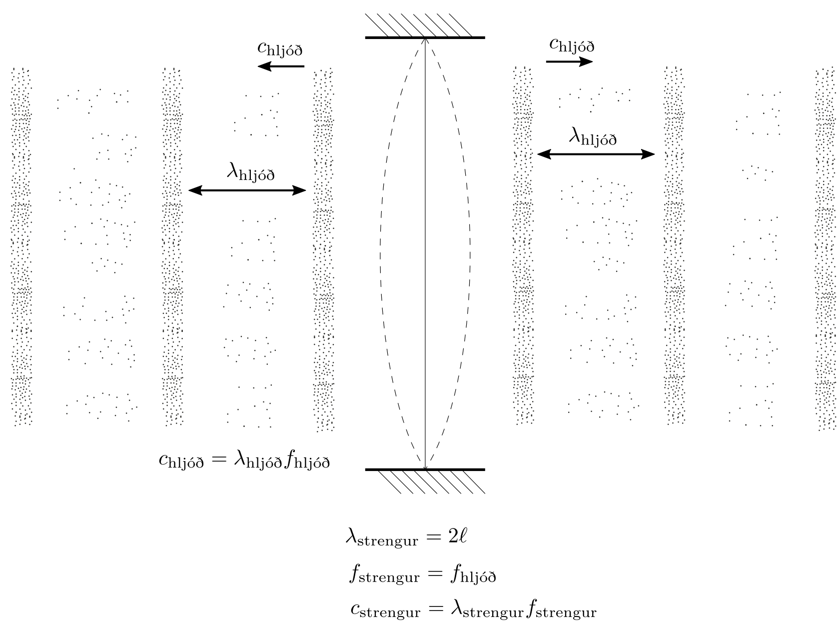
Skilgreining 12.19. Tíðnirnar f_n sem ákvarðast af jaðarskilyrðunum kallast **eigintíðnir** strengsins. Við segjum að f_1 sé **grunntónn** (eða fyrsti yfirtónn) strengsins og að f_n sé ***n*-ti yfirtónn** hans.

Ef ykkur finnst þetta vera svolítið flókið þá þurfið þið ekki að hafa neinar áhyggjur! Það er líka til einföld rúmfræðileg leið til þess að sjá þetta! Sem við munum nú skoða:



Mynd 12.1: Fyrstu þrír eiginsveifluhættirnir fyrir mismunandi jaðarskilyrði.

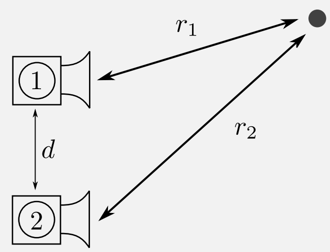
Að lokum minnumst við á tengslin milli staðbylgjunnar á strengnum og hljóðbylgjunnar sem hún myndar:



Mynd 12.2: Tengslin milli staðbylgjunnar á strengnum og hljóðbylgjunnar sem sveifla strengsins myndar.

12.8 Bylgjusamliðun

Lögmál 12.20. Hugsum okkur að við höfum tvær samfasa bylgjuuppsprettur í fjarlægð d frá hvor annarri sem senda út eins bylgjur með útslag A, tíðni f og bylgjulengd λ. Skoðum einhvern punkt, P, sem er þannig að önnur uppsprettan er í fjarlægð r_1 frá punktinum og hin uppsprettan er í fjarlægð r_2 frá punktinum.



Þá er samliðunarbylgjan sem athugandi í punkti P greinir gefin með:

$$A\sin(kr_1 - \omega t) + A\sin(kr_2 - \omega t) = 2A\cos\left(\frac{1}{2}k\Delta r\right)\sin\left(\frac{1}{2}k(r_1 + r_2) - \omega t\right).$$

Sér í lagi þá mun athugandinn heyra fullkomlega styrkjandi/eyðandi bylgjusamliðun í punkti P ef:

$$\Delta r = \begin{cases} n\lambda & \text{(styrkjandi bylgjusamliðun)} \\ \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda & \text{(eyðandi bylgjusamliðun)} \end{cases}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Útleiðsla: Skoðum samliðunarbylgjuna í punktinum P en hún er gefin með:

$$\psi_{\text{P}} = \psi_1 + \psi_2 = A\sin(kr_1 - \omega t) + A\sin(kr_2 - \omega t)$$

Með því að nota þáttunarreglur hornafalla (sjá bls. 68. í grænu bókinni):

$$\sin(s) + \sin(t) = 2\sin\left(\frac{s+t}{2}\right)\cos\left(\frac{s-t}{2}\right),$$

fæst að:

$$\begin{aligned} \psi &= A\sin(kr_1 - \omega t) + A\sin(kr_2 - \omega t) \\ &= 2A\sin\left(\frac{(kr_1 - \omega t) + (kr_2 - \omega t)}{2}\right)\cos\left(\frac{(kr_1 - \omega t) - (kr_2 - \omega t)}{2}\right) \\ &= 2A\cos\left(\frac{1}{2}k\Delta r\right)\sin\left(\frac{1}{2}k(r_1 + r_2) - \omega t\right). \end{aligned}$$

Við sjáum að samliðunarbylgjan hegðar sér eins og bylgja með fast útslag $B = 2A\cos\left(\frac{1}{2}k\Delta r\right)$, tíðni f og bylgjulengd λ, sem rita mætti sem $\psi = B\sin(kr - \omega t)$ þar sem $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$ er meðalfjarlægðin frá hátölurunum. En þá fæst fullkomlega styrkjandi bylgjusamliðun $B = 2A$ ef:

$$\cos\left(\frac{1}{2}k\Delta r\right) = 1 \implies \frac{1}{2}k\Delta r = n\pi \implies \Delta r = \frac{2n\pi}{k} = n\lambda.$$

En fullkomlega eyðandi bylgjusamliðun $B = 0$ ef:

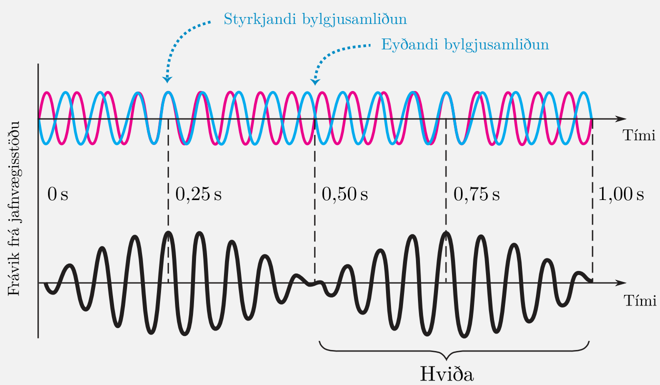
$$\cos\left(\frac{1}{2}k\Delta r\right) = 0 \implies \frac{1}{2}k\Delta r = \frac{\pi}{2} + n\pi = (2n+1)\frac{\pi}{2} \implies \Delta r = (2n+1)\frac{\pi}{k} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda.$$

Almennt segjum við að samliðun sé **styrkjandi** ef $B > A$ og **eyðandi** ef $B < A$. $\square$

12.9 Hviður

Lögmál 12.21. Hugsum okkur að við höfum tvær samfasa bylgjuuppsprettur í fjarlægð d frá hvor annarri sem senda út bylgjur með sama útslag A en mismunandi tíðnir f_1 og f_2. Skoðum einhvern punkt, P, sem er þannig að önnur uppsprettan er í fjarlægð r_1 frá punktinum og hin uppsprettan er í fjarlægð r_2 frá punktinum. Þá heyrir athugandi í punktinum P samliðunarbylgju sem styrkist og eyðist með hviðutíðni:

$$f_{\text{hviður}} = \Delta f = f_2 - f_1.$$



Útleiðsla: Skoðum samliðunarbylgjuna í punktinum P en hún er gefin með:

$$\psi_{\text{P}} = \psi_1 + \psi_2 = A\sin(k_1 r_1 - \omega_1 t) + A\sin(k_2 r_2 - \omega_2 t)$$

Með því að nota þáttunarreglur hornafalla (sjá bls. 68. í grænu bókinni):

$$\sin(s) + \sin(t) = 2\sin\left(\frac{s+t}{2}\right)\cos\left(\frac{s-t}{2}\right),$$

fæst að:
$$\begin{aligned}\psi &= A\sin(k_1 r_1 - \omega t) + A\sin(k_2 r_2 - \omega t)\\ &= 2A\sin\left(\frac{(k_1 r_1 - \omega_1 t) + (k_2 r_2 - \omega_2 t)}{2}\right)\cos\left(\frac{(kr_1 - \omega_1 t) - (kr_2 - \omega_2 t)}{2}\right)\\ &= 2A\cos\left(\frac{1}{2}\Delta(kr) - \frac{1}{2}\Delta\omega t\right)\sin\left(\frac{1}{2}(k_1 r_1 + k_2 r_2) - \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t\right).\end{aligned}$$

Við munum því heyra hljóð með meðaltíðnina $f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$. Hinsvegar þá mun mismunurinn í tíðnunum valda hviðutíðni sem eyðir og styrkir útslag hljóðbylgjunnar með jöfnum tímamismun. Við sjáum hér að ofan að ein hviða samsvarar hálfum sveiflutíma kósínusfallsins því ein hviða jafngildir því að kósínusinn fari frá því að vera núll, síðan einn og síðan aftur núll, en það er einmitt hálfur sveiflutími svo við höfum að:

$$f_{\text{hviður}} = \frac{2}{T} = \frac{2}{\frac{2\pi}{\frac{1}{2}\Delta\omega}} = \Delta f.$$

$\square$

12.10 Tónlist (ítarefni)

Athugið: Ég hef aldrei lært tónfræði, svo takið þessum kafla með fyrirvara. Hinsvegar hefur meðhöfundur þessa kafla, Álfheiður Edda Sigurðardóttir, lært mannganginn í tónfræði. Ef þið hafið einhverjar ábendingar, sama hversu smávægilegar, um hvernig mætti orða hlutina betur í samræmi við það sem tíðkast í tónfræði þá megið þið endilega senda okkur ábendingar þess varðandi! Ath: tónbil = k

Við skulum byrja á því að setja fram nóturnar og tilheyrandi tíðnir þeirra hér fyrir neðan:

Nóta	**Tíðni [Hz]**
C_0	16,35
$D_0^\flat$	17,32
D_0	18,35
$E_0^\flat$	19,45
E_0	20,60
F_0	21,83
$G_0^\flat$	23,12
G_0	24,50
$A_0^\flat$	25,96
A_0	27,50
$B_0^\flat$	29,14
B_0	30,87

Nóta	**Tíðni [Hz]**
C_1	32,70
$D_1^\flat$	34,65
D_1	36,71
$E_1^\flat$	38,89
E_1	41,20
F_1	43,65
$G_1^\flat$	46,25
G_1	49,00
$A_1^\flat$	51,91
A_1	55,00
$B_1^\flat$	58,27
B_1	61,74

Nóta	**Tíðni [Hz]**
C_2	65,41
$D_2^\flat$	69,30
D_2	73,42
$E_2^\flat$	77,78
E_2	82,41
F_2	87,31
$G_2^\flat$	92,50
G_2	98,00
$A_2^\flat$	103,83
A_2	110,00
$B_2^\flat$	116,54
B_2	123,47

Nóta	**Tíðni [Hz]**
C_3	130,81
$D_3^\flat$	138,59
D_3	146,83
$E_3^\flat$	155,56
E_3	164,81
F_3	174,61
$G_3^\flat$	185,00
G_3	196,00
$A_3^\flat$	207,65
A_3	220,00
$B_3^\flat$	233,08
B_3	246,94

Nóta	**Tíðni [Hz]**
C_4	261,63
$D_4^\flat$	277,18
D_4	293,66
$E_4^\flat$	311,13
E_4	329,63
F_4	349,23
$G_4^\flat$	369,99
G_4	392,00
$A_4^\flat$	415,30
A_4	440,00
$B_4^\flat$	466,16
B_4	493,88

Nóta	**Tíðni [Hz]**
C_5	523,25
$D_5^\flat$	554,37
D_5	587,33
$E_5^\flat$	622,25
E_5	659,25
F_5	698,46
$G_5^\flat$	739,99
G_5	783,99
$A_5^\flat$	830,61
A_5	880,00
$B_5^\flat$	932,33
B_5	987,77

Nóta	**Tíðni [Hz]**
C_6	1046,50
$D_6^\flat$	1108,73
D_6	1174,66
$E_6^\flat$	1244,51
E_6	1318,51
F_6	1396,91
$G_6^\flat$	1479,98
G_6	1567,98
$A_6^\flat$	1661,22
A_6	1760,00
$B_6^\flat$	1864,66
B_6	1975,53

Nóta	**Tíðni [Hz]**
C_7	2093,00
$D_7^\flat$	2217,46
D_7	2349,32
$E_7^\flat$	2489,02
E_7	2637,02
F_7	2793,83
$G_7^\flat$	2959,96
G_7	3135,96
$A_7^\flat$	3322,44
A_7	3520,00
$B_7^\flat$	3729,31
B_7	3951,07

Ef við skoðum síðan hvað gerist við ákveðinn bókstaf þegar n hækkar. Þá er:

Nóta	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
Tíðni [Hz]	27,50	55	110	220	440	880	1760	3520

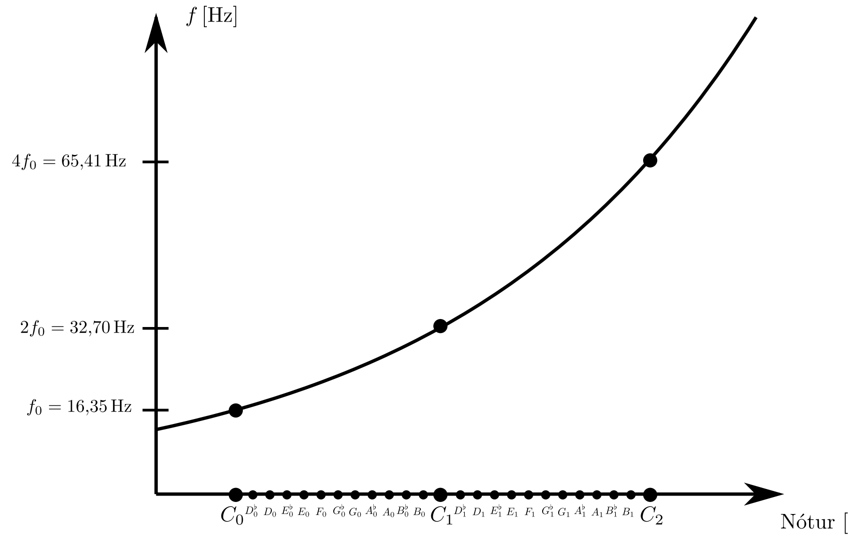
Það er að segja við sjáum að tíðnin tvöfaldast í hvert skipti sem að við hækkum n. Sama gildir um alla hina tónana í töflunni. Við höfum semsagt eftirfarandi lögmál:

Lögmál 12.22. Látum f_{C_n} tákna tíðni tónsins C_n og n tákna hæðirnar á tónstigunum. Þá gildir að:

$$f_{C_n} = 2^n f_{C_0}, \qquad \text{þar sem } f_{C_0} = 16{,}35\,\text{Hz}.$$

Sambærileg niðurstaða gildir fyrir alla hina tólf tónana.

Við skoðum núna annan merkilegan eiginleika sem að tónarnir hafa. Við skoðum nú graf af tíðnum tónanna, f sem fall af nótunum, en þá þurfum við fyrst að úthluta tónunum einhverri tölu (við getum ekki gert gröf af bókstöfum!). Það er því eðlilegast að raða þeim bara í stærðarröð þannig að $C_0 = 1$, $D_0^\flat = 2$, $D_0 = 3$, $\ldots$, $A_2^\flat = 35$, $\ldots$, $G_6 = 80$, $\ldots$, $B_7 = 96$. Þá fáum við eftirfarandi veldisvísisgraf:



Mynd 12.3: Graf sem sýnir hvernig að tíðnin vex með veldisfalli sem fall af nótunum.

En við sjáum þar með að í hverju þrepi tónstigans á hæð n þá hækkar tíðnin um $2^{\frac{1}{12}}$. Í hverri hæð eru síðan 12 tónar svo að þetta passar við niðurstöðuna sem við sáum áðan að þegar við hækkum um heila tónhæð þá tvöfaldast tíðnin því þá erum við að hækka um $k = 12$ þrep og þar með $\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{12} = 2$.

Lögmál 12.23. Látum k tákna hvert þrep í tónstiganum ($k = 1$ fyrir C_0 upp í $k = 96$ fyrir B_7). Þá gildir að tíðnin, f_k, k þrepum ofar í tónstiganum er gefin með:

$$f_k = 2^{\frac{k}{12}} f_0, \qquad \text{þar sem } f_0 = 16{,}35\,\mathrm{Hz}.$$

Til dæmis getum við þá athugað að við höfum að A_4 er $k = 57$ þrepum fyrir ofan C_0 svo við fáum að:

$$f_{57} = 2^{\frac{57}{12}} f_0 = 440\,\mathrm{Hz}$$

Sem er einmitt tíðnin sem við tengjum við nótuna A_4. Það er hinsvegar óþæginlegt að þurfa að burðast um með svona háar tölur og telja svona hátt upp svo venjulega endurskilgreinir tónlistarfólk skalan í kringum A_4 (því það er svo gott sem í miðjunni á öllum þeim nótum sem maður þarf að nota). Þá gildir sama lögmál nema núna er:

$$f_k = 2^{\frac{k}{12}} f_0, \qquad \text{þar sem } f_0 = 440\,\mathrm{Hz},$$

Þar sem k er neikvætt ef þrepið er fyrir neðan A_4 og jákvætt ef þrepið er fyrir ofan A_4. Þannig myndum við til dæmis geta fundið tíðnina á nótunni $D_0^\flat$ sem er $k = -8$ þrepum fyrir neðan A_4. En hún hefur tíðni:

$$f_{D_4^\flat} = 2^{-\frac{8}{12}} f_0 = 277{,}18\,\mathrm{Hz}.$$

En þetta þýðir að það er einmitt nóg að velja einn tón og stilla alla hina tónana í samræmi við það.

12.11 Chladni platan (ítarefni)

Að lokum skulum við aðeins fjalla um það hvað gerist þegar við höfum bylgjujöfnuna í hærri víddum. Í tveim rúmvíddum þá verður bylgjujafnan:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)$$

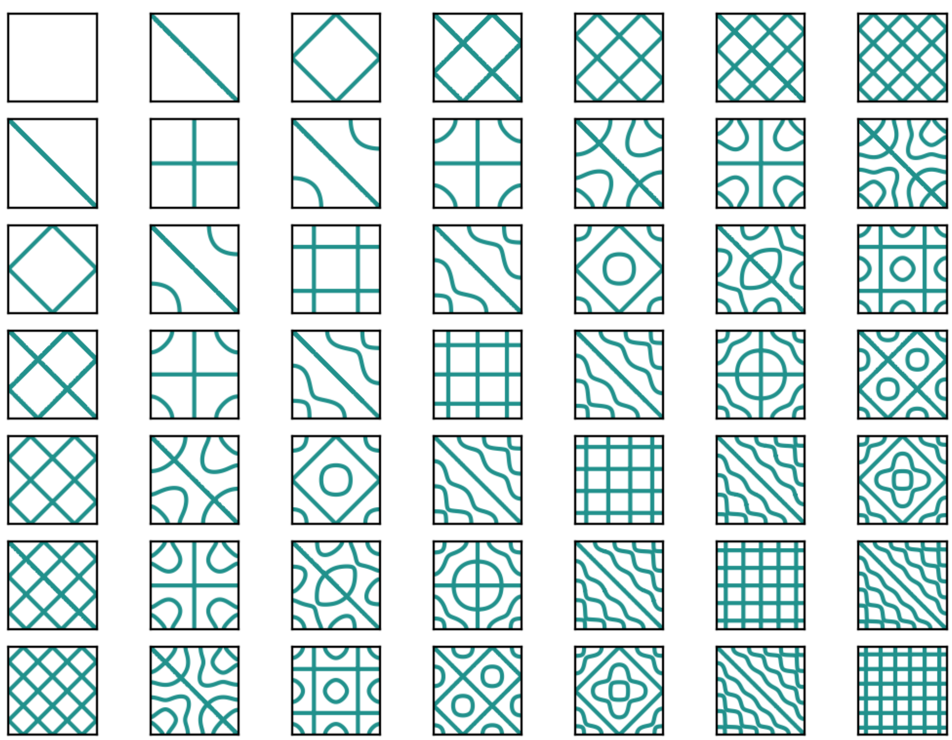
Þar sem $c = \sqrt{\frac{S}{\sigma}}$ er bylgjuhraðinn, S er yfirborðsspenna plötunnar og σ er massi hennar á flatareiningu. Við höfum að lausnirnar eru gefnar með:

$$\psi(x, y, t) = A\sin(kx + hy - \omega t + \varphi).$$

Þar sem A er útslag bylgjunnar, $\binom{k}{h}$ er bylgjuvigurinn, ω er sveiflutíðnin og φ er fasahornið. Við höfum síðan að $\omega^2 = c^2\left(k^2 + h^2\right)$. Ef við skoðum rétthyrningslaga Chladni-plötu með hliðarlengdir ℓ sem er fest í miðjunni þá gefa jaðarskilyrðin okkur að eiginsveifluhættirnir ákvarðast af $k = \frac{n\pi}{\ell}$ og $h = \frac{m\pi}{\ell}$ þar sem $n, m \in \mathbb{N}$. Við fáum að eigintíðnirnar, f_{nm}, eru nú háðar bæði n og m og eru gefnar með:

$$f_{nm} = \frac{c}{2\ell}\sqrt{n^2 + m^2}.$$

Ef við myndum strá sandi yfir plötuna og síðan leyfa henni að sveiflast þá væru þetta mynstrin sem við myndum sjá fyrir eiginsveifluhættina:



Mynd 12.4: Taflan sýnir eiginsveifluhátt (n, m) fyrir Chladni plötuna. Efst til vinstri er eiginsveifluhátturinn $(0, 0)$ og neðst til hægri er eiginsveifluhátturinn $(6, 6)$. Gildin á n vaxa til hægri en gildin á m vaxa niður.

12.12 Dæmi

Staðbylgjur á streng

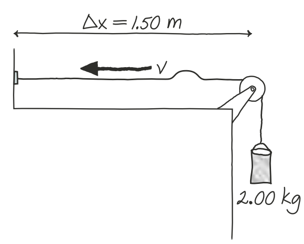
Við skoðuðum í þessum kafla staðbylgjur sem ferðast eftir streng sem hefur massa m og lengd ℓ. Við skilgreindum þá línulegan þéttleika vírsins sem stærðina $\mu := \frac{m}{\ell}$. Ef við strekkjum vírinn með togkrafti T þá munu bylgjurnar ferðast með hraða $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{T\ell}{m}}$ meðfram strengnum.

Dæmi 12.1. *(RK 16.1.)* Staðbylgja berst eftir streng með hraðanum $v = 200\,\mathrm{m/s}$. Strengurinn hefur línulegan þéttleika $\mu = 1{,}3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg/m}$. **(a)** Hver er togkrafturinn í strengnum? **(b)** Hver væri hraði bylgjunnar ef togkrafturinn væri helmingi minni?

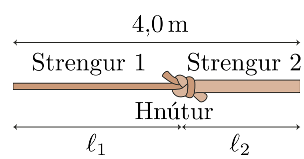
Dæmi 12.2. *(RK 16.2.)* Þegar togkrafturinn í streng nokkrum er $75\,\mathrm{N}$ þá ferðast staðbylgjur á strengnum með hraða $150\,\mathrm{m/s}$. Hver þyrfti togkrafturinn í strengnum að vera til þess að bylgjurnar bærust með hraða $180\,\mathrm{m/s}$ eftir strengnum?

Dæmi 12.3. *(RK 16.3.)* Strengur með massa $25\,\mathrm{g}$ er strekktur með togkrafti $20\,\mathrm{N}$. Hversu langur er strengurinn ef það tekur bylgjupúls $50\,\mathrm{ms}$ að fara frá einum enda strengsins til hins endans?

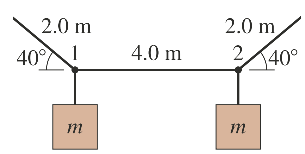
Dæmi 12.4. Á myndinni hér til hægri má sjá $2{,}00\,\mathrm{m}$ langan málmvír sem er festur við $2{,}00\,\mathrm{kg}$ lóð yfir núningslausa, massalausa trissu. Málmvírinn er festur við vegg í hinn endann þannig að $\Delta x = 1{,}50\,\mathrm{m}$ af málmvírnum hanga yfir borðinu milli veggsins og trissunnar. Nú plokkum við strenginn þannig að staðbylgja byrjar að ferðast meðfram strengnum. Með ofursnjallsímanum okkar tekst okkur að mæla tímann, $\Delta t = 18{,}0\,\mathrm{ms}$ sem það tekur bylgjuna að ferðast frá trissunni og að veggnum. **(a)** Hver er togkrafturinn í strengnum? **(b)** Hver er hraði bylgjunnar? **(c)** Hver er línulegur þéttleiki strengsins? **(d)** Hver er massi strengsins?



Dæmi 12.5. *(RK 16.47.)* Strengur 1 á myndinni hér til hægri hefur lengd ℓ_1 og línulegan þéttleika $\mu_1 = 2{,}0\,\mathrm{g/m}$. Strengur 2 hefur lengd ℓ_2 og línulegan þéttleika $\mu_2 = 4{,}0\,\mathrm{g/m}$. Strengirnir eru festir við sitt hvorn vegginn og síðan bundnir saman með hnút. Eðlisfræðinemandi heldur í hnútinn og sveiflar hnútnum upp og niður í lóðrétta stefnu. Vegalengdin á milli veggjanna er $L = \ell_1 + \ell_2 = 4{,}0\,\mathrm{m}$. Hver er lengdin á hvorum streng fyrir sig ef að staðbylgjurnar sem myndast við sveifluna lenda á veggjunum á sama tíma?



Dæmi 12.6. *(RK 16.58.)* Tveir jafnstórir massar m hanga í stálvír með línulegan þéttleika $\mu = 6{,}8\,\mathrm{g/m}$ eins og sést á myndinni hér til hægri. Hver er massinn m ef það tekur staðbylgju $24{,}0\,\mathrm{ms}$ að ferðast frá punkti 1 í punkt 2?



Dæmi 12.7. Fiðlustrengir eru misþykkir (en úr sama efni) og þykkasti strengurinn hefur línulegan þéttleika $\mu_1 = 3{,}0\,\mathrm{g/m}$ en sá þynnsti hefur línulegan þéttleika $\mu_2 = 0{,}29\,\mathrm{g/m}$. Látum r tákna geisla þunna strengsins og R tákna geisla þykka strengsins. Ákvarðið hlutfallið $\frac{r}{R}$.

Svör

(1) $T = 5{,}2\,\mathrm{N}$, $v = 140\,\mathrm{m/s}$. **(2)** $T = 110\,\mathrm{N}$. **(3)** $\ell = 2{,}0\,\mathrm{m}$. **(4)** $T = 19{,}6\,\mathrm{N}$, $v = 83\,\mathrm{m/s}$, $\mu = 2{,}8\,\mathrm{g/m}$, $m = 5{,}6\,\mathrm{g}$. **(5)** $\ell_1 = 2{,}34\,\mathrm{m}$, $\ell_2 = 1{,}66\,\mathrm{m}$. **(6)** $m = 16{,}1\,\mathrm{kg}$. **(7)** $\frac{r}{R} = 0{,}31$.

Hreyfilýsingin

> Við sáum að hreyfilýsing staðbylgju var gefin með:
>
> $$\psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \varphi_0)$$
>
> Þar sem $\omega = kc$ og c er bylgjuhraði staðbylgjunnar í miðlinum sem hún berst í. Við segjum að $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ sé sveiflutíðni bylgjunnar, T sé sveiflutíminn og f sé tíðni bylgjunnar. Ef λ táknar bylgjulengd bylgjunnar (lengdin milli öldutoppa hennar) þá höfum við að bylgjutalan, k, er gefin með $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Fasamunurinn φ_0 og útslagið A ákvarðast síðan af upphafsskilyrðunum.

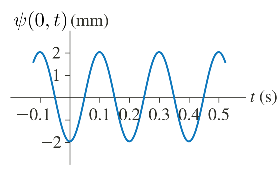
Dæmi 12.8. *(RK 16.10.)* Staðbylgja hefur sveiflutíðni 22 rad/s og bylgjulengd 7,0 m. Hver er bylgjutala bylgjunnar og bylgjuhraði hennar?

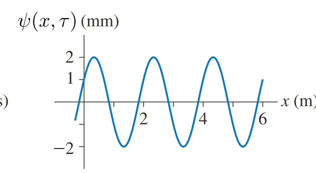
Dæmi 12.9. *(RK 16.11.)* Staðbylgja hefur bylgjuhraða 287 m/s og bylgjutölu 2,4 rad/m. Hver er bylgjulengd bylgjunnar og tíðni hennar?

Dæmi 12.10. *(RK 16.13.)* Hreyfilýsing staðbylgju er gefin með $y(x,t) = 0{,}025\sin(1{,}8x - 66t)$ þar sem allar stærðir eru í SI-einingum. Hver er **(a)** tíðnin **(b)** bylgjulengdin **(c)** bylgjuhraðinn?

Dæmi 12.11. Hreyfilýsing staðbylgju er gefin með $\psi(x,t) = 6{,}0 \cdot 10^{-5}\cos(1800t - 5{,}3x)$ þar sem allar stærðir eru í SI-einingum. Hver er **(a)** tíðnin **(b)** bylgjulengdin **(c)** bylgjuhraðinn?

Dæmi 12.12. *(RK 16.45.)* Lítum á gröfin hér til vinstri sem sýna graf af staðbylgju $\psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \varphi_0)$. Vinstra grafið sýnir ψ einungis sem fall af t í staðsetningunni $x = 0$ m. Hægra grafið sýnir ψ einungis sem fall af x við tíma $t = \tau$. Ákvarðið **(a)** Útslagið. **(b)** Lotutímann. **(c)** Tíðnina. **(d)** Sveiflutíðnina. **(e)** Fasahornið. **(f)** Bylgjulengdina. **(g)** Bylgjutöluna. **(h)** Bylgjuhraðann. **(i)** Tímann τ.





Dæmi 12.13. *(RK 16.19.)* Mannsaugað getur greint ljós með bylgjulengd frá 380 nm (fjólublátt) upp í 700 nm (rautt). Á hvaða tíðnibili eru þessar ljósbylgjur ef hraði ljóssins er $c = 3{,}00 \cdot 10^8$ m/s?

Dæmi 12.14. *(RK 16.20.)* **(a)** Útvarpsstöðin FM957 heitir því nafni þar sem að hún sendir út allt efnið sitt með rafsegulbylgjum sem hafa tíðnina 95,7 MHz. Hver er bylgjulengdin? **(b)** Íslenska π-félagið ætlar að stofna útvarpsstöð sem sendir út allt efnið sitt með bylgjulengd $\lambda = \pi$m. Hvaða tíðni samsvarar það?

Svör

(8) $k = 0{,}90$ rad/m, $c = 25$ m/s. **(9)** $\lambda = 2{,}6$ m, $f = 110$ Hz **(10)** $f = 10{,}5$ Hz, $\lambda = 3{,}5$ m, $c = 37$ m/s.

(11) $f = 286$ Hz, $\lambda = 1{,}19$ m, $c = 340$ m/s. **(12)** $A = 2$ mm, $T = 0{,}2$ s, $f = 5$ Hz, $\omega = 10\pi$rad/s, $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$, $\lambda = 2$ m, $k = \pi$rad/m, $c = 10$ m/s, $\tau = 67$ ms. **(13)** $f \in [430\,\text{THz}, 790\,\text{THz}]$. **(14)** $\lambda = 3{,}13$ m, $f = 95{,}4$ MHz

Hljóðstyrkur og hávaði

Afl, $P = \frac{\Delta E}{\Delta t}$, er orkubreyting (eða vinna) á tímaeiningu. Ef við höfum bylgju þá mun orkan hennar breiðast yfir yfirborðsflatarmálið, A, sem hún þekur svo við skilgreinum bylgjustyrk bylgjunnar sem stærðina $I = \frac{P}{A}$. Ef við erum með bylgju sem er að breiðast út með kúlusamhverfu þá höfum við að $A = 4\pi r^2$ þar sem r er fjarlægðin frá uppsprettunni. Í því sértilfelli er $I = \frac{P}{4\pi r^2}$. Mannseyrað greinir hinsvegar hávaða eða skynstyrk sem $\beta = \beta_0 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$ þar sem $\beta_0 = 10\,\mathrm{dB}$ og $I_0 = 1{,}0 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{W/m}$.

Dæmi 12.15. *(Fermi)* Sólarsella sem er 1,65 m á lengd og 1,05 m á breidd framleiðir 215 W af rafmagni (þegar sólin skín á hana). Metið afl sólarinnar.

Dæmi 12.16. *(RK 16.33.)* Grunnstillingin á hljóðstyrknum í AirPodum er um það bil $I = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{W/m^2}$. Hljóðhimnan í eyranu hefur þvermál þ $= 6{,}0\,\mathrm{mm}$. Hversu mikil orka flæðir inn í eyrun á okkur við það að hlusta á „POWER“ eftir Kanye West sem hefur afspilunartímann 4 mínútur og 52 sek?

Dæmi 12.17. *(RK 16.67)* Íslenska fyrirtækið Sjónlag sérhæfir sig í LASIK leiseraðgerðum þar sem að stuttir leisigeislablossar eru notaðir til þess að móta hornhimnu augans. Dæmigerður leisigeisli sem er notaður í slíkar aðgerðir hefur bylgjulengd $\lambda = 193\,\mathrm{nm}$. Hver leisigeislablossi inniheldur 1,0 mJ af orku og varir í 15 ns. Hvert er afl leisigeislablossans? Hver er styrkur ljósbylgjunnar ef þvermál ljósgeislans er 1,0 mm?

Dæmi 12.18. *(RK 16.38.)* Tvær mismunandi hljóðbylgjur hafa bylgjustyrk $I_a = 3{,}0 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{W/m^2}$ og $I_b = 3{,}0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{W/m^2}$. Hver er skynstyrkur hávaðans, β_a og β_b, fyrir hvora bylgju um sig?

Dæmi 12.19. *(RK 16.36.)* Það er mikill hávaði þegar herþotur bandaríska flughersins taka á loft. Athugandi mælir skynstyrk hávaðans sem 140 dB í 30 m fjarlægð frá hreyflunum í lofttakinu. Hver væri skynstyrkur hávaðans í 1,0 km fjarlægð?

Dæmi 12.20. Um daginn þegar ég var að fara í útilegu var ég að velta því fyrir mér hvort ég ætti að kaupa mér JBL Boombox 2 þráðlausan ferðahátalara fyrir 69,995 kr eða JBL Xtreme 3 ferðahátalara fyrir 49,985 kr í Elko. Dýrari hátalarinn er með afl $P_1 = 80\,\mathrm{W}$ en ódýrari hátalarinn er með afl $P_2 = 50\,\mathrm{W}$. Látum β_1 tákna skynstyrk hávaðans frá dýrari hátalaranum og látum β_2 tákna skynstyrk hávaðans frá ódýrari hátalaranum. Hversu mikið væri ég að borga fyrir hvert desíbel í skynstyrksmuninum $\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2$?

Dæmi 12.21. Þess á milli að vera bundinn og keflaður þá ærir Óðríkur algaula Gaulverjabæ með tónlist sinni. Sjóðríkur seiðkarl hefur nú búið til töfraseyði sem dregur úr afli raddbanda Óðríks. Um leið og Óðríkur fær sér sopa af töfraseiðinu heyrir Ástríkur gallvaski, sem stendur í 30 m fjarlægð frá Óðríki, hávaðan lækka úr 180 dB niður í 45 dB. Hvert er afl raddbanda Óðríks fyrir og eftir að hann innbyrðir seyðið? Hversu langt í burtu ætti Steinríkur alvaski að standa til þess að heyra ekki í Óðríki (þ.e. 0 dB)?

Svör

(15) $P_{\text{sól}} \approx 10^{26}\,\mathrm{W}$. **(16)** $E = 21\,\mu\mathrm{J}$. **(17)** $P = 67\,\mathrm{kW}$, $I = 85\,\mathrm{GW/m^2}$. **(18)** $\beta_a = 65\,\mathrm{dB}$, $\beta_b = 105\,\mathrm{dB}$.

(19) $\beta = 110\,\mathrm{dB}$. **(20)** 9810 kr. **(21)** $P_1 = 11{,}3\,\mathrm{GW}$, $P_2 = 360\,\mu\mathrm{W}$, $r_1 = 30\,\mathrm{Gm}$, $r_2 = 5{,}4\,\mathrm{km}$.

Dopplerhrif

Við leiddum út allsherjarjöfnuna fyrir Dopplerhrif:

$$f = \left(\frac{c \pm v}{c \pm u}\right) f_0$$

Þar sem c táknar bylgjuhraðann í miðlinum, v táknar hraða viðtakandans og u táknar hraða uppsprettunnar. Formerkið á v er jákvætt ef viðtakandinn er að ferðast í áttina að uppsprettunni en neikvætt ef viðtakandinn er að ferðast frá uppsprettunni. Formerkið á u er jákvætt ef uppsprettan er að ferðast í burtu frá viðtakandanum en neikvætt ef uppsprettan er að ferðast að viðtakandanum.

Dæmi 12.22. *(RK 16.41.)* Félagi þinn er raula lag með einsleitum tón 400 Hz á meðan að hann brunar á hjólinu sínu beint í áttina að þér með hraða 25,0 m/s. **(a)** Hvaða tíðni heyrir þú félaga þinn syngja með? **(b)** Hvaða tíðni heyrir félagi þinn ef þú byrjar að raula með tíðni 400 Hz?

Dæmi 12.23. *(RK 16.42.)* Óperusöngkona syngur tóninn A_4 (sem samsvarar 440 Hz) á meðan hún brunar niður Kringlumýrarbrautina á 90 km/klst hraða. Hvaða tíðni heyrir **(a)** Manneskja sem stendur kyrr á veginum fyrir framan bíl söngkonunnar? **(b)** Manneskja sem stendur kyrr fyrir aftan bíl söngkonunnar?

Dæmi 12.24. Lögreglan í Trékyllisvík er að veita mannræningjum eftirför. Sírenur lögreglubíla gefa frá sér hljóð með tíðni sem er á bilinu frá 635 Hz upp í 912 Hz. Lögreglan keyrir með hraðanum 120 km/klst. En löghlýðnir mannræningjarnir fylgja helstu umferðarreglum í Trýkyllisvík og keyra því aðeins með hraðanum 50 km/klst. Á hvaða bili heyra mannræningjarnir tíðni hljóðsins frá sírenunum?

Dæmi 12.25. *(RK 16.43.)* Lengi vel var það almenn trú manna að leðurblökur væru blindar þar sem þær halda til og rata vel í myrkri. Það er hinsvegar ekki satt. Til þess að sjá í myrkri beita leiðurblökur bergmálsskynjun. Þá gefa þær frá sér hátíðnihljóð 25 kHz og út frá því hvernig hljóðið endurvarpast geta þær greint umhverfið sitt (það er ekki ólíkt því hvernig hraðamælar virka). Hversu hratt þarf leðurblaka að fljúga til þess að þú getir rétt svo heyrt í henni við efri skynmörk heyrnar þinnar, 20 kHz?

Dæmi 12.26. *(RK 16.74.)* Eðlisfræðikennari bindur símann sinn við band af lengd $\ell = 75$ cm og snýr símanum í hringi yfir höfðinu á sér. Síminn spilar einsleitan tón með tíðni 600 Hz og hann snýr símanum 85 snún/mín. Hverjar eru hæstu og lægstu tíðnirnar sem að nemendurnir heyra í kennslustofunni?

Dæmi 12.27. **(Vorpróf 2019)** Árið 1845 voru Dopplerhrif fyrst sannreynd. Lúðrasveit trompetleikara lék tóninn E_4, sem samsvarar 330 Hz, um borð í lest sem keyrði framhjá brautarpalli með hraða u. Kyrrstæðir athugendur á brautarpallinum heyrðu tóninn $F\#_4$ sem samsvarar 370 Hz. Hávaðinn sem athugendur heyrðu (frá trompetleikurunum) á brautarpallinum þegar lestin var í 50 m fjarlægð var 80 dB. **(a)** Hver var hraði lestarinnar? **(b)** Hvert var afl lúðrasveitarinnar?

Dæmi 12.28. *(RK 16.80)* Þú hefur verið tekin af lögreglunni fyrir að keyra yfir á rauðu ljósi. Lögregluþjóninn tilkynnir þér að þú færð sekt upp á 50,000 kr (og tvo punkta). Í örvæntingunni þinni rifjaru upp það litla sem þú lærðir í eðlisfræði í Menntaskóla: Ef þú keyrir nógu hratt þá sýnist þér rautt ljós vera grænt vegna Dopplerhrifa! Í Besserwisserkasti segir þú lögregluþjóninum að þér hafi sýnst ljósin vera græn. Lögregluþjónninn er vel að sér í eðlisfræði og segir þér að þá þurfiru að greiða sekt upp á 1 kr fyrir hvern km/klst sem þú varst yfir leyfilegum hámarkshraða, 90 km/klst. Hversu há er sektin? Rautt ljós hefur bylgjulengd 650 nm en grænt ljós hefur bylgjulengd 540 nm.

Svör

(22) $f_a = 431\,\mathrm{Hz} \neq f_b = 429\,\mathrm{Hz}$. **(23)** $f_a = 475\,\mathrm{Hz}$, $f_b = 410\,\mathrm{Hz}$. **(24)** $f \in [675\,\mathrm{Hz}, 969\,\mathrm{Hz}]$.

(25) $u = 310\,\mathrm{km/klst}$. **(26)** $f \in [589\,\mathrm{Hz}, 612\,\mathrm{Hz}]$. **(27)** $u = 133\,\mathrm{km/klst}$, $P = 3{,}1\,\mathrm{W}$. **(28)** 184 milljónir.

Eigintíðnir og eiginsveifluhættir

Við sáum að staðbylgjur á streng og þrýstingsbylgjur í pípum hafa ákveðnar eigintíðnir og eiginsveifluhætti sem ákvarðast jaðarskilyrðum þeirra. Fyrir strengi (og hljóðpípur) sem eru lokaðar í báða enda eða opnar í báða enda sýndum við að eigintíðnirnar og eiginsveifluhættir þeirra væru gefnar með:

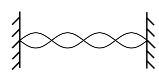
$$\lambda_n = \frac{2\ell}{n}, \qquad f_n = n f_1, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Eins sáum við að ef við höfum blönduð jaðarskilyrði þar sem einn endinn er opinn en hinn endinn er lokaður þá höfum við eftirfarandi eigintíðnir og eiginsveifluhætti:

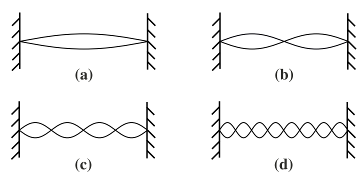
$$\lambda_n = \frac{4\ell}{2n-1}, \qquad f_n = (2n-1) f_1, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Dæmi 12.29. Strengur á rafmagnsgítar er 0,640 m langur og hefur línulegan þéttleika $\mu = 1{,}14\,\mathrm{g/m}$. Jimmy Hendrix spilar nótuna G_3 sem hefur tíðni 196 Hz. **(a)** Hver er bygljulengd bylgjunnar sem ferðast eftir gítarstrengnum? **(b)** Hver er hraði bylgjunnar sem ferðast eftir gítarstrengnum? **(c)** Hver er togkrafturinn í strengnum? **(d)** Hver er tíðni hljóðbylgjunnar sem myndast? En bylgjulengdin?

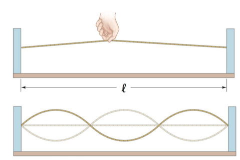
Dæmi 12.30. *(RK 17.5.)* Á myndinni hér til hægri má sjá staðbylgju sem sveiflast á streng af lengd $\ell = 50\,\mathrm{cm}$ með tíðni 100 Hz. Hver er bylgjuhraði bylgjunnar?



Dæmi 12.31. *(RK 17.6.)* Hér til hægri sjást fjórir mismunandi eiginsveifluhættir fyrir streng sem hefur lengd $\ell = 2{,}0\,\mathrm{m}$ og línulegan þéttleika $\mu = 1{,}5\,\mathrm{g/m}$. Strengurinn er festur á milli tveggja enda og togkrafturinn í strengnum er $T = 2{,}4\,\mathrm{N}$. **(a)** Hver er bylgjuhraðinn meðfram strengnum? **(b)** Hverjar er bylgjulengdirnar fyrir hvern eiginsveifluhátt hér til hægri? **(c)** Hverjar eru tilheyrandi eigintíðnir strengsins?

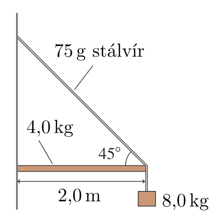


Dæmi 12.32. Band með massa $m = 1{,}6\,\mathrm{g}$ hangir milli tveggja stólpa sem eru í fjarlægð $\ell = 0{,}60\,\mathrm{m}$ frá hvor öðrum. Finnið togkraftinn í bandinu þegar bandið sveiflast eins og á neðri myndinni hér til hægri með tíðni 1440 Hz.



Dæmi 12.33. *(RK 17.19.)* Líta má á klarínett sem sívalingslaga hálf-opið tréblásturshljóðfæri af lengd 100 cm. Hver er grunntónn (fyrsta eigintíðni) klarínettsins? Hver er þriðji yfirtónn (þriðja eigintíðni) klarínettsins?

Dæmi 12.34. *(RK 17.48.)* Hver er grunntónn stálvírsins sem sést á uppstillingunni hér til hægri?



Dæmi 12.35. *(RK 17.51.)* Við erum að skoða tvö mismunandi rör. Annað rörið er opið í báða enda og hefur lengd $\ell_1 = 78{,}0\,\mathrm{cm}$. Hitt rörið er opið í annan endann og hefur lengd ℓ_2. Í hálfopnu pípunni þá er fyrsti grunntónninn jafn þriðja yfirtón opnu pípunnar. Hver er lengd hálfopnu pípunnar?

Svör

(29) $\lambda = 1{,}28\,\mathrm{m}$, $c = 251\,\mathrm{m/s}$, $T = 71{,}8\,\mathrm{N}$, $f = 196\,\mathrm{Hz}$, $\lambda = 1{,}75\,\mathrm{m}$. **(30)** $c = 25\,\mathrm{m/s}$. **(31)** $c = 40\,\mathrm{m/s}$, $\lambda_a = 4{,}0\,\mathrm{m}$, $\lambda_b = 2{,}0\,\mathrm{m}$, $\lambda_c = 1{,}0\,\mathrm{m}$, $\lambda_d = 50\,\mathrm{cm}$, $f_a = 10\,\mathrm{Hz}$, $f_b = 20\,\mathrm{Hz}$, $f_c = 40\,\mathrm{Hz}$, $f_d = 80\,\mathrm{Hz}$. **(32)** $T = 886\,\mathrm{N}$. **(33)** $f_1 = 86\,\mathrm{Hz}$, $f_3 = 430\,\mathrm{Hz}$. **(34)** $f_1 = 12{,}8\,\mathrm{Hz}$. **(35)** $\ell_2 = 13{,}0\,\mathrm{cm}$.

Bylgjusamliðun og hviður

Við skoðuðum aðallega bylgjusamlagningu frá tveimur samfasa uppsprettum í fjarlægð d frá hver annarri sem senda frá sér einsleitt hljóð með bylgjulengd λ og tíðni f. Samliðunarbylgjan sem heyrist í punkti P sem er í fjarlægð r_1 frá annarri uppsprettunni og r_2 frá hinni er þá:

$$A\sin(kr_1-\omega t)+A\sin(kr_2-\omega t)=2A\cos\left(\frac{1}{2}k\Delta r\right)\sin\left(\frac{1}{2}k(r_1+r_2)-\omega t\right)$$

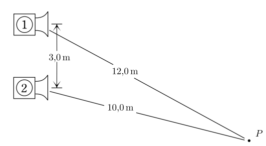
Sér í lagi sáum við að fyrir fullkomlega styrkjandi/eyðjandi samliðun þá gildir að:

$$\Delta r=\begin{cases} n\lambda & \text{(styrkjandi bylgjusamliðun)} \\ \left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda & \text{(eyðandi bylgjusamliðun)} \end{cases}, \qquad n\in\mathbb{N}.$$

Hviðutíðnin $\Delta f=f_2-f_1$ heyrist þegar tveir tónar, f_1 og f_2 eru örlítið frábrugðnir ($f_1\approx f_2$).

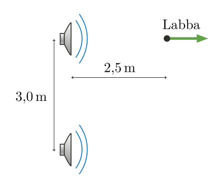
Dæmi 12.36. *(RK 17.29.)* Tveir hátlarar sem eru í fasa við hvorn annan senda frá sér einsleittan tón með tíðni f í allar stefnur. Nú færum við annan þeirra 3,0 m til hægri og 4,0 m áfram miðað við hinn hátlarann. Eftir að við erum búin að færa hátlarana þá heyrist (ekki) eyðandi bylgjusamliðun í $\frac{1}{4}$ og $\frac{3}{4}$ af vegalengdinni á milli hátlaranna á stystu línunni milli þeirra. Hver er lengsta mögulega bylgjulengd sem að hljóðbylgjurnar hafa og hver er tíðni hljóðsins?

Dæmi 12.37. Tveir hátlarar sem eru í fjarlægð 3,0 m frá hvorum öðrum spila einsleitt, samfasa hljóð með tíðni f. Þú stendur í punkti P sem er í fjarlægð $r_1 = 12{,}0$ m frá öðrum hátalaranum og fjarlægð $r_2 = 10{,}0$ m frá hinum hátalaranum og heyrir ekkert hljóð! Hver er lægsta mögulega tíðni sem hátalararnir geta haft?



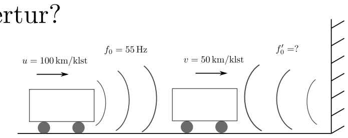
Dæmi 12.38. Tveir hátalarar senda frá sér einsleitt, samfasa hljóð með tíðni $f = 500$ Hz og útslag $A = 0{,}10$ mm. Hátlararnir eru í 1,0 m fjarlægð frá hvor öðrum og þú stendur í 1,0 m fjarlægð frá öðrum þeirra og 2,0 m fjarlægð frá hinum (í beinni línu). Hvert er útslag samliðunarbylgjunnar sem þú heyrir frá hátölurunum? Er þetta styrkjandi eða eyðandi bylgjusamliðun?

Dæmi 12.39. *(RK 17.68.)* Tveir hátlarar sem eru í fjarlægð 3,0 m frá hvorum öðrum spila samfasa hljóð með tíðni $f = 686$ Hz. Þú stendur 2,5 m beint fyrir framan annan hátalarann og byrjar að labba beint í burtu. Hversu langt þarftu að labba til þess að heyra eyðandi bylgjusamliðun?



Dæmi 12.40. *(RK 17.32.)* Tveir strengir eru stilltir þannig að þeir gefi frá sér hljóð með tíðni 200 Hz. Nú herðum við togkraftinn í öðrum strengnum þannig að það heyrast þrjár hviður á hverri sekúndu þegar að við sláum á strengina. Hver er tíðni strengsins þar sem togkrafturinn var hertur?

Dæmi 12.41. Lögregluþjónn er að veita mannræningjum eftirför. Hann keyrir í áttina að mannræningjunum með hraða $u = 100$ km/klst með kveikt á sírenu sem sendir út hljóð með tíðni $f_0 = 55$ Hz. Mannræningjarnir keyra með hraða $v = 50$ km/klst. Lögregluþjónninn er búinn að króa mannræningjana af þannig að nú stefna þeir beint í áttina að risastóru bjargi. Hljóðbylgjurnar endurvarpast af bjarginu. **(a)** Hvaða tíðni, f_1, heyra mannræningjarnir frá sírenum lögregluþjónsins? **(b)** Hver er tíðni endurvörpuðu bylgjunnar, f_0' frá veggnum? **(c)** Hvaða tíðni, f_2, heyra mannræningjarnir frá endurvörpuðu hljóðbylgjunni? **(d)** Hver er hviðutíðnin $\Delta f = f_2 - f_1$ sem mannræningjarnir heyra?



Svör

(36) $\lambda = 5{,}0$ m, $f = 69$ Hz. **(37)** $f_{\text{min}} = 86$ Hz. **(38)** $B = 26\,\mu$m. **(39)** $\Delta x = 48$ cm. **(40)** $f = 203$ Hz

(41) $f_1 = 57$ Hz, $f_0' = 60$ Hz, $f_2 = 62$ Hz, $\Delta f = 4{,}8$ Hz.

Kafli 13

Varmafræði

13.1 Varmaorka

Eins og allir hlutir hafa eðlismassa þá hafa allir hlutir eðlisvarma:

Skilgreining 13.1. Lítum á einsleitan hlut með massa m. Þá er **varmaorkan**, Q, sem þarf til þess að hita hlutinn um hitastig ΔT, gefin með:

$$Q = cm\Delta T,$$

þar sem c er fasti sem kallast **eðlisvarmi** og er háður efnasamsetningu hlutarins.

13.1.1 Bræðsluvarmi og gufunarvarmi

Í þessu námskeiði munum við skoða eftirfarandi ástandsform: **fastform**, **vökvaform** og **gasform**. Tæknilega séð eru til fleiri ástandsform heldur en þessi þrjú. Sem dæmi um önnur ástandsform þá má nefna: **rafgas** (*e.* **plasma**); **Bose-Einstein þéttivatn** (*e.* **Bose-Einstein condensate**) og **ofurflæðiefni** (*e.* **superfluid**).

Skilgreining 13.2. Lítum á einsleitan hlut með massa m. Þá er:

(i) Varmaorkan, Q_b, sem þarf til þess að bræða hlutinn, gefin með:

$$Q_b = mL_b$$

þar sem L_b er fasti sem kallast **bræðsluvarmi** og er háður efnasamsetningu hlutarins.

(ii) Varmaorkan, Q_g, sem þarf til þess að sjóða hlutinn, gefin með:

$$Q_g = mL_g$$

þar sem L_g er fasti sem kallast **gufunarvarmi** og er háður efnasamsetningu hlutarins.

Efni	Eðlisvarmi	Bræðsluhitastig	Bræðsluvarmi	Gufunarhitastig	Gufunarvarmi
Vatn	4,19 kJ/kg K	0 °C	333 kJ/kg	100 °C	2260 kJ/kg
Ís	2,09 kJ/kg K	0 °C	333 kJ/kg	100 °C	2260 kJ/kg
Kvikasilfur	0,14 kJ/kg K	−39 °C	11 kJ/kg	357 °C	296 kJ/kg
Blý	0,128 kJ/kg K	327 °C	25 kJ/kg	1750 °C	870 kJ/kg
Járn	0,449 kJ/kg K	1540 °C	289 kJ/kg	3020 °C	6340 kJ/kg

Tafla 13.1: Eðlisvarmi, bræðsluvarmi og gufunarvarmi nokkurra efna.

13.2 Kjörgas

Skilgreining 13.3. Lítum á gas (safn af sameindum). Við táknum með:

- N: Heildarfjöldi sameinda í gasinu.
- n: Mólfjöldi sameinda í gasinu.
- N_A: Avogadrosartalan, $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ 1/mól, sem er þannig að $n = \frac{N}{N_A}$.
- k_B: Boltzmann-fastinn, $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K.
- R: Gasfastinn, sem er skilgreindur þannig að $R = N_A k_B = 8{,}315\,\mathrm{J/mól\,K}$
- M: Heildarmassi sameindanna í gasinu.
- m: Frumeindamassi sameindanna, sem er þannig að: $M = Nm$.
- u: Frumeindamassinn, $u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg.
- μ: Mólmassinn, sem er skilgreindur þannig að $\mu = \frac{M}{n}$.

Lögmál 13.4. Látum Q tákna varmaorkuna sem þarf til þess að hita gas með eðlisvarma c og heildarmassa M (þar sem rúmmáli gassins er haldið föstu) um hitastig ΔT. Þá gildir að:

$$Q = cM\Delta T = Cn\Delta T$$

Þar sem n er mólfjöldinn í gasinu og C er fasti sem nefnist **móleðlisvarmi**.

Útleiðsla: Við höfum þá með smá umritun að:

$$Q = cM\Delta T = cNm\Delta T = cnN_A m\Delta T = \left(\frac{cm}{k_B}R\right)n\Delta T = C_V n\Delta T.$$

Þar sem við höfum skilgreint $C_V := \frac{cm}{k_B}R$. $\square$

Það kemur síðan afar djúpstæð niðurstaða í varmafræði sem tengir móleðlisvarmann við **frelsisgráður** kerfisins. Þá kemur í ljós að rita megi $C = \frac{f}{2}R$, þar sem f er fjöldi frelsisgráða sem sameindin hefur (nánar um nákvæma skilgreiningu á því síðar) og R er gasfastinn. Sem dæmi má nefna að allar einatóma gassameindir (betur þekkt sem frumeindir, t.d. helíumssameindin He) hafa $f = 3$ frelsisgráður (eina fyrir hvern hraðaþátt sem frumeindin hefur) en allar tvíatóma sameindir (eins og súrefnissameindin O_2) hafa $f = 5$ frelsisgráður (ein fyrir hvern hraðaþátt massamiðjunnar og tveir fyrir hvernig er hægt að snúa sameindinni) en flest föst efni (t.d. járn, gull og blý) hafa $f = 6$ frelsisgráður (ein fyrir hvern hraðaþátt og þrjár fyrir hvernig er hægt að snúa sameindinni í kristalbyggingunni). Við höfum til dæmis að:

$$\begin{aligned}
&\text{Vetnissameind, He:} && C = \frac{c_{\mathrm{He}} m_{\mathrm{He}}}{k_B}R = \frac{3120 \cdot 4{,}00 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}}{1{,}38 \cdot 10^{-23}}R = 2{,}497R \approx \frac{3}{2}R.\\
&\text{Súrefnissameind, } O_2\text{:} && C = \frac{c_{O_2} m_{O_2}}{k_B}R = \frac{656 \cdot 32 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}}{1{,}38 \cdot 10^{-23}}R = 3{,}534R \approx \frac{5}{2}R.\\
&\text{Gullsameind, Au:} && C = \frac{c_{\mathrm{Au}} m_{\mathrm{Au}}}{k_B}R = \frac{129 \cdot 197 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}}{1{,}38 \cdot 10^{-23}}R = 3{,}05R \approx \frac{6}{2}R = 3R.
\end{aligned}$$

Skilgreining 13.5. Gas er sagt vera **kjörgas** ef það nýtur eftirfraandi skilyrða:

(i) Stærð sameindanna er hlutfallslega miklu minni heldur en meðalfjarlægðin á milli sameindanna. En það þýðir að við getum hunsað áhrif millisameindakrafta (eins og t.d. rafsegulkrafturinn og þyngdarlögmálskrafturinn en ekki t.d. eins og þverkraftarnir í árekstrunum).

(ii) Allir árekstrar sameindanna við hvor aðra og ílátið sem þær eru innihaldnar í eru alfjaðrandi en það þýðir að orkan varðveitist í árekstrunum og að engin orka tapast út úr kerfinu heldur getur hún aðeins flust til á milli sameindanna við árekstrana.

Skilgreining 13.6. Lítum á gas þar sem að sameindir gassins hafa massa m og meðalhraða v. Við skilgreinum meðalhitastig gassins þannig að það uppfylli eftirfarandi jöfnu:

$$\frac{3}{2}k_BT = \frac{1}{2}mv^2 = K_{\text{hreyfi}}$$

Þar sem $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\text{J/K}$ er fasti sem nefnist Boltzmann-fastinn.

Við sjáum hinsvegar að heildarorka sameindanna er $E = \frac{f}{2}k_BT$ því hverri frelsisgráðu fylgir orka sem jafngildir $\frac{1}{2}k_BT$. Vopnuð þessu þá erum við tilbúin til þess að leiða út gaslögmálið:

Lögmál 13.7. (Gaslögmálið) Lítum á kjörgas sem samanstendur af N sameindum með meðalhraða, v, inni í kassa sem hefur hliðarlengdir ℓ. Þá er þrýstingurinn sem að sameindirnar verka með á kassann gefinn með:

$$PV = Nk_BT = nRT,$$

þar sem $V = \ell^3$ er rúmmál kassans, $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\text{J/K}$ er fasti sem nefnist Boltzmann-fastinn, T er meðalhitastig sameindanna, $n = \frac{N}{N_A}$ er mólfjöldi sameindanna þar sem $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}\,1/\text{mól}$ er Avagadrosartalan í kassanum og $R = k_BN_A = 8{,}315\,\text{J/mól K}$ er gasfastinn.

Útleiðsla: Hugsum okkur kassa með hliðarlengdir ℓ og rúmmmál $V = \ell^3$. Látum N agnir með meðalhraða v vera í kassanum. Við viljum vita hvaða þrýstingur er inni í kassanum. Rifjum því upp að:

$$P = \frac{F_\perp}{A}$$

og nýtum okkur að $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$. Látum því Δt vera lítið tímabil. Við viljum finna skriðþungabreytingu veggjarins á tímanum Δt. Aðeins hlutfall agnanna mun berast að kassanum til þess að lenda í árekstrinum. Athugum fyrst að hraði agnanna er $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ en að meðaltali mun hver hraðaþáttur vera jafn líklegur svo $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 3v_x^2$ sem gefur þá að $v_x^2 = \frac{1}{3}v^2$. Fyrir lítil tímabil Δt þá getum við gert ráð fyrir því að agnirnar nái aðeins að lenda í einum árekstri við hliðarlengdir kassans. Þá höfum við að heildarfjöldi agna sem lendir í árekstrinum er gefinn með:

$$N \cdot \frac{v_x\Delta t}{2\ell}$$

Þar sem aðeins helmingur þeirra sameinda sem eru í fjarlægðinni $v_x\Delta t$ frá veggnum ná að lenda í árekstri við hann. Við athugum síðan að skriðþungabreytingin við það að sameindin lendi í árekstri við vegginn er gefin með $\Delta p_x = mv_x - (-mv_x) = 2mv_x$ því sameindin snýr við í árekstrinum og áreksturinn er alfjaðrandi svo hún skoppar til baka með sama hraða og hún lenti á veggnum með. En þar með höfum við að:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{\Delta p}{A\Delta t} = \frac{\left(N\frac{v_x\Delta t}{2\ell} \cdot 2mv_x\right)}{A\Delta t} = \frac{2N}{\ell A} \cdot \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{2N}{3A\ell}\frac{1}{2}mv^2 = \frac{Nk_BT}{V}$$

Þar sem við höfum notað skilgreininguna á hitastigi og að rúmmál kassans er $V = A\ell = \ell^3$. En þar með höfum við sýnt að: $PV = Nk_BT$. Það er síðan einfalt að umrita niðurstöðuna í samræmi við mólfjöldan með því að skilgreina $R := N_Ak_B$. Þá má rita $PV = nRT$. □

13.3 Fyrsta lögmál varmafræðinnar

Hingað til í þessum kafla þá hefur mestmegnið af því sem við höfum gert verið vitleysa. Því við höfum allann tímann gert ráð fyrir því að engin vinna sé unnin á kerfinu sem að við erum að skoða. Það kemur reyndar í ljós að $Q = cm\Delta T$ er aðeins satt ef að engin vinna er unnin á kerfinu. Eða réttara sagt ef að efnið sem við erum að breyta hitastiginu á verður ekki fyrir neinni varmaþennslu eða við erum að breyta rúmmáli þess með einhverjum hætti. Til þess að laga þetta þá þurfum við að skipta yfir í alvöru útgáfuna af varmaorkunni og við þurfum að setja fram fyrsta lögmál varmafræðinnar.

Lögmál 13.8. (Fyrsta lögmál varmafræðinnar) Látum ΔE tákna heildarorkubreytingu kerfis. Látum W tákna heildarvinnuna sem er unnin af kerfinu og látum Q tákna heildarvarmaorkubreytingu kerfisins. Þá gildir að:

$$Cn\Delta T = \Delta E = Q - W.$$

Þar sem $C = \frac{f}{2}R$ er fasti sem nefnist móleðlisvarmi og f táknar frelsisgráður sameindanna í kerfinu.

Sér í lagi sjáum við þá að $Q = cm\Delta T$ gildir aðeins ef $W = 0$. Skoðum vinnuna sem er unnin á einhverju gasi við það að þjappa því inn um örlitla vegalengd dx. Við höfum þá að sú örlitla vinna, dW, er gefin með:

$$dW = F_{\text{gas}}dx = P_{\text{gas}}Adx = P_{\text{gas}}dV$$

En þar með sjáum við að til þess að ákvarða heildarvinnu þrýstingsins þá höfum við nefnilega:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} PdV$$

En þetta er jafngilt því að finna flatarmálið undir ferlinum á PV-línuriti. En það er einfaldlega graf af þrýstingi gassins P sem fall af rúmmáli hans, V. Ef við þekkjum þrýstinginn og rúmmálið og hitastigið í einum punkti í ferlinu þá er auðvelt að reikna hitastigið í öllum hinum punktunum. En ef við þekkjum hitastigið í öllum punktunum þá er auðvelt að álykta hver heildarorkubreyting gassins var, nefnilega $\Delta E = \frac{3}{2}k_B\Delta T$. Þar með er auðvelt að reikna hver varmaorkubreytingin var í gasinu, $Q = \Delta E + W$.

13.4 Varmaferli

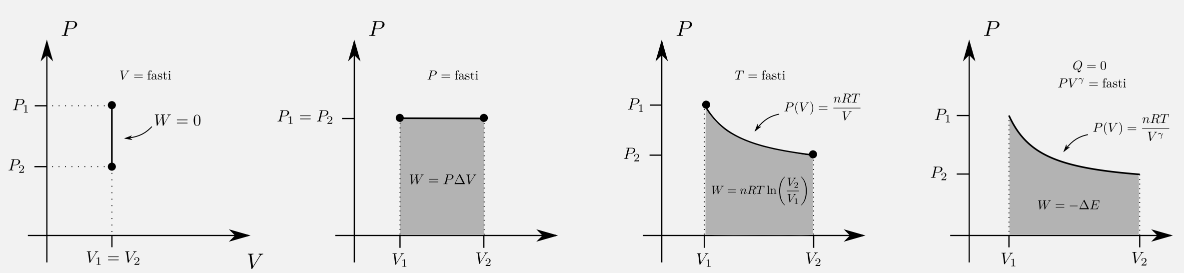
Skilgreining 13.9. Við segjum að varmaferli kjörgass sé:

(i) Jafnþrýstingsferli: Ef þrýstingurinn, $P =$ fasti.

(ii) Jafnrúmmálsferli: Ef rúmmálið, $V =$ fasti.

(iii) Jafnhitaferli: Ef hitastigið, $T =$ fasti.

(iv) Óvermið: Ef varmabreytingin er $Q = 0$.



Jafnrúmmálsferli — Jafnþrýstingsferli — Jafnhitastigsferli — Óvermið ferli

Lögmál 13.10. Fyrir

(i) Jafnþrýstingsferli gildir að W og $\Delta E = Q$.

(ii) Jafnrúmmálsferli gildir að $W = P\Delta V$ og $W = \Delta E + W = \gamma \Delta E$ þar sem $\gamma = \frac{f+2}{f}$ er óvermnisstuðullinn.

(iii) Fyrir jafnhitaferli gildir að $\Delta E = 0$ og $W = Q = nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$.

(iv) Óvermin ferli gildir að $Q = 0$ og $\Delta E = -W$.

Útleiðsla:

(a) Við höfum þá að rúmmálsbreytingin er engin en þar með er $W = \int_{V_1}^{V_2} P dV = 0\,\mathrm{J}$. Þar sem V helst fast þá athugum við að:

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$$

En þar með höfum við að heildarorkubreytingin er gefin með:

$$\Delta E = Cn\Delta T = Cn\left(T_2 - T_1\right) = Cn\left(\frac{P_2}{P_1} - 1\right)T_1 = Q - W = Q$$

Svo við ályktum að:

$$\Delta E = Cn\left(\frac{P_2}{P_1} - 1\right)nT_1, \qquad W = 0\,\mathrm{J}, \qquad Q = Cn\left(\frac{P_2}{P_1} - 1\right)nT_1.$$

(b) Ef þrýstingurinn helst fastur þá er $W = \int_{V_1}^{V_2} P dV = P\Delta V$. En þá er:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \implies \Delta E = Cn\Delta T = Cn\left(\frac{V_2}{V_1} - 1\right)T_1 = \frac{f}{2}P\Delta V$$

og þar með er heildarvarmabreytingin:

$$Q = \Delta E + W = \frac{f}{2}P\Delta V + P\Delta V = \left(\frac{f}{2} + 1\right)P\Delta V = \gamma C P\Delta V$$

Þar sem $\gamma := \frac{f+2}{f}$ er fasti sem nefnist óvermnisstuðullinn.

(c) Ef ferlið er jafnhitaferli þá er $\Delta E = 0$ og þar með er $Q = W$ og því nægir okkur að reikna vinnuna. En hún er gefin með:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV = \Big[nRT\ln(V)\Big]_{V_1}^{V_2} = nRT\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right).$$

(d) Fyrir óvermin ferli gildir að stærðin PV^γ er varðveitt stærð þar sem $\gamma = \frac{f+2}{f}$ er óvermnistuðullinn. Þar sem $Q = 0\,\mathrm{J}$ þá er $\Delta E = -W$ og við athugum að hitastigsbreytingin er gefin með:

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \implies T_2 = \frac{P_2V_2}{P_1V_1}T_1$$

En þar með er:

$$\Delta E = Cn\Delta T = Cn\left(\frac{P_2V_2}{P_1V_1} - 1\right)T_1.$$

$\square$

Lögmál 13.11. Gerum ráð fyrir að við höfum óvermið ferli. Þá er stærðin PV^γ varðveitt eða með öðrum orðum þá er:

$$P_1V_1^\gamma = P_2V_2^\gamma$$

Þar sem γ er óvermnistuðullinn.

Útleiðsla: Þar sem að vermisbreytingin er engin þá höfum við að:

$$dE = -dW = -PdV = -\frac{nRT}{V}dV$$

En við höfum líka að $dE = C_V ndT$ svo við ályktum að:

$$C_V ndT = -\frac{nRT}{V}dV \implies \frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_V}\frac{dV}{V} = -\frac{R}{\frac{f}{2}R}\frac{dV}{V} = -\frac{2}{f}\frac{dV}{V}$$

En við höfum þá með því að tegra að:

$$\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T} = -\frac{2}{f}\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V}$$

En stofnfallið af $\frac{1}{x}$ er $\ln(x)$ svo við fáum:

$$\Big[\ln(T)\Big]_{T_1}^{T_2} = -\frac{2}{f}\Big[\ln(V)\Big]_{V_1}^{V_2} \implies \ln(T_2) - \ln(T_1) = -\frac{2}{f}\left(\ln(V_2) - \ln(V_1)\right)$$

Sem gefur þar með að:

$$\ln\left(T_1V_1^{\frac{2}{f}}\right) = \ln\left(T_2V_2^{\frac{2}{f}}\right) \implies T_1V_1^{\frac{2}{f}} = T_2V_2^{\frac{2}{f}}.$$

En þar með ályktum við að stærðin $TV^{\frac{2}{f}}$ er varðveitt. Við getum umritað niðurstöðuna aðeins með því að taka eftir að $\frac{2}{f} = \gamma - 1$ svo $TV^{\gamma-1}$ er varðveitt stærð. En með því að nota gaslögmálið þá höfum við að $PV = nRT$ sem gefur að $T = \frac{PV}{nR}$ sem gefur þá sér í lagi að:

$$TV^{\gamma-1} = \frac{PV}{nR}V^{\gamma-1} = \frac{1}{nR}PV^\gamma$$

En þar með er ljóst að PV^γ er varðveitt stærð. $\square$

13.5 Dæmi

Varmaorka

Lítum á hlut með massa m. Varmaorkan, Q, sem þarf til þess að hita hlutinn um hitastig ΔT, er gefin með $Q = cm\Delta T$ þar sem c er fasti sem kallast eðlisvarmi og er háður efnasamsetningu hlutarins. Varmaorkan sem þarf til þess að bræða hlutinn er gefin með: $Q_\mathrm{b} = mL_\mathrm{b}$ þar sem L_b er fasti sem kallast bræðsluvarmi. Varmaorkan sem þarf til þess að sjóða hlutinn er gefin með $Q_\mathrm{g} = mL_\mathrm{g}$ þar sem L_g er fasti sem nefnist gufunarvarmi.

Efni	Eðlisvarmi	Bræðsluhitastig	Bræðsluvarmi	Gufunarhitastig	Gufunarvarmi
Vatn	4,19 kJ/kg K	0 °C	333 kJ/kg	100 °C	2260 kJ/kg
Ís	2,09 kJ/kg K	0 °C	333 kJ/kg	100 °C	2260 kJ/kg
Kvikasilfur	0,14 kJ/kg K	−39 °C	11 kJ/kg	357 °C	296 kJ/kg
Blý	0,128 kJ/kg K	327 °C	25 kJ/kg	1750 °C	870 kJ/kg
Járn	0,449 kJ/kg K	1540 °C	289 kJ/kg	3020 °C	6340 kJ/kg

Dæmi 13.1. *(RK 19.12.)* Hversu mikla varmaorku þarf til að hita 150 g af járni frá −20 °C í 180 °C?

Dæmi 13.2. *(RK 19.15.)* Hversu mikla varmaorku þarf til að sjóða 16 g af kvikasilfri sem eru upphaflega við 22 °C?

Dæmi 13.3. *(RK 19.19.)* Tveir bílar (með massa $m = 1000\,\mathrm{kg}$) lenda í árekstri. Báðir bílarnir voru á 80 km/klst hraða (í gagnstæða stefnu). Gerum ráð fyrir að öll orkan í árekstrinum losni í varmaorku sem fer í að hita bílana. Metið hversu mikið hitastig bílanna eykst ef báðir bílarnir eru úr járni.

Dæmi 13.4. *(RK 19.21.)* Bráðin blýbyssukúla með massa 30 g er tekin út úr ofni við 327 °C og sleppt ofan í einangrað ílát með 100 mL af vatni við 20 °C. Hvert verður lokahitstig kerfisins þegar það nær varmajafnvægi?

Dæmi 13.5. Krókódíll sem er 2,9 m langur, 60 cm breiður og 350 kg þungur liggur í sólbaði. Ef styrkleiki sólarljóssins sem skín á bakið á honum er $500\,\mathrm{W/m^2}$ og hitastig hans er upphaflega 23 °C, hversu langan tíma tekur það þá fyrir krókódílinn að ná 30 °C? Eðlisvarmi líkamsvefja krókódílsins er að meðaltali $3400\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$.

Dæmi 13.6. **(Vorpróf 2019)** Viserion, dreki Daenerys Targaryen, ætlar að bræða niður hluta ísveggsins. Ísveggurinn er 213 m hár og 91 m á þykkt. Til þess að færa her í gegnum vegginn þarf að bræða hringlaga gat sem hefur geisla 5,0 m. **(a)** Hversu mikinn massa af ís þarf Viserion að bræða? **(b)** Hitastig ísveggsins er iðuleg um −17 °C. Hversu mikla orku þarf til þess að bræða gat í vegginn af þessari stærð?

Dæmi 13.7. Englendingurinn Engilbert er mikill teunnandi. Honum finnst mjög mikilvægt að teið hans sé við nákvæmlega 67 °C þegar hann drekkur það. **(a)** Hann setur 0,50 L af vatni við 7,0 °C í 2000 W hraðsuðuketil. Hversu lengi er hann að hita vatnið að suðu? (Gera má ráð fyrir að allur varminn fari í það að hita vatnið). **(b)** Engilbert hellir sjóðandi heitu vatninu í tekönnu úr áli sem hefur massa 1,2 kg og eðlisvarma 900 J/kg K. Kannan er til að byrja með við stofuhita, 20 °C. Hvert verður lokahitastig vatnsins í könnunni? (Gera má ráð fyrir því að enginn varmi tapist út í andrúmsloftið). **(c)** Hversu miklum ís við 0 °C þarf Engilbert að bæta út í svo að lokahitastigið verði 67 °C?

Svör

(1) $Q = 13{,}5\,\mathrm{kJ}$. **(2)** $Q = 5{,}5\,\mathrm{kJ}$. **(3)** $\Delta T = 0{,}55\,°\mathrm{C}$. **(4)** $T = 24{,}6\,°\mathrm{C}$. **(5)** $\Delta t = 2$ klst 39 mín og 35 s.

(6) $m_{\text{ís}} = 6580$ tonn, $Q = 2{,}4\,\mathrm{TJ}$. **(7)** $\Delta t = 97\,\mathrm{s}$, $T = 72{,}8\,°\mathrm{C}$, $m_{\text{ís}} = 30\,\mathrm{g}$.

Gaslögmálið

Gaslögmálið tengir saman þrýsting í kjörgasi, P, rúmmál þess, V og hitastig þess, T samkvæmt:

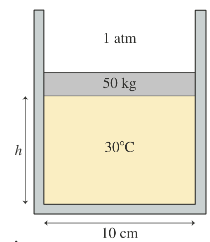
$$PV = Nk_BT = nRT$$

Þar sem $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K er fasti sem nefnist Boltzmann-fastinn, N er heildarfjöldi sameindanna, $n = \frac{N}{N_A}$ er mólfjöldi sameindanna, $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ 1/mól er Avagadrosartalan og $R = k_BN_A = 8{,}315$ J/mól K er gasfastinn.

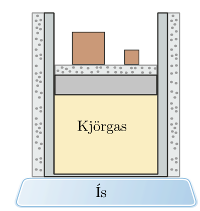
Dæmi 13.8. *(RK 18.20.)* Í 2,0 L íláti er búið að koma fyrir 3,0 mólum af gasi við hitastig −120 °C. Hver er þrýstingurinn í gasinu?

Dæmi 13.9. *(RK 18.21.)* Í íláti nokkru er búið að koma fyrir 2,0 mólum af gasi við þrýsting 1,0 atm og hitastig 30 °C. **(a)** Hvert er rúmmál ílátsins? **(b)** Ílátið er með fasta veggi og getur því ekki breytt rúmmáli sínu (slík ferli kallast jafnrúmmálsferli) Nú aukum við hitastigið á gasinu upp í 130 °C. Hver er þrýstingurinn?

Dæmi 13.10. *(RK 18.24.)* Sívalningur með þvermál þ = 20 cm og hæð h = 40 cm inniheldur 50 g af súrefni (O_2) við 20 °C. **(a)** Hversu mörg mól af súrefni eru í sívalningnum? **(b)** Hversu margar súrefnissameindir eru í sívalningnum? **(c)** Hver er þrýstingurinn í gasinu? **(d)** Hver er meðalhraði súrefnissameindanna?



Dæmi 13.11. *(RK 18.58.)* Sívalingslaga bullan á myndinni hér til hægri hefur þvermál þ = 10 cm og bullulok með massa m_b = 50 kg sem hvílir ofan á 0,12 mólum af gasi sem eru til að byrja með við 30 °C í jafnvægisstöðu kerfisins. Hver er hæðin h í jafnvægisstöðunni?



Dæmi 13.12. *(RK 19.10.)* Lítum á myndina hér til hægri. Tveir kassar með massa m = 2,0 kg og M = 5,0 kg sitja ofan á bulluloki með flatarmál 12 cm^2 sem hefur massa m_b = 1,5 kg. Inni í bullunni er 1,0 mól af einatóma kjörgasi við hitastig 10 °C. Nú setjum við risastóran klaka undir bulluna sem kælir gasið niður í 0 °C við fastann þrýsting. **(a)** Hversu mikil verður rúmmálsbreyting gasins? **(b)** Hversu mikla vinnu vann gasið á bullunni við þetta ferli?

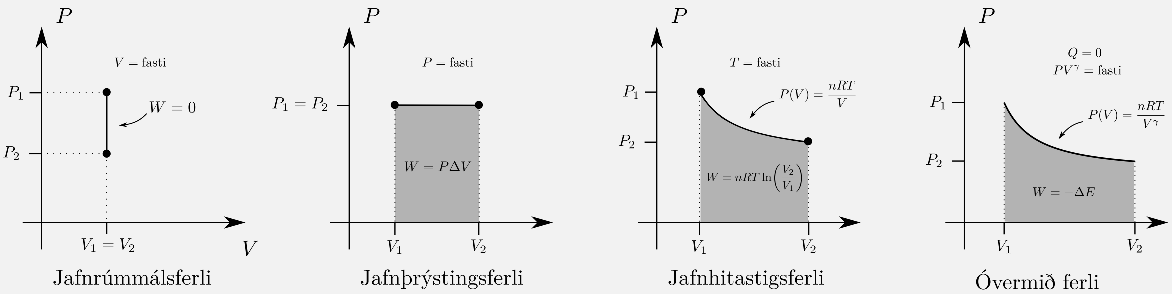
Dæmi 13.13. *(RK 18.59.)* Bertram blæs upp blöðru neðansjávar á 40 m dýpi þar sem hitastigið er 11 °C þannig að geisli blöðrunnar er 10 cm. Hann sleppir síðan blöðrunni og horfir á hana rísa upp í átt að yfirborðinu þar sem hitastig vatnsins er 21 °C. Hver er geisli blöðrunnar þegar hún kemst upp á yfirborðið?

Svör

(8) $P = 18{,}8$ atm. **(9)** $V = 49{,}7$ L. **(10)** $n = 1{,}56$ mól, $N = 9{,}4 \cdot 10^{23}$ sameindir, $V = 12{,}5$ L, $P = 3{,}00$ atm, $v = 478$ m/s. **(11)** $h = 23$ cm. **(12)** $\Delta V = 500$ mL, $W = 86$ J. **(13)** $r_2 = 17$ cm.

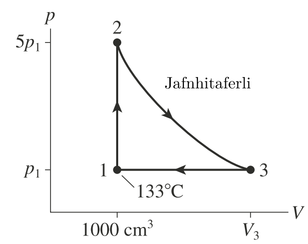
Fyrsta lögmál varmafræðinnar og varmaferli

Fyrsta lögmál varmafræðinnar segir að fyrir kjörgas gildir að: $C_V n\Delta T = \Delta E = Q - W$, þar sem Q er varmaorkan sem flyst inn í kerfið, W er vinnan sem að kerfið vinnur og ΔE er heildarorkubreyting kerfisins. Hér er $C_V = \frac{f}{2}R$, þar sem f táknar frelsisgráður sameindanna í gasinu og $R = 8{,}315\,\mathrm{J/mól\,K}$ er gasfastinn. Fjögur mikilvægustu varmaferlin og PV-línurit þeirra eru:



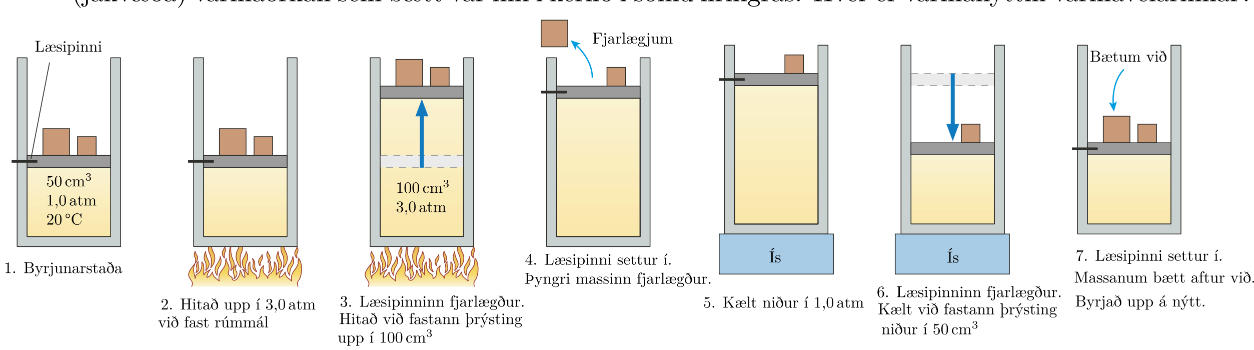
Dæmi 13.14. *(RK 19.11.)* Við það að 500 J af vinnu var unninn á kjörgasi þá minnkaði heildarorka kerfisins um 200 J. Hversu mikil varmaorka bættist inn í kerfið?

Dæmi 13.15. *(RK 19.10.)* Kjörgasi er þjappað saman frá 600 cm^3 niður í 200 cm^3 við fastann þrýsting 400 kPa. Á sama tíma tapar gasið 100 J af varmaorku. Hver er heildarorkubreyting gassins í þessu ferli?



Dæmi 13.16. *(RK. 19.62.)* Á PV-línuritinu hér til hægri má sjá varmahringrás sem 0,03 mól af helíni fylgja. **(a)** Ákvarðið þrýstinginn, hitastigið og rúmmálið í 1, 2 og 3. **(b)** Hversu mikla vinnu vinnur gasið í hverjum hluta hringrásarinnar? **(c)** Hversu mikilli varmaorku var bætt inn í kerfið í hverjum lið hringrásarinnar?

Dæmi 13.17. *(RK 21.35.)* Á myndinni hér fyrir neðan má skrefin sem einföld varmavél tekur í einni hringrás. Massarnir ofan á bullunni eru þannig að í skrefum 3 og 6 þá er bullan í kraftajafnvægi. **(a)** Teiknið PV-línurit fyrir þessa varmavél. **(b)** Hversu mikla vinnu vinnur varmavélin í hverri hringrás? **(c)** Varmanýttni er skilgreind sem $\eta := \frac{W_{\text{út}}}{Q_{\text{inn}}}$ þar sem $W_{\text{út}}$ er heildarvinnan sem gasið vinnur í einni hringrás og Q_{inn} er (jákvæða) varmaorkan sem bætt var inn í kerfið í sömu hringrás. Hver er varmanýttni varmavélarinnar?



Svör

(14) $Q = -700\,\mathrm{J}$ **(15)** $\Delta E = 60\,\mathrm{J}$. **(16)** $P_1 = P_3 = 1{,}0\,\mathrm{atm}$, $P_2 = 5{,}0\,\mathrm{atm}$, $T_2 = T_3 = 1757\,°\mathrm{C}$, $V_3 = 5000\,\mathrm{cm}^3$, $W_{12} = 0\,\mathrm{J}$, $W_{23} = 815\,\mathrm{J}$, $W_{31} = -405\,\mathrm{J}$, $Q_{12} = 608\,\mathrm{J}$, $Q_{23} = 815\,\mathrm{J}$, $Q_{31} = -1013\,\mathrm{J}$.
(17) $W_{12} = 0\,\mathrm{J}$, $W_{23} = 15{,}2\,\mathrm{J}$, $W_{34} = 0\,\mathrm{J}$, $W_{41} = -5{,}1\,\mathrm{J}$, $W_{\text{heild}} = 10{,}1\,\mathrm{J}$, $n = 2{,}1\,\mathrm{mmól}$, $Q_{12} = 15{,}3\,\mathrm{J}$, $Q_{23} = 38{,}2\,\mathrm{J}$, $Q_{34} = -30{,}7\,\mathrm{J}$, $Q_{41} = -12{,}8\,\mathrm{J}$, $\eta = 0{,}19$.

Kafli 14

Rafsviðið

Forngríska heimspekingnum Demókrítus (400 f.Kr) hefur oft verið eignuð atómkenningin, það er að segja kenningin sem segir að allt efni samanstandi af litlum frumeindum eða atómum sem eru minnsta eining sem hægt er að skipta efni niður í. Bandaríski eðlisfræðingurinn (og Nóbelsverðlaunahafinn) Richard P. Feynman segir í upphafi fyrirlestra sinna[1]:

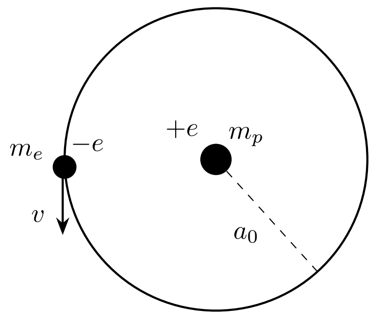
> *„If, in some cataclysm, all of scientific knowledge were to be destroyed, and only one sentence passed on to the next generations of creatures, what statement would contain the most information in the fewest words? I believe it is the atomic hypothesis (or the atomic fact, or whatever you wish to call it) that all things are made of atoms—little particles that move around in perpetual motion, attracting each other when they are a little distance apart, but repelling upon being squeezed into one another. In that one sentence, you will see, there is an enormous amount of information about the world, if just a little imagination and thinking are applied.“*
>
> **- Richard P. Feynman**

Í ár ætlum við að reyna að rannsaka þetta atómlíkan og reyna að varpa ljósi á þær breytingar sem hafa orðið í gegnum tíðina á hugmyndum eðlisfræðinga um atómið. Fyrir jól munum við einblína á rafsegulkraftinn. Honum er lýst af Maxwellsjöfnunum fjórum (já, við þurfum bara að læra fjórar jöfnur fyrir jól!) sem settar voru fram af skoska eðlisfræðingnum James Clerk Maxwell árið 1865. Skilningur mannkynsins á Maxwellsjöfnunum fjórum hefur fært okkur öll þau helstu nútímaþægindi sem að við höfum tekið að venjast - þær eru lykillinn að því að skilja öll þau raftæki sem að við notum í okkar daglega lífi (eins og t.d. snjallsímana okkar).

Eftir jól munum við skoða takmörkuðu afstæðiskenningu Einsteins og kafa dýpra í atómlíkanið þar sem að við munum sjá fyrstu merki þess að Newtonska eðlisfræðin sem við höfum lært hingað til er ekki fær um að lýsa því sem á sér stað inni í atóminu. Til þess þurfum við skammtafræði. Skammtafræðin setur ákveðnar skorður á heiminn sem að við búum í. Hún segir að ákveðnir hlutir (t.d. orka) komi í *skömmutum* og geti því ekki tekið hvaða gildi sem er heldur einungis heiltölumargfeldi af minnsta gildi stærðarinnar. Þetta hefur gríðarlegar afleiðingar þrátt fyrir það að þetta kunni að hljóma eins og að það skipti voða litlu máli! En það að hlutir séu skammtaðir ætti ekki að vera nýtt af nálinni - því það er einmitt það sem að atómkenningin segir: Að allt efni samanstandi af litlum óþættanlegum frumeindum sem er minnsta eining alls efnis.

Vegferð okkar í vetur byrjar á því að skoða einfalt líkan af atóminu þar sem að í miðju atómsins er kjarni þar sem að allar róteindirnar og niteindirnar hafa pakkað sér þétt saman. Langt í burtu frá þeim eru rafeindir á hringhreyfingu umhverfis kjarnann. Fyrir vetnisatómið sem að samanstendur af einni róteind og einni rafeind lítur þetta svona út:

[1]Hlekkur á Feynman fyrirlestrana á netinu



Massi rafeindar: $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Massi róteindar: $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Massi nifteindar: $m_n = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Frumeindamassinn: $u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

Geisli róteindar: $r_p = 0{,}85 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$
Geisli atómsins: $a_0 = 5{,}29 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}$

Grunnhleðslan: $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$

Mynd 14.1: Einfalt líkan af vetnisatóminu.

Þetta minnir svolítið á líkani okkar fyrir plánetu á hringhreyfingu umhverfis sólina. Þetta líkan af atóminu er ágætt sem tól til þess að ímynda sér uppbyggingu atómsins. En það hefur þó nokkra galla sem að við munum reyna að varpa ljósi á þegar líður á árið. Nokkrir hlutir sem að þið ættuð að taka eftir. Í fyrsta lagi er $u \approx m_p \approx m_n$ en síðan sjáum við líka að:

$$\frac{m_p}{m_e} \approx 2000, \qquad \text{svo róteindir og nifteindir eru mun massameiri heldur en rafeindir.}$$

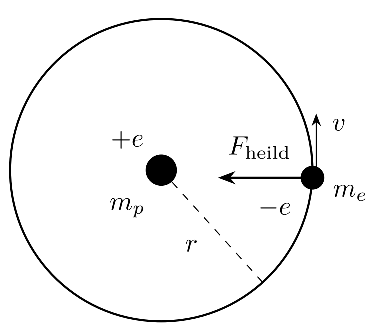
Stærðin á kjarnanum er af stærðargráðunni $10^{-15}\,\mathrm{m}$ þ.e. fm, en stærðin á atóminu er af stærðargráðunni $10^{-10}\,\mathrm{m}$ þ.e. Å (til heiðurs sænska eðlisfræðingnum Anders Jonas Ångström). Þetta þýðir að rúmmál kjarnans er afar lítið í samnburði við stærð atómsins.

Annað sem að við ættum að nefna er í tengslum við grunnhleðsluna. Rafeindir hafa neikvæða hleðslu $-e = -1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ og róteindir hafa jákvæða hleðslu $+e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$. Hinsvegar hafa nifteindir enga hleðslu. Hleðslan, e, kallast *grunnhleðslan* því að það er minnsta einingin á hleðslu sem að við getum haft. Þetta hefur afar djúpstæðar afleiðingar, því þetta þýðir að hleðsla er skömmtuð stærð (sbr. skammtafræði):

Skilgreining 14.1. Við segjum að hleðsla sé ***skömmtuð*** því ef við erum með einhvern hlut sem hefur hleðslu q þá þarf q að vera heiltölu margfeldi af grunnhleðslunni, það er að segja til er $n \in \mathbb{Z}$ þannig að:

$$q = n \cdot e, \qquad e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}.$$

En við höfðum séð að ef hlutur er á hringhreyfingu þá verkar á hann miðsóknarkraftur, þ.e. heildarkrafturinn sem að verkar á hlutinn er inn að miðju hringsins.



Mynd 14.2: Heildarkrafturinn liggur inn að miðju hringsins í einsleitri hringhreyfingu.

En hvaða kraftur er þetta sem að heldur rafeindinni á hringhreyfingu um róteindina? Við gætum til að byrja með haldið að þetta væri þyngdarlögmálskrafturinn:

$$F_G = \frac{Gm_1m_2}{r^2}, \qquad G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2$$

En við sjáum fljótt að þá hefðum við að (við rifjum upp að miðsóknarhröðunin er $a_{\text{mið}} = \frac{v^2}{r}$):

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{Gm_em_p}{r^2} \implies v = \sqrt{\frac{Gm_p}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}}{5{,}29 \cdot 10^{-11}}} \approx 10^{-14}\,\mathrm{m/s}.$$

Sem er alltof lítill hraði fyrir rafeindina! Rafeindir sniglast ekki svona áfram! Þannig það hlítur að vera annar kraftur sem að heldur rafeindunum á hringhreyfingu! Hvaða kraftur er það? Það er Coulombskrafturinn!

14.1 Rafkraftalögmál Coulombs

Lögmál 14.2. (Lögmál Coulombs) Lítum á tvær hleðslur q_1 og q_2. Látum $\vec{r}$ vera vigur á milli þeirra sem hefur lengd r, sem er fjarlægðin milli hleðslanna. Látum $\vec{e}_{\vec{r}}$ tákna einingarvigur vigursins $\vec{r}$. Þá verkar á milli þeirra rafkraftur sem er gefinn með:

$$\vec{F}_k = \frac{kq_1q_2}{r^2}\vec{e}_{\vec{r}}$$

Þar sem $k = 9{,}0 \cdot 10^9\,\mathrm{Nm}^2/\mathrm{C}^2$ er fasti sem nefnist fasti Coulombs. Krafturinn er aðdráttarkraftur ef q_1 og q_2 hafa gagnstæð formerki en fráhrindikraftur ef q_1 og q_2 hafa sama formerki.

Stundum er reyndar Coulombs-fastinn táknaður við annan fasta sem nefnist *rafsvörunarstuðull tómarúms*, ε_0 (nánar um hann síðar og af hverju fólk vill gera það). Þá skrifar fólk stundum að:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, \qquad \text{þar sem} \quad \varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{s}^2\,\mathrm{C}^2/(\mathrm{kg}\,\mathrm{m}^3)$$

Ef við skoðum Coulombskraftinn nánar þá sjáum við að $F_k \gg F_G$ inni í atóminu[2]. Því þar gildir:

$$\frac{F_k}{F_G} = \frac{\frac{ke^2}{r^2}}{\frac{Gm_em_p}{r^2}} = \frac{k}{G} \cdot \frac{e^2}{m_em_p} = \frac{9 \cdot 10^9}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} \cdot \frac{(1{,}602 \cdot 10^{-19})^2}{(1{,}67 \cdot 10^{-27})(9{,}11 \cdot 10^{-31})} \approx 10^{9-2\cdot 19+11+27+31} = 10^{40}.$$

Þannig að í þessu samhengi þá skiptir þyngdarlögmálskrafturinn engu máli í samanburði við Coulombskraftinn. Almennt gildir að við getum oftast hunsað þyngdarlögmálskraftinn í öllum þeim reikningum sem að við gerum þegar að rafkrafturinn er til staðar. Rafkrafturinn er einfaldlega miklu miklu sterkari heldur en þyngdarlögmálskrafturinn. En þá höfum við fyrir hringhreyfingu rafeindarinnar um róteindina að:

$$m_e\frac{v^2}{r} = \frac{ke^2}{r^2} \implies v = \sqrt{\frac{ke^2}{m_er}} = e \cdot \sqrt{\frac{k}{m_er}} = 1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9}{9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 5{,}29 \cdot 10^{-11}}} \approx 10^{-6}\,\mathrm{m/s}.$$

Sem er frekar eðlilegur hraði miðað við að rafeindir ferðast hratt en þó hægar heldur en ljósið.

Coulombskrafturinn og þyngdarlögmálskrafturinn eru afar líkir - helsti munurinn felst í því að hleðslur geta haft mismunandi formerki (þær geta verið jákvæðar eða neikvæðar) en massar (eins og við þekkjum þá) geta einungis verið jákvæðir. Þetta gerir það að verkum að Coulombskrafturinn getur haft tvær stefnur. Hann er aðdráttarkraftur ef hleðslurnar hafa gagnstætt formerki (+ og −) en hann er fráhrindikraftur ef að hleðslurnar hafa sama formerki (+ og +) eða (− og −).

[2]Táknið $\gg$ þýðir að stærðin sem er vinstra megin er miklu stærri heldur en stærðin sem er hægra meginn.

14.2 Rafsvið frá punkthleðslu

Spurningin sem að við viljum reyna að svara í rafsegulfræði er eftirfarandi:

> *„Ef ég er með hleðslur: $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ sem hafa einhverja staðsetningu, hraða, hröðun og massa. Get ég þá spáð fyrir því hvering einhver önnur hleðsla, q, (köllum hana* ***prufuhleðsluna****) mun hreyfast vegna hinna? “*

Mynd 14.3: Hvernig mun hleðslan q hreyfast vegna $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$?

En, höfum við ekki nú þegar leyst þetta vandamál? Við höfum einfaldlega að heildarkrafturinn sem að verkar á q er gefinn með:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{heild}} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n \\ &= \frac{kqQ_1}{r_1^2}\hat{\vec{r}}_1 + \frac{kqQ_2}{r_2^2}\hat{\vec{r}}_2 + \ldots + \frac{kqQ_n}{r_n^2}\hat{\vec{r}}_n.\end{aligned}$$

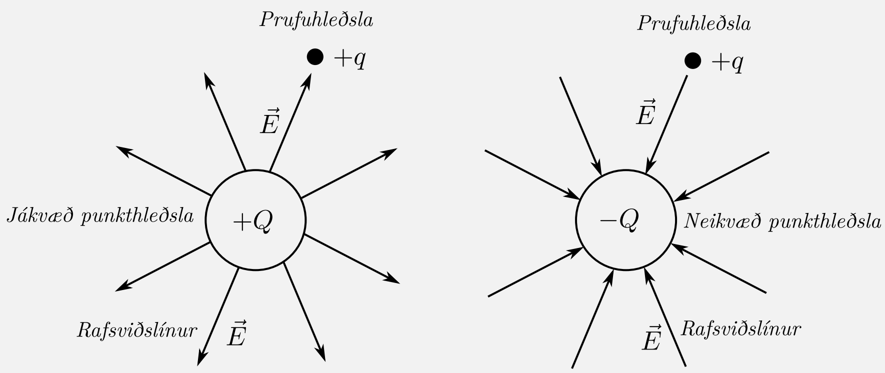
Þar sem að $\vec{r}_n$ er vigurinn frá Q_n til q, $r_n = |\vec{r}_n|$ og $\hat{\vec{r}}_n = \frac{\vec{r}_n}{r_n}$ er einingarvigurinn.
En í rafsegulfræði þá erum við að glíma við mikinn fjölda af eindum þannig að fjöldi liða getur orðið mjög stór (af sömu stærðargráðu og Avogadrosartalan $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$!). Hvert okkar samanstendur af billjónum af frumum og hver þeirra samanstendur af billjónum af atómum og hvert þeirra samanstendur af nokkrum rafeindum og róteindum. Það er engin leið fyrir okkur til þess að lýsa öllum þessum eindum með rafkröftum Coulombs. Við þyrftum að gera billjón billjónir af kraftamyndum og það er því algjörlega ómögulegt fyrir okkur að ætlast til þess að við getum bara skrifað niður heildarkraftinn fyrir prufuhleðsluna, q og sagst hafa leyst vandamálið! Við þurfum nýja leið til þess að sjá heiminn! Nýja og öflugari leið til þess að hugsa um eðlisfræðileg fyrirbæri. Lausnin á þessu vandamáli felst í því að skoða svokallað sviðshugtak (e. *field*) sem lýsir því hvernig hlutir hreyfast út frá því hvar þeir eru staddir. Til dæmis þá vitum við að epli fellur niður í áttina að jörðinni vegna þyngdarsviðsins. Svið og kraftur eru því afar náskyld hugtök og við munum reyna á þessari önn að skýra í hverju munurinn felst. Sviðshugtakið er oftast kennt við Breska vísindamanninn Michael Faraday, en það er sérlega athyglisvert því hann hafi litla kunnáttu í stærðfræði og var ekki skólagenginn maður. Það er vegna þess að sviðshugtakið hefur bæði stærðfræðilega skilgreiningu og myndræna skilgreiningu (Faraday notaði þá síðari).

Skilgreining 14.3. (Rafsvið frá punkthleðslu) Lítum á punkthleðslu Q. Ímyndum okkur að við komum lítilli prufuhleðslu q fyrir í fjarlægð r frá punkthleðslunni. Látum vigurinn á milli þeirra vera $\vec{r}$. Þá er **rafsviðið**, $\vec{E}$, sem að prufuhleðslan q finnur fyrir vegna punkthleðslunnar Q gefið með:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_k}{q} = \frac{kQ}{r^2}\hat{\vec{r}}.$$

Stærðfræðilega lítur út eins og að við séum ekki að gera mikið en hugmyndafræðilega þá er þetta afar öflug leið til þess að hugsa um heiminn! En ég lofaði líka að gefa myndræna skilgreiningu:

Við teiknum rafsviðslínur frá punkthleðslu þannig að þær gefi til kynna í hvaða stefnu jákvæð prufuhleðsla, $+q$, myndi ferðast ef henni væri sleppt af stað nálægt punkthleðslunni. Það þýðir að rafsviðslínurnar frá jákvæðum punkthleðslum eru í burtu frá henni en rafsviðslínur frá neikvæðum punkthleðslum eru að henni. Styrkur rafsviðsins er táknaður með því hversu þéttar rafsviðslínurnar eru á myndinni.



Mynd 14.4: Stefna rafsviðsins frá tveimur punkthleðslum með gagnstæð formerki.

Lögmál 14.4. (Samlagningarlögmálið) Ef rafsviðið sem að prufuhleðsla q finnur fyrir frá mörgum punkthleðslum $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ er gefið með $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \ldots, \vec{E}_n$ þá er heildarrafsviðið sem prufuhleðslan finnur fyrir gefið með:

$$\vec{E}_{\text{heild}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n.$$

Útleiðsla: Þetta er bara einföld afleiðing af öðru lögmáli Newtons. Ef $\vec{F}_{\text{heild}}$ er heildarkrafturinn sem verkar á prufuhleðslu q frá mörgum punkthleðslum $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ sem hafa stefnuvigra $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$ þá er heildarrafsviðið gefið með:

$$\vec{E}_{\text{heild}} = \frac{1}{q}\vec{F}_{\text{heild}} = \frac{1}{q}\left(\frac{kqQ_1}{r_1^2}\hat{\vec{r}}_1 + \frac{kqQ_2}{r_2^2}\hat{\vec{r}}_2 + \ldots + \frac{kqQ_n}{r_n^2}\hat{\vec{r}}_n\right) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n$$

Þar sem $\vec{E}_n = \frac{kQ_n}{r_n^2}\hat{\vec{r}}_n$. □

Lögmál 14.5. Lítum á eind með massa m og hleðslu q sem á verkar rafsvið $\vec{E}$. Þá finnur hún fyrir heildarkrafti:

$$\vec{F}_{\text{heild}} = m\vec{a} = \vec{F}_E = q\vec{E}.$$

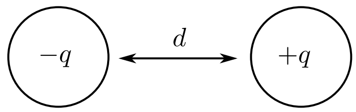
Útleiðsla: Við höfum þá að:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{heild}} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n \\ &= \frac{kqQ_1}{r_1^2}\hat{\vec{r}}_1 + \frac{kqQ_2}{r_2^2}\hat{\vec{r}}_2 + \ldots + \frac{kqQ_n}{r_n^2}\hat{\vec{r}}_n \\ &= q\vec{E}_1 + q\vec{E}_2 + \ldots + q\vec{E}_n \\ &= q\vec{E}_{\text{heild}}.\end{aligned}$$

Við skrifum gjarnan $\vec{E}$ í staðinn fyrir $\vec{E}_{\text{heild}}$ og köllum kraftinn $\vec{F}_E = q\vec{E}$ *rafkraftinn*. □

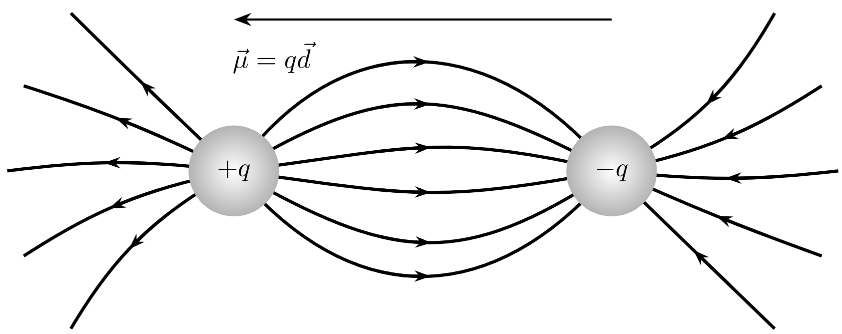
14.3 Raftvískaut

Einfaldasta sýnidæmið sem að við getum tekið er eftirfarandi: Lítum á tvær jafnstórar hleðslur með gagnstæð formerki $\pm q$ sem eru í fjarlægð d frá hvor annarri. Þetta kemur fyrir mun oftar fyrir í náttúrunni en maður myndi halda (t.d. í vatnssameindinni H_2O).



Mynd 14.5: Raftvískaut

Við höfum séð hvernig að hleðslurnar einar og sér mynda rafsvið í kringum sig. En hvernig lítur rafsviðið út þegar að við leggjum saman rafsviðin þeirra?
Til þess að teikna rafsviðslínur þá þurfum við að ímynda okkur að við höfum litla jákvæða prufuhleðslu. Síðan teiknum við rafsviðslínurnar út frá því hvernig heildarkrafturinn sem að prufuhleðslan myndi finna fyrir í þeim punkti lítur út. Það vill þannig til að rafsviðslínurnar sýna ferilinn sem að jákvæða prufuhleðslan myndi hreyfast eftir ef að henni væri sleppt þar.



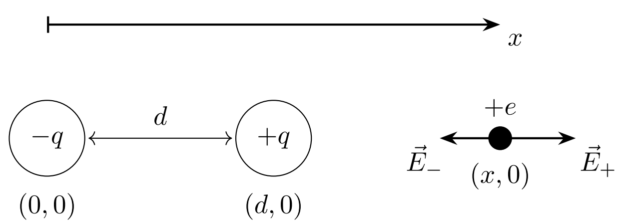
Mynd 14.6: Rafsviðslínurnar í kringum tvískautið.

Það er reyndar stærð sem að fólk skilgreinir oft á þessum tímapunkti sem að kallast *tvískautsvægið* og er táknað með $\vec{\mu}$ og skilgreint þannig að:

$$\vec{\mu} = q\vec{d}$$

Þar sem að q er hleðsla raftvískautsins og $\vec{d}$ er vigurinn frá neikvæðu hleðslunni að þeirri jákvæðu.

Við skulum reyna að átta okkur betur á tvískautinu. Hugsum okkur að við komum neikvæðu hleðslu tvískautsins fyrir í $(0,0)$ í hnitakerfinu og jákvæðu hleðslunni í $(d,0)$. Okkur langar til þess að skoða hvert rafsviðið verður í $(x,0)$ langt í burtu ($x \gg d$) á x-ás. Skoðum mynd af þessu:



Mynd 14.7: Rafsviðið frá tvískautinu á prufuhleðslu $+e$ meðfram x-ás.

Við sjáum að rafsviðið í $(x,0)$ verður þá:

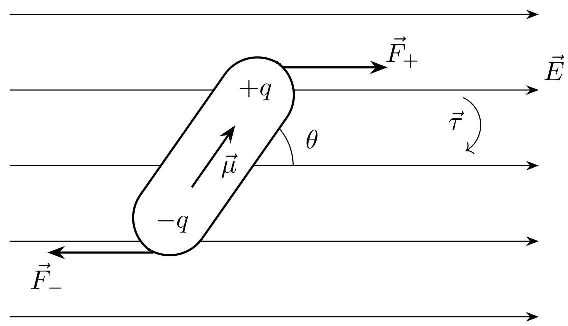
$$\vec{E}_{\text{heild}} = \vec{E}_{+} + \vec{E}_{-} = \frac{kq}{(x-d)^2} - \frac{kq}{x^2}.$$

Við getum umritað þetta aðeins til þess að koma þessu yfir á form þar sem að við getum notað uppáhaldsnálgun eðlisfræðingsins, þ.e.a.s. tvíliðunálgunina $(1+b)^n \approx 1+nb$ fyrir lítil $b \ll 1$.

$$E_{\text{tvískaut}} = \frac{kq}{(x-d)^2} - \frac{kq}{x^2} = \frac{kq}{x^2}\left(\left(1-\frac{d}{x}\right)^{-2} - 1\right) \overset{d \ll x}{\approx} \frac{kq}{x^2}\left(1 + \frac{2d}{x} - 1\right) = \frac{2kqd}{x^3}.$$

Þar sem að við höfum notað að stærðin $\frac{d}{x} \ll 1$ því $d \ll x$. Rafsviðið frá raftvískautinu fellur mjög hratt (eins og $1/x^3$). Langt í burtu frá tvískautinu þá er styrkur rafsviðsins næstum því núll!

En hvers vegna var stærðin $\vec{\mu} = q\vec{d}$ eiginlega kölluð tvískautsvægi? Hvaðan kemur tengingin við kraftvægið? Til þess að sjá það þá þurfum við að koma tvískautinu fyrir í utanaðkomandi rafsvið $\vec{E}$. Látum θ vera hornið sem að rafsviðið, $\vec{E}$ myndar við tvískautsvægið, $\vec{\mu}$:



Mynd 14.8: Tvískaut með tvískautsvægi $\vec{\mu} = q\vec{d}$ í ytra rafsviði $\vec{E}$.

Raftvískautið mun byrja að snúast um massamiðju sína. Við sjáum þá að kraftvægið sem að verkar á tvískautið er gefið með:

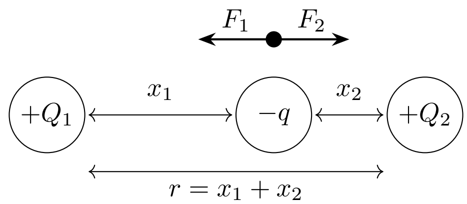
$$\tau = F_{+} \cdot \frac{d}{2}\sin\theta + F_{-} \cdot \frac{d}{2}\sin\theta = qEd\sin\theta = \mu E\sin\theta.$$

Almennt gildir að:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{E}.$$

14.4 Lagrange-punktar

Þegar við skoðuðum þyngdarlögmálskraftinn þá sáum við að til voru punktar (sem kallast Lagrange-punktar) þar sem að heildarkrafturinn sem að verkar á hlut vegna tveggja annarra er núll (til dæmis einhversstaðar á milli jarðarinnar og tunglsins verður þyngdarlögmálskrafturinn sem að verkar á okkur núll). Fyrir rafkraftinn er þetta aðeins flóknara því að þá geta kraftarnir líka haft stefnur. Það eru í rauninni 2^3 tilvik eftir því hvaða formerki hleðslurnar hafa. En til einföldunar skulum við skoða eitt ákveðið tilvik af þessum. Skoðum því sýnidæmi þar sem að við höfum hleðslu $+Q_1$ sem er stödd í $x=0$ og aðra hleðslu $+Q_2$ sem er stödd í $x=r$. Hvar, x, ættum við að staðsetja litla, neikvæða hleðslu, $-q$ þannig að heildarkrafturinn sem að verkar á hana er núll?



Mynd 14.9: Kraftajafnvægi fyrir hleðsluna $-q$ er einungis að finna á milli hleðslanna $+Q_1$ og $+Q_2$.

Einhverstaðar á milli hleðslanna munum við hafa:

$$F_1 = F_2 \implies \frac{kQ_1 q}{x_1^2} = \frac{kQ_2 q}{x_2^2}$$

En við höfum að $x_2 = r - x_1$, þannig að við fáum:

$$\frac{Q_1}{x_1^2} = \frac{Q_2}{(r - x_1)^2} \implies \left(\frac{r - x_1}{x_1}\right)^2 = \frac{Q_2}{Q_1} \implies \frac{r}{x_1} - 1 = \pm\sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}} \implies x_1 = \frac{r}{1 \pm \sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}}}$$

Þannig að ef við viljum að ögnin með hleðslu $-q$ sé í kraftajafnvægi á milli $+Q_1$ og $+Q_2$ þá þyrfti hún að vera í fjarlægð $x_1 = r/\left(1 \pm \sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}}\right)$ frá hleðslunni Q_1. En þetta eru tvær lausnir! Hvernig stendur á því? Lausnin $x_1 = r/\left(1 - \sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}}\right)$ samsvarar því að Q_1 liggi á milli Q_1 og Q_2 og er því rétta lausnin. En $x_1 = r/\left(1 + \sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}}\right)$ samsvarar því að ögninin liggi ekki á milli þeirra heldur hinum meginn við aðra hleðsluna! En það gengur ekki upp (það getur ekki verið neitt kraftajafnvægi fyrir utan hleðslurnar).

14.5 Rafsviðið meðfram samhverfuás hringlaga gjarðar

Við kynnum nú til sögunnar hleðsluþéttleikann. Við höfum áður talað um eðlismassa, $\rho = \frac{m}{V}$, þar sem að m er massi hlutarins og V er rúmmál hans. Þetta er massaþéttleiki. Við höfðum líka séð (þegar við vorum að glíma við staðbylgjur á streng) svokallaðan línulegan massaþéttleika, $\lambda = \frac{m}{\ell}$, þar sem að m var massi vírsins og ℓ var lengd hans. Við kynnum því til sögunnar:

Skilgreining 14.6. Lítum á hlut af lengd L, með yfirborðsflatarmál A og rúmmál V. Látum Q vera heildarhleðslu hlutarins. Við skilgreinum þá:

(i) Línulegan hleðsluþéttleiki hlutarins sem:

$$\lambda = \frac{Q}{L}.$$

(ii) Yfirborðshleðsluþéttleiki hlutarins sem:

$$\sigma = \frac{Q}{A}.$$

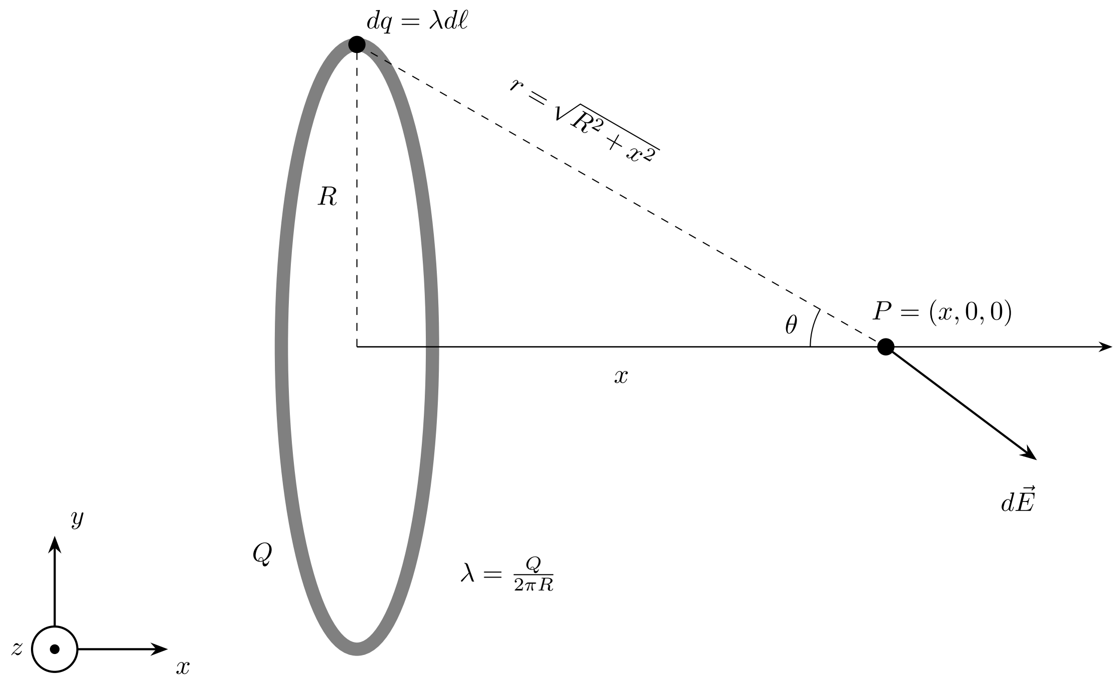
(iii) Hleðsluþéttleiki hlutarins sem:

$$\rho = \frac{Q}{V}.$$

Við skulum síðan sýna hvernig þetta er notað. Hugmyndin er einfaldlega sú að sérhverja stóra hleðslu Q getum við brotið niður í minni hleðslur q. Reyndar ef við viljum vera formleg þá er til heiltala $n \in \mathbb{N}$ þannig að $Q = n \cdot e$ þar sem e er grunnhleðslan. En í sumum dæmum þar sem að við þekkjum ekki n getur verið þægilegra að nota hleðsluþéttleikann (hann þjónar sama tilgangi). Við skulum sýna hvernig þetta er notað til þess að leiða út:

Lögmál 14.7. Lítum á hringlaga gjörð með geisla R og jafndreifða hleðslu Q sem liggur í yz-planinu (jafna hringsins er þá $y^2 + z^2 = R^2$). Rafsviðið í punkti, $P = (x, 0, 0)$, í lóðréttri fjarlægð x frá miðju gjarðarinnar er þá gefið með:

$$E_x = kQ \cdot \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}}, \qquad E_y = E_z = 0.$$



Útleiðsla: Skoðum lítinn bút af gjörðinni af lengd $d\ell$. Línulegur hleðsluþéttleiki gjarðarinnar er $\lambda = \frac{Q}{2\pi r}$. Þá er hleðslan í þessum litla bút $d\ell$ gefin með $dq = \lambda d\ell$. Við getum litið á þessa litlu hleðslu sem punkthleðslu (gætum, ef við vildum, valið $d\ell$ þannig að dq verður jöfnu grunnhleðslunni e). Hvert er þá framlag litlu hleðslunnar dq til rafsviðsins í punktinum $P = (x, 0, 0)$? Litla hleðslan dq gefur framlag $d\vec{E}$ til rafsviðsins. Við vitum að heildarrafsviðið verður einungis í x-stefnuna (styttist út í y og z stefnurnar vegna samhverfu) svo að við þurfum einungis að reikna þann þátt af $d\vec{E}$ sem er samsíða x-ásnum. Fáum þá:

$$dE_x = \left|d\vec{E}\right| \cos\theta = \left|d\vec{E}\right| \cdot \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

En við höfum að:

$$\left|d\vec{E}\right| = \frac{kdq}{R^2 + x^2}, \qquad \text{þ.a.} \qquad dE_x = \left|d\vec{E}\right| \cdot \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{kxdq}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

Síðan þurfum við að leggja saman öll þessi framlög frá öllum litlu hleðslunum $dq = \lambda d\ell$ í gjörðinni. En þá höfum við að:

$$E_x = \int dE_x = \int \frac{kxdq}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \int \frac{kx\lambda d\ell}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{kx\lambda}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \underbrace{\int d\ell}_{2\pi R} = \frac{2\pi Rkx\lambda}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Ef við rifjum síðan upp að $\lambda = \frac{Q}{2\pi R}$ þá sjáum við að lokum að:

$$E_x = kQ \cdot \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

Til að sannreyna svarið okkar þá getum við athugað að ef $x \gg R$ þá höfum við að rafsviðið verður: $E_x \approx \frac{kQ}{x^2}$ eins og við er að búast því þá lítur gjörðin út eins og punkthleðsla með hleðslu Q.

14.6 Rafsviðið frá óendanlega stórri plötu (*)

Lítum á plötu með hleðsluþéttleika σ. Ef platan er óendanlega stór þá er auðvelt að sannfæra sig um að rafsviðið sé einungis í stefnuna frá plötunni (þ.e. ef platan er í xy-planinu þá er rafsviðið einungis með z-þátt) Höfum þá að á z-ásnum þá er framlagið frá litlum bút með flatarmál $dxdy$:

$$dE_z = \frac{kdq}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \cdot z = \frac{kz\sigma dxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Þannig að:

$$\begin{aligned}
E_z = \int dE_z &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{kz\sigma}{(x^2 + y^2 + z^2)} dxdy \\
&= 4 \int_{0}^{+\infty} \int_{0}^{+\infty} \frac{kz\sigma}{(x^2 + y^2 + z^2)} dxdy \\
&= 4 \int_{0}^{+\infty} \left[\frac{kz\sigma x dy}{(y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right]_0^{+\infty} dy \\
&= 4 \int_{0}^{+\infty} \frac{kz\sigma}{(y^2 + z^2)} dy \\
&= \frac{4kz\sigma}{z} \left[\arctan\left(\frac{y}{z}\right) \right]_0^{+\infty} \\
&= 4k\sigma \left(\arctan(\infty) - \arctan(0) \right) \\
&= 2k\sigma \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) \\
&= 2\pi k\sigma
\end{aligned}$$

En síðan rifjum við upp að $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ þ.a.

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 A}$$

Sem er vissulega óháð z ef platan er óendnanlega stór!

14.7 Dæmi

Dæmatími 1: Coulombskrafturinn

Coulombskrafturinn (eða rafkrafturinn) sem verkar á milli tveggja hleðsla q_1 og q_2 sem eru í fjarlægð r frá hver er gefinn með:

$$\vec{F}_k = \frac{kq_1q_2}{r^2}\hat{r}.$$

þar sem $k = 8{,}98 \cdot 10^9\,\mathrm{N\,m^2/C^2}$ er fasti sem nefnist fasti Coulombs og $\hat{r}$ táknar einingarvigur í stefnuna frá annarri hleðslunni til hinnar. Krafturinn er fráhrindikraftur ef hleðslurnar hafa sama formerki en aðdráttarkraftur ef hleðslurnar hafa sama formerki.

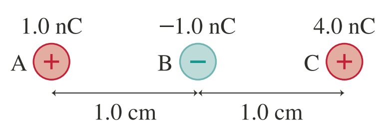
(22.13) Lítum á tvo jafnstóra massa $m = m_1 = m_2 = 2\,\mathrm{kg}$ með jafnstóra jákvæða hleðslu $q = Q_1 = Q_2 = +5\,\mathrm{mC}$ sem eru í fjarlægð $d = 1\,\mathrm{m}$ frá hvor öðrum á núningslausu borði.

- **(a)** Hver er stærð Coulombskraftsins/rafkraftsins sem verkar á annan hvorn massann?
- **(b)** Nú er mössunum sleppt úr kyrrstöðu. Hver verður hröðun massanna einmitt á því augnabliki?

(22.16) Tvær róteindir með massa $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ og með hleðslu $+e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ eru staddar í fjarlægð $r = 1\,\mathrm{fm}$ frá hver annarri.

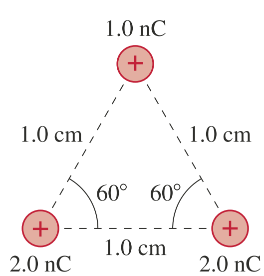
- **(a)** Hver er stærð Coulombskraftsins, F_k, sem að önnur róteindin verkar með á hina?
- **(b)** Hver er stærð þyngdarlögmálskraftsins, F_G, sem að önnur róteindin verkar með á hina?
- **(c)** Hverrt er hlutfallið $\frac{F_k}{F_G}$?

(22.17) Lítum á eftirfarandi mynd:



Hver er heildarkrafturinn sem að verkar á hleðsluna A?

(22.19) Lítum á eftirfarandi mynd:



Hver er heildarkrafturinn sem að verkar á hleðsluna A?

(22.13) $F_k = 200\,\mathrm{kN}$, $a = 1 \cdot 10^5\,\mathrm{m/s^2}$. **(22.16)** $F_k = 230\,\mathrm{N}$, $F_G = 1{,}9 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{N}$, $\frac{F_k}{F_G} = 1{,}2 \cdot 10^{36}$.

(22.17) $\vec{F}_{\text{heild}} = \vec{0}$. **(22.19)** $\vec{F}_{\text{heild}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3{,}1 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}\,\mathrm{N}$.

Dæmatími 2: Rafsviðið

Rafsviðið sem að punkthleðsla Q myndar í kringum sig í fjarlægð r frá henni er gefið með:

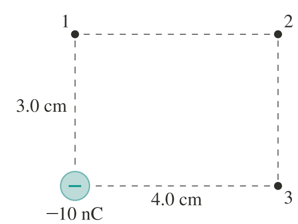
$$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$$

þar sem $\hat{r}$ er einingarvigur í stefnuna frá punkthleðslunni að þeim stað þar sem að rafsviðið er metið. Við ímyndum okkur að við höfum komið fyrir jákvæðri punkthleðslu með litla hleðslu, $+q$, í þeim punkti þar sem að við viljum meta rafsviðið. Síðan skoðum við rafkraftinn sem að prufuhleðslan $+q$ myndi finna fyrir í þeim punkti og deilum loks með prufuhleðslunni, $+q$.

(22.26) Hvert er rafsviðið í $r = 1{,}0\,\text{mm}$ fjarlægð frá **(a)** róteind **(b)** rafeind?

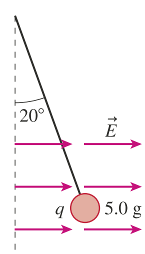
(22.26) Hleðsla $Q = +12\,\text{nC}$ er staðsett í upphafspunkti hnitakerfis, $(0{,}0\,\text{cm}, 0{,}0\,\text{cm})$. Hvert er rafsviðið í punktunum $A = (5{,}0\,\text{cm}, 0{,}0\,\text{cm})$, $B = (-5{,}0\,\text{cm}, 5{,}0\,\text{cm})$ og $C = (-5{,}0\,\text{cm}, -5{,}0\,\text{cm})$?

(22.63) Lítum á eftirfarandi mynd:



Hvert er rafsviðið í 1, 2 og 3?

(22.67) Lítum á ögn í rafsviði $\vec{E} = \binom{100}{0}\,\text{kN/C}$. Ögnin hefur massa $m = 5{,}0\,\text{g} = 5{,}0 \cdot 10^{-3}\,\text{kg}$ og hangir kyrr undir horni $\theta = 20°$ miðað við lárétt:



Hver er hleðsla agnarinnar, q?

(22.26) $E = 1{,}4 \cdot 10^{-9}\,\text{N/C}$. **(22.32)** $E_A = \binom{43}{0}\,\text{kN/C}$, $E_B = \binom{-15}{15}\,\text{kN/C}$, $E_C = \binom{-15}{-15}\,\text{kN/C}$.

(22.63) $\vec{E}_1 = \binom{0}{-100}\,\text{kN/C}$, $\vec{E}_2 = \binom{-56}{0}\,\text{kN/C}$, $\vec{E}_3 = \binom{-29}{22}\,\text{kN/C}$. **(22.67)** $q = 180\,\text{nC}$.

Dæmatími 3: Rafkrafturinn

Hlaðin eind með hleðslu q sem er stödd í utanaðkomandi rafsviði $\vec{E}$ (okkur er alveg sama hvernig þetta rafsvið varð til!) finnur fyrir rafkrafti:

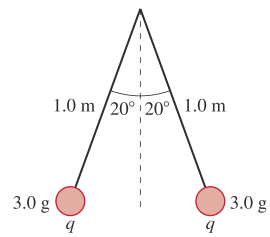
$$\vec{F}_E = q\vec{E}$$

Takið eftir að jákvæðar eindir vilja ferðast með rafsviðslínunum en neikvæðar eindir vilja ferðast á móti rafsviðslínunum.

(22.5) Hver er heildarhleðsla allra rafeindanna í 1,0 L af vatni?

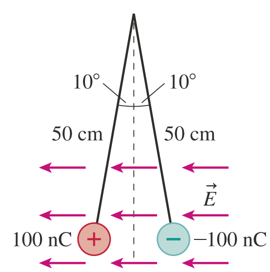
(22.54) Í einföldu líkani af vetnisatóminu þá er rafeindin á hringhreyfingu með geisla $r = 0{,}053\,\text{nm}$ umhverfis kyrrstæða róteind. Hversu margar umferðir fer rafeindin í kringum róteindina á sekúndu?

(22.73) Lítum á eftirfarandi mynd:



Ákvarðið hleðsluna, q.

(22.75) Lítum á eftirfarandi mynd:



Ákvarðið massann, m.

(22.5) $Q \approx -5 \cdot 10^7$ C. **(22.54)** $N = 6{,}6 \cdot 10^{15}$ snú/sek. **(22.73)** $q = 750\,\text{nC}$. **(22.75)** $m = 5{,}8\,\text{g}$.

Kafli 15

Lögmál Gauss

Áður en að við byrjum að fjalla um lögmál Gauss þá ættum við að skoða Maxwells-jöfnurnar fjórar:

$$\begin{cases} \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \dfrac{Q_{\text{inni}}}{\epsilon_0}, & \textit{(Lögmál Gauss fyrir rafsvið)} \\ \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, & \textit{(Lögmál Gauss fyrir segulsvið)} \\ \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\dfrac{d\Phi_B}{dt}, & \textit{(Lögmál Faradays)} \\ \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{inni}}, & \textit{(Lögmál Ampéres).} \end{cases}$$

Það kann kannski að koma ykkur spánskt fyrir sjónir að engin af jöfnunum hér á undan er kennd við Maxwell - en það er vegna þess að hann var fyrstur manna til þess að átta sig á því hvernig að þessar fjórar jöfnur tengjast (og að þær lýsi einu og sama fyrirbærinu). Reyndar var hans helsta framlag í öllu þessu máli að *„lagfæra“* fjórðu jöfnuna (Lögmál Ampéres) þannig að hún yrði:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{inni}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}, \qquad \textit{(Lögmál Maxwells).}$$

Það er reyndar fræg saga af Maxwell og Eureka-mómentinu hans þegar honum tókst að sýna fram á að ljós er rafsegulbylgja. Það tengist allt saman þeirri merkilegu staðreynd að ljóshraðinn er:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m/s.}$$

Það er því einnig hægt að skrifa lögmál Maxwells á eftirfarandi formi:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{inni}} + \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi_E}{dt}, \qquad \textit{(Lögmál Maxwells).}$$

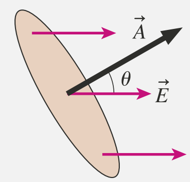
Maxwells-jöfnurnar útskýra alla rafsegulfræði. Þær eru án efa hagnýttustu jöfnur mannkynssögunnar - þær eru fjórar og líta út fyrir að vera einfaldar (kannski finnst ykkur það ekki sem stendur en bíðiði bara!). Samt sem áður er fólk enn þann daginn í dag að afhjúpa leyndardóma Maxwellsjafnanna (t.d. nýlega uppgötvuðu menn hvernig er hægt að hlaða síma án þess að stinga þeim í samband með því að leggja þá ofan á flöt sem að býr til segulsvið sem að er hægt að nota til þess að hlaða rafhlöðuna). Við skulum því hefjast handa við það að skoða Maxwells-jöfnurnar og byrjum því á þeirri fyrstu: Lögmál Gauss fyrir rafsvið.

15.1 Rafflæði

Þegar við vorum að skoða flæði í vatnspípum þá töluðum við um flæðið í gegnum vatnspípuna sem stærðina $\Phi = Av$ þar sem A var flatarmálið á pípunni og v var straumhraði vatnsins þvert á flatarmálið. Við höfðum þá sýnt að vatnsflæði í pípum er varðveitt, þ.e.a.s. $A_1v_1 = A_2v_2$ eða með öðrum orðum $\Phi =$ fasti. Nú kynnum við hinsvegar til sögunnar almennara stærðfræðilegt hugtak fyrir flæði. Við viljum nefnilega geta talað um rafflæði:

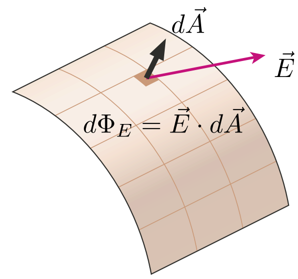
Skilgreining 15.1. Lítum á hlut með flatarmál $\vec{A}$ þar sem að rafsviðið er gefið með $\vec{E}$. Látum θ vera hornið á milli vigranna. **Rafflæðið** út um flötinn er þá gefið með:

$$\Phi_E = \vec{E}\cdot\vec{A} = EA\cos\theta$$



Stundum viljum við setja þetta fram á örsmæðarformi. Til dæmis ef að yfirborðið okkar er kúpt eða bogið. Þá skiptum við flatarmálinu upp í örsmæðir $d\vec{A}$ og skoðum örrafflæðið út um sérhvert örsmæðarflatarmál. Við skrifum þá $d\Phi_E = \vec{E}\cdot d\vec{A}$. Við þurfum síðan að leggja saman framlagið frá öllum þessum örrafflæðum til þess að finna heildarrafflæðið. En þá er:

$$\Phi_E = \oint d\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A}.$$



Þar sem að $\oint$ táknar tegur yfir allt yfirborð hlutarins. Yfirborð hlutarins sem að við erum að tegra yfir kallast *Gauss-flötur*. Við veljum oft ímyndaða Gauss-fleti (lögmál Gauss gildir líka um þá!). Lögmál Gauss segir þá einfaldlega að rafflæðið er varðveitt:

Lögmál 15.2. (Lögmál Gauss) Lítum á hlut með rúmmál V og yfirborðsflatarmál A. Látum hlutinn umlykja heildarhleðslu $Q_{\text{inni}} = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n$. Þá gildir að:

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{inni}}}{\varepsilon_0}.$$

Við skulum núna sanna/leiða út lögmál Coulombs með því að nota lögmál Gauss:

Lögmál 15.3. (Lögmál Gauss $\implies$ Lögmál Coulombs) Lítum á punkthleðslu Q. Þá er rafsviðið í fjarlægð r frá punkthleðslunni gefið með $E(r) = \frac{kQ}{r^2}$. Sér í lagi gildir að rafkrafturinn sem að jákvæð prufuhleðsla, $+q$, finnur fyrir í fjarlægð r frá punkthleðslunni er gefinn með $F_k = qE = \frac{kQq}{r^2}$.

Útleiðsla: Til þess að nota lögmál Gauss þurfum við fyrst að velja Gauss-flöt. Við veljum Gauss-flötinn okkar sem kúluna með geisla r í kringum punkthleðsluna, Q. Þá fæst samkvæmt lögmáli Gauss að:

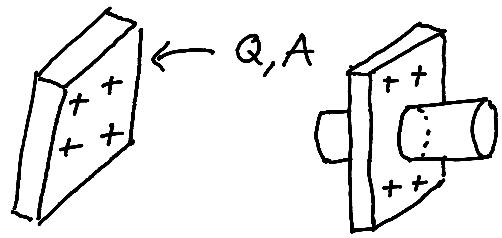
$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{inni}}}{\varepsilon_0} \implies E\underbrace{\oint dA}_{4\pi r^2} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \implies E\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \implies E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} = \frac{kQ}{r^2}.$$

Hér höfum við notað að rafsviðið og þverilvigur yfirborðsins eru alltaf samsíða (svo hornið á milli þeirra er núll). Vegna samhverfu er gildið á rafsviðinu $\vec{E}$ alltaf það sama í fjarlægð r frá punkthleðslunni svo að það er fasti fyrir sérhvern smábút dA og við getum því tekið það út fyrir tegrið. Loks notuðum við að $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$. $\square$

Lögmál 15.4. (Rafsvið frá plötu) Skoðum plötu með flatarmál A og jafndreifða hleðslu Q. Þá er rafsviðið frá plötunni gefið með:

$$E_{\text{plata}} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 A}.$$

Útleiðsla: Hleðsluþéttleiki plötunnar er $\sigma = \frac{Q}{A}$. Velum nú Gauss-flöt sem er sívalningur sem nær í gegnum báðar hliðar og hefur lengd ℓ og geisla r þar sem $r \ll \sqrt{A}$ og lengdin er meiri heldur en þykkt plötunnar. Hver er þá hleðslan inni í Gauss-fletinum? Hún er:



$$Q_{\text{inni}} = \sigma r^2 \pi$$

En þar með höfum við samkvæmt lögmáli Gauss að:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{inni}}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma r^2 \pi}{\varepsilon_0}.$$

En hvert er rafflæðið út um Gauss-flötinn? Við sjáum að rafsviðið verður að liggja beint frá plötunni í báðar stefnur (ef Q er jákvæð - annars liggja rafsviðslínurnar beint að plötunni) svo að það er ekkert rafflæði út um hliðar sívalningsins, það er einungis rafflæði út um botninn og topinn á sívalningnum. Við höfum þá að:

$$\Phi_E = \underbrace{\Phi_{\text{hliðar}}}_{=0} + \Phi_{\text{toppur}} + \Phi_{\text{botn}} = E\pi r^2 + E\pi r^2 = 2\pi E r^2.$$

Þar sem að við höfum notað að $\vec{E}$ og $\vec{A}$ eru samsíða fyrir bæði botninn og toppinn. En þar með ályktum við:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{inni}}}{\varepsilon_0} \implies 2\pi r^2 E = \frac{\sigma r^2 \pi}{\varepsilon_0} \implies E_{\text{plata}} = \frac{\sigma r^2 \pi}{2\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 A}.$$

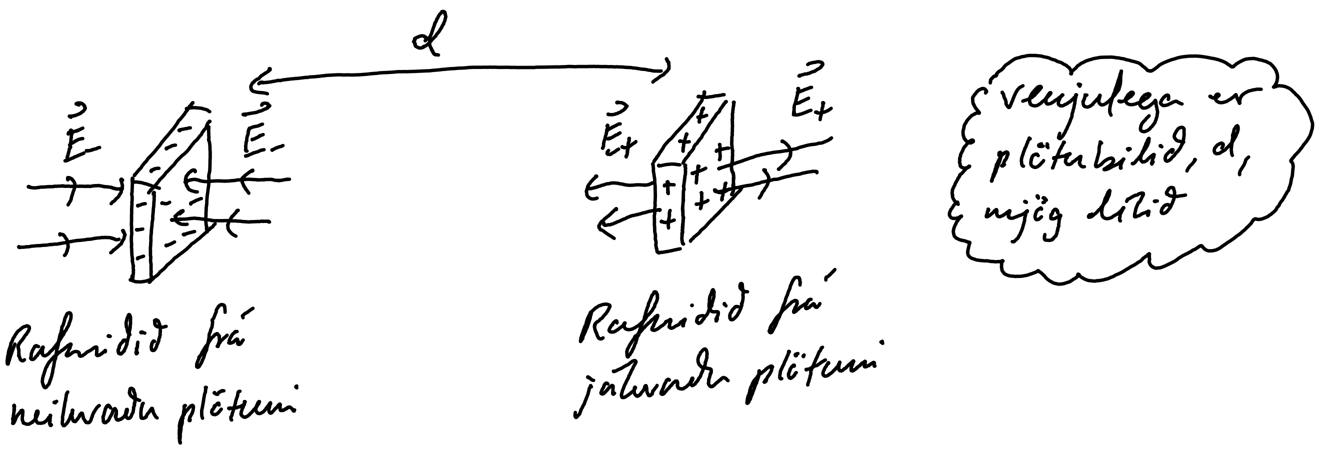
□

Þetta er í rauninni frekar skrítin niðurstaða því að við fáum að rafsviðið er óháð fjarlægðinni frá plötunni. Þannig að í óendanlegri fjarlægð frá plötuþéttinum þá ætti rafsviðið einnig að vera gefið með $E_{\text{plata}} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 A}$. Kannski hefði ég átt að minnast á það á einhverjum tímapunkti en við gerðum eiginlega ráð fyrir því að platan væri óendanlega stór í útleiðslunni! Það er þá spurning hvort að þetta sé góð nálgun eftir allt saman? Í rafsegulfræði þá er ágæt þumalputtaregla að ef að hluturinn er meira en 5 cm á lengd þá er hann svo gott sem óendanlega langur (þ.e. $5\,\text{cm} \approx \infty$). En niðurstaðan hér á undan gefur okkur sniðuga leið til þess að leiða út eftirfarandi (sem við munum nota mikið í vetur!):

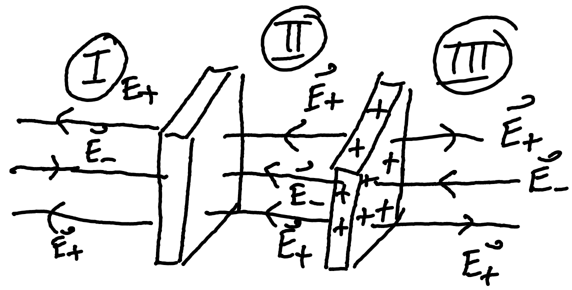
Lögmál 15.5. (Rafsvið frá plötuþétti) Lítum á tvær plötur með flatarmál A sem eru í fjarlægð d frá hvor annarri. Látum plöturnar hafa jafnstóra en gagnstæða hleðslu $\pm Q$. Þá er rafsviðið á milli platnanna gefið með:

$$E_{\text{plötuþéttir}} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}.$$

Útleiðsla: Við byrjum á því að teikna upp mynd af plötuþéttinum:



En við höfum þá eiginlega þrjú tilvik:



Við sjáum þá að:

$$E_{\text{I}} = E_- - E_+ = \frac{Q}{2\varepsilon_0 A} - \frac{Q}{2\varepsilon_0 A} = 0.$$

og eins er

$$E_{\text{III}} = E_+ - E_- = \frac{Q}{2\varepsilon_0 A} - \frac{Q}{2\varepsilon_0 A} = 0.$$

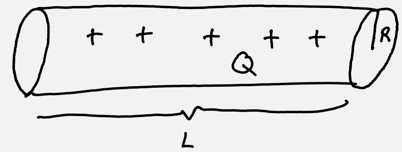
En á milli platnanna höfum við að:

$$E_{\text{II}} = E_+ + E_- = \frac{Q}{2\varepsilon_0 A} + \frac{Q}{2\varepsilon_0 A} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}.$$

Þannig að við álytum að $E_{\text{plötuþéttir}} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$ á milli platnanna. $\square$

Lögmál 15.6. (Rafsvið frá löngum beinum vír) Lítum á rafmagnsvír með geisla R og lengd L sem ber rafstraum þannig að heildarhleðslan inni í þessum vírbút er Q. Þá er rafsviðið frá vírnum gefið með:

$$E_{\text{vír}} = \begin{cases} \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2 L} \cdot r & \text{ef } r \leq R. \\ \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \cdot \dfrac{1}{r} & \text{ef } r > R. \end{cases}$$



Útleiðsla: Byrjum á því að athuga að hleðsluþéttleiki vírsins er:

$$\rho = \frac{Q}{\pi R^2 L}$$

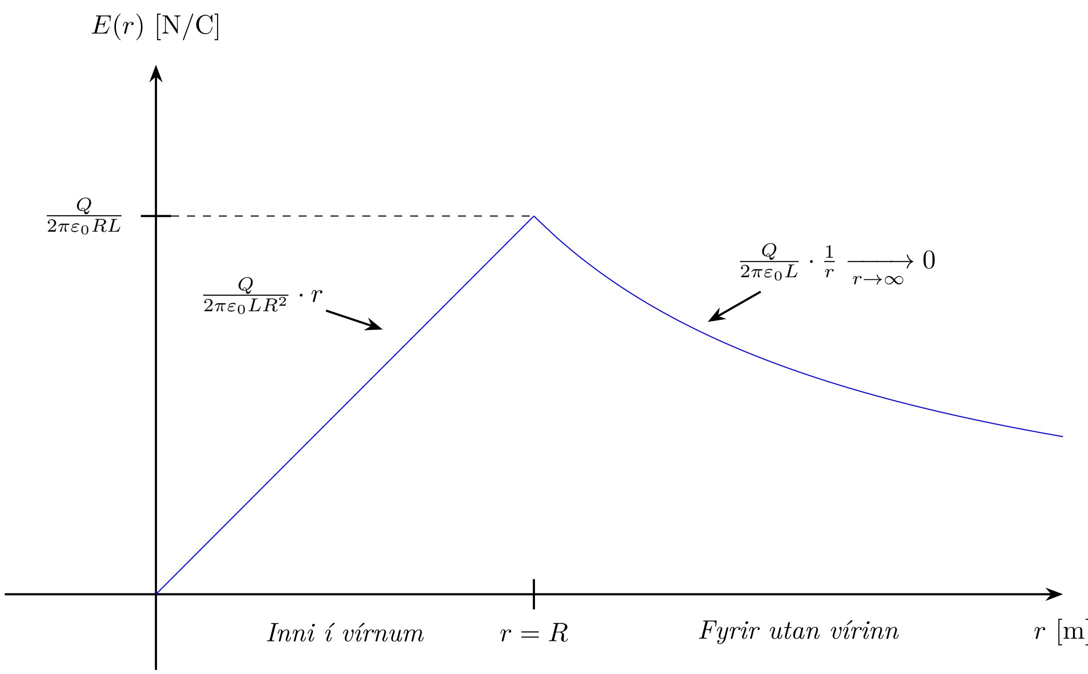
Skoða hvernig rafsviðið breytist inni í vírnum og fyrir utan. Veljum Gauss-flöt sem er sammiðja sívalningur með lengd $\ell < L$ og geisla r. Byrjum á því að skoða tilvikið þegar að $r > R$ (fyrir utan sívalninginn). Þá höfum við einfaldlega að:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \underbrace{\Phi_{\text{hliðar}}}_{E \cdot 2\pi r\ell} + \underbrace{\Phi_{\text{botn}}}_{=0} + \underbrace{\Phi_{\text{toppur}}}_{=0} = \frac{Q_{\text{inni}}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho\pi R^2 \ell}{\varepsilon_0} \implies E(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{R^2}{r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \cdot \frac{1}{r}.$$

Hinsvegar ef $r < R$ þá fæst að $Q_{\text{inni}} = \rho\pi r^2 \ell$ svo lögmál Gauss gefur að:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} \implies E(r) \cdot 2\pi r\ell = \frac{\rho\pi r^2 \ell}{\varepsilon_0} = \frac{Qr^2\ell}{\varepsilon_0 R^2 L} \implies E(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L R^2} \cdot r.$$

Að lokum getum við teiknað graf sem að sýnir þessa hegðun:



Mynd 15.1: Graf af styrk rafsviðsins frá löngum beinum vír með geisla R í fjarlægð r frá miðju vírsins.

Takið eftir að rafsviðsstyrkurinn frá vírnum ($\frac{1}{r}$) fellur hægar en rafsviðsstyrkurinn frá punkthleðslu ($\frac{1}{r^2}$).

15.2 Lögmál Gauss fyrir þyngdarsviðið (*)

Þar sem að það er ákveðið samræmi á milli Coulombskraftsins og þyngdarlögmálskraftsins þá ættum við að geta fundið Gausslögmál fyrir þyngdarlögmálið. Höfum séð að:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \implies \Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{inni}}{\varepsilon_0}.$$

Ef þyngdarsviðið er táknað með $\vec{g}$ þá ættum við að hafa:

$$g(r) = \frac{GM}{r^2} \implies \Phi_g = \oint \vec{g} \cdot d\vec{A} = 4\pi G M_{\text{inni}}.$$

Við getum þá notað þetta til þess að skoða hvernig styrkur þyngdarsviðsins breytist inni í jörðinni eftir því sem að við förum neðar. Lítum því á jörðina sem einsleita kúlu með geisla R og jafndriefðan massa M. Við viljum ákvarða þyngdarhröðunina inni í jörðinni fyrir $r < R$ og fyrir $r > R$. Fyrir $r > R$ fáum við einfaldlega að:

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{A} = 4\pi GM \implies g(r) \cdot 4\pi r^2 = 4\pi GM \implies g(r) = \frac{GM}{r^2}, \qquad \text{fyrir } r > R.$$

Hinsvegar ef $r < R$ þá þurfum við að ákvarða hvað M_{inni} er (því núna er það ekki massi allrar jarðarinnar). Því er gott að nota eðlismassa jarðarinnar:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3}, \qquad \text{þannig að} \qquad M_{\text{inni}} = \rho V_{\text{inni}} = \rho\frac{4\pi}{3}r^3$$

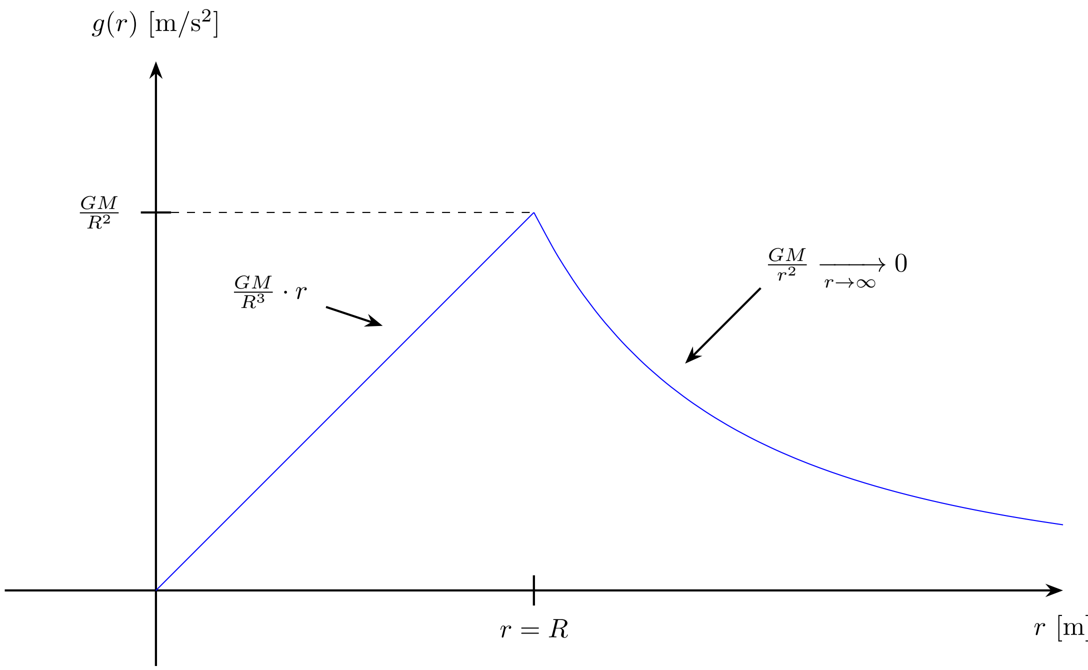
sem gefur því að $M_{\text{inni}} = M\left(\frac{r}{R}\right)^3$. Við fáum því að:

$$\oint \vec{g}(r) \cdot d\vec{A} = 4\pi G M_{\text{inni}} \implies g(r) \cdot 4\pi r^2 = 4\pi GM\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

sem gefur því að:

$$g(r) = \frac{GM}{R^2}\frac{r}{R}, \qquad r < R.$$

Sjáum sér í lagi að þegar $r = R$ þá er $g(r) = \frac{GM}{R^2}$ eins og við var að búast. Á næstu blaðsíðu má síðan sjá graf sem sýnir þyngdarhröðun jarðar sem fall af fjarlægð frá miðju jarðarinnar, r.



Mynd 15.2: Graf af þyngdarhröðun jarðar sem fall af r.

Takið eftir að þyngdarhröðunin vex línulega inni í jörðinni!

15.3 Dæmi

Dæmatími 4: Rafflæði

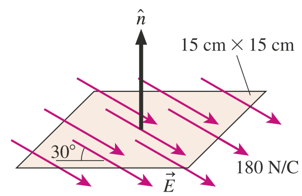
Rafflæði er skilgreind sem stærðin:

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA\cos\theta$$

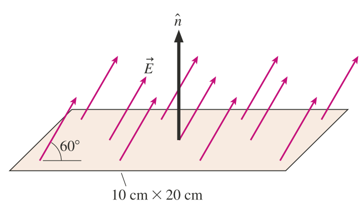
þar sem θ er hornið á milli vigranna. Ef við setjum þetta fram á örsmæðarformi þá verður þetta:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}.$$

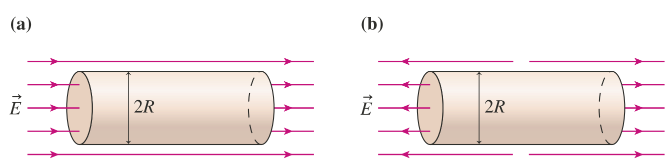
(24.9) Hvert er rafflæðið út um flötinn á myndinni?



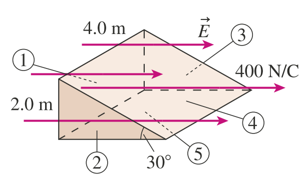
(24.11) Rafflæðið út um flötinn sem sést á myndinni er $\Phi_E = 25\,\mathrm{Nm^2/C}$. Hver er styrkur rafsviðsins?



(24.16) Hvert er rafflæðið út um sívalningana hér fyrir neðan?



(24.29) Ákarðið rafflæðin, $\Phi_1, \ldots, \Phi_5$ út um skábrettið hér fyrir neðan sem hallar um horn $\theta = 30°$ og hefur hæð $h = 2{,}0\,\mathrm{m}$ og breidd $b = 4{,}0\,\mathrm{m}$. Styrkur rafsviðsins er $E = 400\,\mathrm{N/C}$ í stefnu x-áss.



(24.9) $\Phi_E = -2{,}0\,\mathrm{Nm^2/C}$. **(24.11)** $\Phi_E = 1400\,\mathrm{N/C}$. **(24.16)** $\Phi_a = 0$, $\Phi_b = 2E\pi r^2$. **(24.29)**

$\Phi_1 = -3200\,\mathrm{Nm^2/C}$, $\Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_5 = 0\,\mathrm{Nm^2/C}$, $\Phi_4 = 3200\,\mathrm{Nm^2/C}$, $\Phi_{\text{heild}} = 0\,\mathrm{Nm^2/C}$.

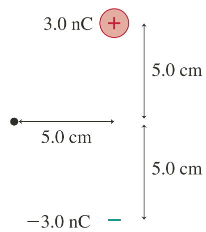
Dæmatími 5: Plötuþéttir

Rafsviðið í plötuþétti er gefið með:

$$E_{\text{plötuþéttir}} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}.$$

Rafsviðslínurnar liggja frá jákvæðu plötunni og að neikvæðu plötunni.

(23.3) Hver er styrkur og stefna rafsviðsins í svarta punktinum á myndinni?



(23.23) Plötuþéttir samanstendur af tveimur diskum með þvermál $þ = 6{,}0\,\text{cm}$ í fjarlægð $d = 2{,}0\,\text{mm}$ frá hvor annarri. Styrkur rafsviðsins á milli platnanna er $1{,}0 \cdot 10^6\,\text{N/C}$. Hver er hleðslan á hvorri plötu?

(23.25) Tvær plötur eru í fjarlægð $d = 1{,}0\,\text{cm}$ frá hvor annarri og halda hleðslu $\pm q \gg e$. Nú er rafeind sleppt frá yfirborði neikvæðu plötunnar og róteind er sleppt á sama tíma frá yfirborði jákvæðu plötunnar. Hvar mætast rafeindin og róteindin?

(23.26) Tvær plötur með þvermál $þ = 2{,}0\,\text{cm}$ eru í fjarlægð $d = 1{,}0\,\text{mm}$ frá hvor annarri. Búið er að hlaða plöturnar í $q = \pm 10\,\text{nC}$.

- **(a)** Hvert er rafsviðið á milli platnanna?
- **(b)** Róteind er skotið frá neikvæðu plötunni í átt að þeirri jákvæðu. Hver þarf upphafshraðinn að vera ef hún á rétt svo að sleikja yfirborð jákvæðu plötunnar?

(23.3) $\vec{E} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -7600 \end{smallmatrix}\right)\,\text{N/C}$. **(23.23)** $Q = 25\,\text{nC}$. **(23.25)** $\ell_e = 0{,}9995\,\text{cm}$. **(23.26)** $E = 3{,}6\,\text{MN/C}$,

$v = 8{,}3 \cdot 10^5\,\text{m/s}$.

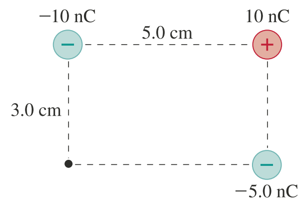
Dæmatími 6: Hreyfing í rafsviði

Hreyfing í rafsviði er afar svipuð hreyfingu í þyngdarsviði. Kraftajafnan okkar verður þá:

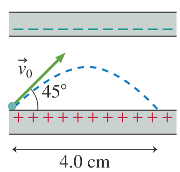
$$ma = qE, \qquad \text{til samanburðar við:} \qquad ma = mg$$

Almennt þá gilda allar sömu stöðujöfnur og við höfðum lært fyrir einsleitt rafsvið, E. Núna er hröðunin bara $a = \frac{qE}{m}$ í staðinn fyrir $a = g$.

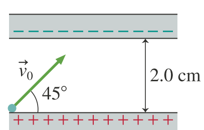
(23.37) Hver er styrkur og stefna rafsviðsins í punktinum á myndinni?



(23.52) Rafeind er skotið undir horni $\theta = 45°$ miðað ivð lárétt með upphafshraða $v_0 = 5{,}0 \cdot 10^6$ m/s frá jákvæðu plötu plötuþéttisins eins og sést á myndinni hér fyrir neðan. Rafeindin lendir í fjarlægð $\ell = 4{,}0$ cm frá upphafsstaðsetningu sinni. **(a)** Hver er styrkur rafsviðsins inni í þéttinum? **(b)** Hvert er minnsata hugsanlega plötubilið, d?



(23.53) Rafeind er skotið frá jákvæðu plötu plötuþéttis undir horni $\theta = 45°$ miðað við lárétt með upphafshraða v_0. Plötubilið er $d = 2{,}0$ cm. Styrkur rafsviðsins er $E = 1{,}0 \cdot 10^4$ N/C. Hver er mesti hraðinn, v_0, sem að rafeindin getur haft án þess að rekast í neikvæðu plötuna?



(23.73) Skoðum hringlaga gjörð með geisla R og jafndreifða hleðslu Q sem liggur þannig að samhverfuás gjarðarinnar samsvarar z-ás hnitakerfisins. Nú er lítilli hleðslu $-q$ komið fyrir í $z = 0$ á samhverfuás gjarðarinnar. Nú er hleðslan færð um litla vegalengd z frá jafnvægisstöðunni. Sýnið að fyrir $z \ll R$ þá verður tíðni einföldu sveifluhreyfingarinnar sem myndast við þetta gefin með:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 m R^3}}$$

(23.37) $\vec{E}_{\text{heild}} = \binom{-4{,}7}{86{,}4}$ kN/C, $E_{\text{heild}} = 86{,}5$ kN/C og $\varphi = 266{,}9°$. **(23.52)** $d_{\max} = 9{,}9$ mm. **(23.53)** $v_0 = 1{,}2 \cdot 10^7$ m/s. **(23.73)** $m\ddot{z} = -\frac{kQq}{R^3}z$, $\omega = \sqrt{\frac{kQq}{mR^3}}$, $f = \frac{\omega}{2\pi} = 2{,}0 \cdot 10^{12}$ Hz.

Dæmatími 7: Lögmál Gauss

Lögmál Gauss segir að heildarrafflæðið út Gauss-flöt með rúmmál V og yfirborðsflatarmál A er:

$$\Phi_{\text{heild}} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{inni}}}{\varepsilon_0}$$

Þar sem Q_{inni} er heildarhleðslan sem að Gauss-flöturinn umlykur.

(24.33) Hleðsla $q = +10\,\text{nC}$ er stödd í miðjunni á jafnhliða tening með hliðarlengdir $\ell = 2{,}0\,\text{m}$. Hvert er rafflæðið út um efstu hlið kubbsins vegna hleðslunnar, q?

(24.43) Finnið rafsviðið **(a)** inni í **(b)** fyrir utan á sundbolta með geisla R sem ber jafndreifða hleðslu Q á yfirborðinu.

(24.54) Lítum á kúluskel með innri geisla a og ytri geisla b. Hleðslan, Q, í kúluskelinni er jafndreifð um rúmmál hennar. Kúluskelin er hol að innan fyrir $r < a$.

- **(a)** Hvert er rafsviðið fyrir $r \geq b$?
- **(b)** Hvert er rafsviðið fyrir $r < a$?
- **(c)** Hvert er rafsviðið fyrir $a < r < b$?

(24.55) Eitt af fyrstu atómlíkönum Rutherfords hafði kjarna með hleðslu $+Ze$ í miðjunni (fjöldi róteindanna var þá heiltalan Z) og jafndreifða neikvæða hleðslu $-Ze$ í rúmmáli kúlu með geisla R.

- **(a)** Sýnið að rafsviðið inni í atóminu ($r < R$) er:

$$E = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right).$$

- **(b)** Hvert er gildið á E við yfirborð atómsins?
- **(c)** Úran hefur $Z = 92$ róteindir og geisla $R = 0{,}10\,\text{nm}$. Hver er rafsviðsstyrkurinn inni í Úranatómi í $r = \frac{1}{2}R$ fjarlægð frá kjarnanum?

(24.33) $\Phi_{\text{toppur}} = 190\,\text{Nm}^2/\text{C}$. **(24.43)** $E(r) = \begin{cases} 0 & \text{ef } r < R \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{ef } r \geq R \end{cases}$ **(24.54)** $E(r) = \begin{cases} 0 & \text{ef } r < a \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \frac{r^3 - a^3}{b^3 - a^3} & \text{ef } a \leq r \leq b \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{ef } r < b \end{cases}$ **(24.55)** $E(r) = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right)$, $E(R) = 0$, $E_U(\frac{1}{2}R) = 4{,}6 \cdot 10^{23}\,\text{N/C}$.

Kafli 16

Raforka og rafspenna

Mikilvægustu stærðirnar í eðlisfræði eru svokallaðar varðveittar stærðir: orka, skriðþungi og hverfiþungi. Öflugur skilningur á þessum varðveisluhugmyndum getur oft breytt flóknu dæmi í afar einfalt dæmi! Við rifjum upp að orka er táknuð með E og skilgreind þannig að:

$$E = K + U$$

Þar sem að $K = \frac{1}{2}mv^2$ táknar hreyfiorku kerfisins og U táknar stöðuorku kerfisins. En stöðuorkan U getur verið af margvíslegum toga og tilheyrir *geymnum krafti* (sjá 5. bekkjar námsefnið fyrir nákvæmari skilgreiningu - en í grófum dráttum eru það allir kraftar nema núningur og loftmótsstaða). Við höfðum séð til dæmis að þyngdarkrafturinn, $F_g = -mg$, hafði tilheyrandi stöðuorku:

$$U_g = mgy,$$

þar sem að y var hæð hlutarins yfir jörðu. Við höfðum einnig séð að gormkrafturinn, $F_k = -kx$, hafði tilheyrandi gormstöðuorku:

$$U_k = \frac{1}{2}kx^2$$

þar sem að k var gormstuðull gormsins og x var fjarlægðin frá jafnvægisstöðu gormsins (almennt er sniðugt að skilgreina stöðuorkuna þannig að hún sé núll í kraftajafnvægisstöðu kerfisins). Loks höfðum við séð að fyrir þyngdarlögmálskraftinn, $F_G = -\frac{GMm}{r^2}$, var stöðuorka þyngdarlögmálskraftsins gefin með:

$$U_G = -\frac{GMm}{r}$$

Takið eftir að stöðuorka þyngdarlögmálskraftsins er núll í $r = \infty$ og að hún er alltaf neikvæð! Hingað til höfum við alltaf haft mikið fyrir því að finna stöðuorkuna fyrir krafta. Við notuðumst þá við þá skilgreiningu að stöðuorka kraftsins væri $U = -W$ þar sem að W var heildarvinnan sem að þurfti að flytja hlutinn frá jafnvægisstöðu kraftsins í punktinn sem að við ætluðum að reikna stöðuorkuna í. Það kemur í ljós að það er til einfaldari leið til þess að gera þetta með diffrun! Tökum eftir að:

$$\frac{dU_g}{dy} = \frac{d}{dy}(mgy) = mg = -F_g.$$

Eins fæst að:

$$\frac{dU_k}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = kx = -F_k, \quad \text{og} \quad \frac{dU_G}{dr} = \frac{d}{dr}\left(-\frac{GMm}{r}\right) = -GMm\frac{d}{dr}\left(r^{-1}\right) = \frac{GMm}{r^2} = -F_G.$$

Almennt gildir að $F = -\frac{dU}{dr}$. En ef við margföldum í gegn með dr þá er $U = -\int F dr = -W$.

Lögmál 16.1. Stöðuorka rafkraftsins $F_k = \frac{kQq}{r^2}$ er gefin með:

$$U_e = \frac{kQq}{r},$$

þar sem að viðmiðunarpunktur stöðuorkunnar hefur verið skilgreindur í $r = \infty$.

Útleiðsla: Það er einfalt mál að diffra til þess að staðfesta niðurstöðuna:

$$\frac{dU_e}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{kQq}{r}\right) = kQq\frac{d}{dr}\left(r^{-1}\right) = -\frac{kQq}{r^2} = -F_k$$

□

En það er óþæginlegt að burðast endalaust um með prufuhleðsluna q svo að eins og fyrir rafsviðið þá skilgreinum við:

Skilgreining 16.2. Við skilgreinum **rafspennu** stöðuorkunnar sem stærðina:

$$V = \frac{U_e}{q} = \frac{kQ}{r}.$$

En þar með hljóta að vera einhver tengsl við rafsviðið! Athugum að:

$$F_k = -\frac{dU_e}{dr} \implies E = -\frac{dV}{dr}.$$

Svo rafsviðið er afleiðan af rafspennunni! En fólk vill oftast frekar tala um spennumun á milli tveggja punkta. Þá er því eiginlega sama um rafspennuna sjálfa en langar bara til þess að vita hversu mikla orku þarf til þess að fara á milli tveggja punkta. En við getum fundið hvað það er með því að margfalda báðar hliðar með dr og tegra frá upphafspunkintum $r = a$ í lokapunktinn, $r = b$. Við höfum þá að:

$$E = -\frac{dV}{dr} \implies dV = -Edr \implies \int_{V_a}^{V_b} dV = -\int_a^b Edr$$

Ef rafsviðið E er fast þá höfum við sér í lagi að:

$$\Delta V = -E(b-a).$$

Þetta er oftast ritað þannig að heildarvegalengdin sem að hluturinn ferðast er $d = b - a$ og ef okkur er sama um formerkið á spennumuninum þá getum við skrifað:

$$\Delta V = Ed$$

Þá er sér í lagi stöðuorkubreytingin gefin með:

$$\Delta U = q\Delta V = qEd.$$

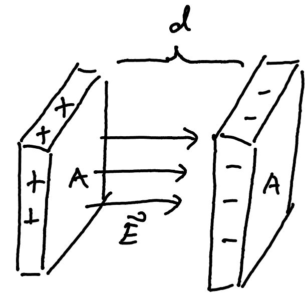
Við höfum því sýnt að:

Lögmál 16.3. Í einsleitu, föstu segulsviði E þá er spennumunurinn á milli tveggja punkta í fjarlægð d frá hvor öðrum gefin með:

$$\Delta V = Ed.$$

Tilheyrandi stöðuorkubreyting er þá $\Delta U = q\Delta V = qEd$.

16.1 Plötuþéttir



Við getum beitt þessum stöðuorku- og spennumunshugmyndum á plötuþéttinn því þar höfum við einsleitt rafsvið. Rifjum upp að við höfðum til dæmis séð að í plötuþétti (sem samanstendur af tveim ferningslaga plötum með flatarmál A og hleðslu $\pm Q$ í fjarlægð d frá hvor annarri). Þá er rafsviðið á milli platnanna:

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}.$$

En þar sem að það er fast þá fáum við að rafspennumunurinn á milli skauta plötuþéttisins er:

$$\Delta V = Ed = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \cdot d = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A}.$$

Það er þá eðlilegt að spurja sig hvort að spennan sé meiri við jákvæða skautið eða við neikvæða skautið. Það er einföld leið til þess að svara því. Maður ímyndar sér að maður sé með jákvæðu prufuhleðsluna, $+q$. Hvert myndi hún vilja fara? Hún leitar frá jákvæðu plötunni og að neikvæðu plötunni. Þar með hefur hún meiri stöðuorku þegar hún er nær jákvæðu plötunni og minni þegar hún er nær neikvæðu plötunni. Þar með er spennan meiri nálægt jákvæðu plötunni og minni nálægt neikvæðu plötunni. Við höfum semsagt sýnt að:

Lögmál 16.4. Lítum á plötuþétti með flatarmál A þar sem að bilið á milli platnanna er d og hleðslan á plötunum er $\pm Q$. Þá er spennumunurinn á milli platnanna gefinn með:

$$\Delta V = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A}.$$

Spennan er meiri við jákvæðu plötuna heldur en þá neikvæðu.

En það er annað sem að fólk hefur áhuga á þegar að það kemur að svona þéttum. Við skilgreinum svokallaða rýmd þéttisins sem að er mælikvarði á það hversu mikla orku þéttirinn getur geymt (við munum sjá síðar í þessum fyrirlestri hvernig það tengist orkubúskap!). Við höfum þá að:

Skilgreining 16.5. Við skilgreinum **rýmd** þéttis með hleðslu $\pm Q$ og spennumun V sem stærðina:

$$C = \frac{Q}{V}.$$

Þetta er reyndar oftast ritað þannig að spennumunurinn er $V = \frac{Q}{C}$. En fyrir plötuþéttinn þá þýðir þetta að:

Lögmál 16.6. Rýmd plötuþéttis sem samanstendur af tveimur plötum með flatarmál A sem eru í fjarlægð d frá hvor anarri og bera hleðslu $\pm Q$, er gefin með:

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}.$$

Útleiðsla: Höfðum séð að spennumunurinn var gefinn með:

$$\Delta V = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A}$$

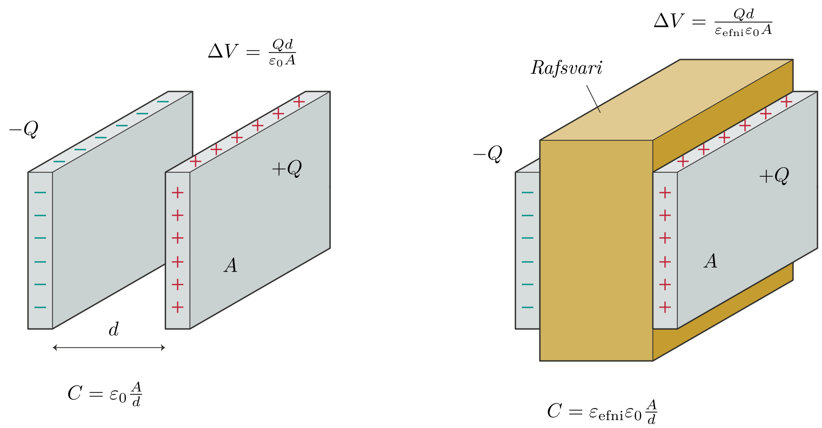
En þar með fáum við samkvæmt skilgreiningunni að:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Qd}{\varepsilon_0 A}} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}.$$

□

16.2 Rafsvarar

Hingað til höfum við (án þess að ykkur hafi verið sagt frá því) verið að vinna í tómarúmi (þar sem að rafsvörunartalan er $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C}^2/(\mathrm{N\,m}^2)$). Hvað gerist hinsvegar þegar að við erum með rafsvið í einhverju öðru efni heldur en tómarúmi? Hvað ef við erum til dæmis með plötuþétti þar sem að er búið að leggja plastdúk inn á milli platnanna? Hvað gerist þá við rafsviðið (og rafspennuna) á milli platnanna?



Það eina sem breytist er að allsstaðar þar sem að við hefðum skrifað ε_0 þá skrifum við $\varepsilon_{\mathrm{efni}}\varepsilon_0$. Talan $\varepsilon_{\mathrm{efni}}$ kallast rafsvörunartala og er háð efninu sem að rafsviðið breiðist út í gegnum. T.d. ef við myndum setja plastdúk inn á milli tveggja platna í plötuþétti þá hefðum við $\varepsilon_{\mathrm{plast}} = 2,3$. Í eftirfarandi töflu sjást nokkrar algengar rafsvörunartölur fyrir mismunandi efni:

Efni	**Rafsvörunartala**
Tómarúm	1
Loft	1,0006
Plast	2,6
Pappír	3,7
Olía	4,0
Gler	4,7
Gúmmí	7,0
Sílíkon	11,68
Vatn	80,2

Við sjáum þá sér í lagi að $\varepsilon_{\mathrm{efni}} \geq 1$ og þar með verður rýmd þéttisins meiri ef að við setjum rafsvara inn á milli platna plötuþéttisins. En þar sem að rafsviðið er þá gefið með:

$$E_{\mathrm{rafsvari}} = \frac{Q}{\varepsilon_{\mathrm{efni}}\varepsilon_0 A} \leq \frac{Q}{\varepsilon_0 A} = E_{\mathrm{tómarúm}}$$

Eins fæst að spennan minnkar: $V_{\mathrm{rafsvari}} \leq V_{\mathrm{tómarúm}}$. Við sjáum semsagt að rafsviðið og þar með spennan ($V = Ed$ því rafsviðið er fast í plötuþéttinum) deyfast ef að við setjum einangrandi efni inn á milli platna plötuþéttisins. Hinsvegar þá stækkar rýmdin. Rýmdin er semsagt í einhverjum skilningi mælikvarði á það hversu erfitt er að búa til rafsvið á milli platnanna.

16.3 Orkuþéttleiki rafsviðsins

Að lokum skulum við fjalla aðeins um það hversu mikil orka er í rafsviðinu. Við skulum ímynda okkur að við séum að búa til plötuþétti. Ímyndum okkur að við séum með tvær plötur sem hafa heildarhleðslu $\pm Q$ og flatarmál A. Hugsum okkur til að byrja með að þær séu þétt upp við hver aðra. Plöturnar finna þá fyrir aðdráttarkrafti frá hvor annarri sem er gefinn með:

$$F = QE = Q \cdot \frac{Q}{2\varepsilon_0 A} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}$$

Tökum eftir að þessi kraftur er fastur óháð fjarlægðinni sem að plöturnar hafa frá hvor anarri. Takið einnig eftir að tvisturinn í nefnaranum kemur til vegna þess að plöturnar finna bara fyrir rafsviðinu frá hinni plötunni, $E_{\text{plata}} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 A}$ en ekki sínu eigin rafsviði. En þar með er vinnan sem að við þurfum að vinna til þess að færa plöturnar í sundur um vegalengd d gefin með:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2.$$

Þar að auki sjáum við að $E_{\text{plötuþéttir}} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$ svo $Q = EA\varepsilon_0$ þannig að:

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \, (Ad)$$

En Ad er rúmmálið sem að rafsviðið tekur. Við getum því sagt að orkuþéttleiki rafsviðsins sé gefinn með:

$$u_{\scriptscriptstyle E} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2.$$

Við álytkum semsagt að:

Lögmál 16.7. Orkan, U_C, sem að plötuþéttir með rýmd C og hleðslu Q geymir er gefin með:

$$U_C = \frac{Q^2}{2C}.$$

Skilgreining 16.8. Orkuþéttleiki rafsviðsins er gefinn með:

$$u_{\scriptscriptstyle E} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2.$$

Athugum þá sér í lagi að eining er: $[u_{\scriptscriptstyle E}] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}$.

16.4 Klassískur geisli rafeindarinnar (*)

En þá höfum við einfalda leið til þess að finna geisla róteindarinnar. Látum róteindina hafa geisla r_p. Þá höfum við að heildarorka hennar, U, vegna rafsviðsins er gefin með:

$$U = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \cdot \frac{4\pi}{3} r_p^3$$

En samkvæmt lögmáli Gauss getum við fundið rafsviðið með:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{e}{\epsilon_0} \implies E = \frac{e}{\epsilon_0 4\pi r_p^2}$$

sem gefur okkur því að:

$$U = \frac{1}{2}\epsilon_0 \cdot \frac{e^2}{\epsilon_0^2 16\pi^2 r_p^4} \cdot \frac{4\pi}{3} r_p^3 \implies r_p = \frac{ke^2}{6U}$$

En samkvæmt Einstein er $U = m_p c^2$ svo við fáum:

$$r_p = \frac{ke^2}{6m_p c^2} \approx 2{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{m}$$

Eins getum við sýnt að geisli rafeindar er gefinn með:

$$r_e = \frac{ke^2}{6m_e c^2} \approx 0{,}47 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$$

16.5 Dæmi

Dæmatími 8: Rafstöðuorka

Rafstöðuorkan er $U = qV$ þar sem q er hleðslan og V er rafspennan.

(25.12) Hver er hraði rafeindar sem hefur verið hraðað yfir $\Delta V = 1000\,\mathrm{V}$ spennumun?

(25.13) Hversu mikinn spennumun, ΔV, þarf til þess að hraða rafeind úr $v_0 = 0\,\mathrm{m/s}$ í $v = 2{,}0 \cdot 10^6\,\mathrm{m/s}$?

(25.16) Rafeind með upphafshraða $v_0 = 5{,}0 \cdot 10^5\,\mathrm{m/s}$ stöðvast við það að ferðast í gegnum einsleitt rafsvið í plötuþétti.

- **(a)** Ferðaðist rafeindin í áttina að hærri eða lægri spennu?
- **(b)** Hver er spennumunurinn á milli upphafsstaðsetningu rafeindarinnar og lokastaðsetningu hennar?

(25.20) Eðlisfræðingar nota oft eininguna eV (electron-volt) þegar þeir glíma við orku kjarneinda. Einingin er skilgreind þannig að 1 eV jafngildir orkunni sem þarf til þess að hraða rafeind yfir spennumun $\Delta V = 1\,\mathrm{V}$.

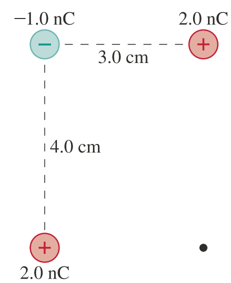
- **(a)** Hvað samsvarar 1 eV mörgum Joulum?
- **(b)** Hver er hraði róteindar sem hefur hreyfiorku $K = 5000\,\mathrm{eV}$?

(25.12) $v = 1{,}9 \cdot 10^7\,\mathrm{m/s}$. **(25.13)** $V = 11{,}4\,\mathrm{V}$. **(25.16)** $\Delta V = -0{,}71\,\mathrm{V}$. **(25.20)** $1\,\mathrm{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$, $v = 4{,}2 \cdot 10^7\,\mathrm{m/s}$.

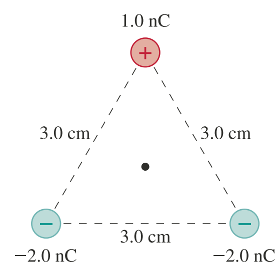
Dæmatími 9: Rafspenna

Rafspenna punkthleðslu, Q, er gefin með: $V = \frac{U}{q} = \frac{kQ}{r}$. Til samanburðar er rafsvið punkthleðslu gefið með $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$.

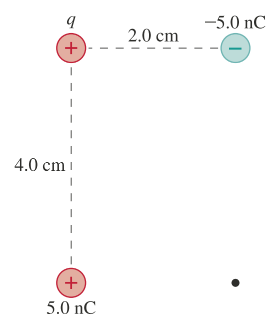
(25.30) Hver er rafspennan í svarta punktinum á myndinni hér fyrir neðan?



(25.31) Hver er rafspennan í svarta punktinum á myndinni hér fyrir neðan?



(25.32) Rafspennan í svarta punktinum á myndinni hér fyrir neðan er 3140 V. Hvert er gildið á hleðslunni, q?



(25.33) Tvær hleðslur, $\pm q = \pm 2{,}0\,\mathrm{nC}$ eru staddar í $x = \pm 1{,}0\,\mathrm{cm}$.

(a) Hvar (ef einhversstaðar) á x-ásnum er rafsviðið núll?

(b) Hvar (ef einhversstaðar) á x-ásnum er rafspennan núll?

(c) Teiknið graf sem sýnir E sem fall af x og graf sem sýnir V sem fall af x.

(25.30) $V_D = 870\,\mathrm{V}$. **(25.31)** $V_D = -1560\,\mathrm{V}$. **(25.32)** $q = 10\,\mathrm{nC}$. **(25.33)** Sjá gröf í lausnum.

Dæmatími 10: Þéttar

Rafsviðið í þétti er gefið með: $E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$. Þar sem að rafsviðið er einsleitt þá verður rafspennan: $V = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A}$ í plötuþéttinum. Við skilgreinum þá yfirleitt rafspennuna þannig að hún sé núll við neikvæðu plötuna og $V = qEx$ þar sem x er fjarlægðin frá neikvæðu plötunni. Spennumunurinn yfir plötuþéttinn er þá $\Delta V = qEd$ þar sem d er plötubilið.

(25.22) **(a)** Hver er spennan á AA og AAA rafhlöðum?

(b) Tengjum AA rafhlöðu við plötuþéttir sem hefur hliðarlengdir $\ell = 4{,}0\,\mathrm{cm}$ og plötubil $d = 1{,}0\,\mathrm{mm}$. Hversu mikla hleðslu fær þá hvor plata um sig frá rafhlöðunni?

(25.23) Plötuþéttir með geisla $r = 1{,}5\,\mathrm{cm}$ hefur plötubil $d = 2{,}0\,\mathrm{mm}$. Rafsviðið í þéttinum er $E = 1{,}0 \cdot 10^5\ \mathrm{V/m}$.

(a) Hver er spennumunurinn á milli platnanna?

(b) Hver er hleðslan á plötunum?

(25.25) Tvær plötur með geisla $r = 1{,}0\,\mathrm{cm}$ eru í fjarlægð $d = 2{,}0\,\mathrm{mm}$ frá hvor annarri. Rafsviðið á milli þeirra er $E = 5{,}0 \cdot 10^5\ \mathrm{V/m}$.

(a) Hver er spennan yfir þéttinn?

(b) Rafeind er skotið frá neikvæðri plötunni með upphafshraða v_0. Hún lendir á jákvæðu plötunni með hraða $v = 2{,}0 \cdot 10^7\ \mathrm{m/s}$. Hver var upphafshraði rafeindarinnar?

(25.26) Róteind er skotið frá miðjunni á plötuþétti í áttina að jákvæðu plötunni með upphafshraða $v_0 = 2{,}0 \cdot 10^5\ \mathrm{m/s}$. Spennumunurinn á milli platnanna er $\Delta V = 500\,\mathrm{V}$.

(a) Sýnið að upphafshraði róteindarinnar er ekki nægilegur til þess að róteindin nái að snerta jákvæðu plötuna.

(b) Hver verður hraði róteindarinnar þegar hún snertir jákvæðu plötuna?

(25.22) $V = 1{,}5\,\mathrm{V}$, $Q = 21\,\mu\mathrm{C}$. **(25.23)** $V = 200\,\mathrm{V}$, $Q = 0{,}63\,\mathrm{nC}$. **(25.25)** $\Delta V = 1000\,\mathrm{V}$, $v_0 = 6{,}95 \cdot 10^6\ \mathrm{m/s}$. **(25.26)** $v_1 = 2{,}97 \cdot 10^5\ \mathrm{m/s}$.

Dæmatími 11: Rýmd þéttis og rafsvarar

Rýmd er skilgreind sem stærðin $C = \frac{Q}{V}$. Fyrir plötuþétti þýðir þetta að í tómarúmi gildir að: $C_{\text{plötuþéttir}} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$. Hinsvegar ef að við setjum eitthvað efni inn á milli platnanna þá deyfist rafsviðið. Við segjum þá að efnið hafi einhvern rafsvörunarstuðul, $\varepsilon_{\text{efni}}$ og rýmd plötuþéttis með rafsvara er þá gefin með: $C_{\text{plötuþéttir}} = \varepsilon_{\text{efni}} \varepsilon_0 \frac{A}{d}$.

(26.21) Tvær hringlaga álplötur með geisla $r = 2{,}5\,\text{cm}$ eru í fjarlægð $d = 1\,\text{mm}$ frá hvor annarri. Rafhlaða sem er tengd við báðar hliðar þéttisins býr til spennumun $\Delta V = 90\,\text{V}$ á milli platnanna.

- **(a)** Hver er rýmd þéttisins?
- **(b)** Hver er hleðslan á plötunum?

(26.23) Við ætlum að smíða plötuþétti með rýmd $C = 100\,\text{pF}$. Við ætlum að nota plötur með hliðarlengdir ℓ og ætlum að setja litlar plastþynnur í hornin á plötunum til þess að búa til plötubilið. Plastþynnurnar hafa þykkt þ $= 0{,}20\,\text{mm}$. Hvernig eigum við að velja ℓ?

(26.35) Tvær plötur með hliðarlengdir $\ell = 4{,}0\,\text{cm}$ hafa verið aðskildar með plötubili $d = 0{,}20\,\text{mm}$ með því að setja Teflon-dúk inn á milli platnanna. Rafsvörunarstuðull teflons er $\varepsilon_{\text{teflon}} = 2{,}1$ og mesta rafsviðið sem er hægt að ná inni í tefloni er $E_{\text{max,teflon}} = 6{,}0 \cdot 10^6\,\text{V/m}$.

- **(a)** Hver er rýmd þéttisins?
- **(b)** Hver er mesti hugsanlegi spennumunurinn á milli platnanna?

(26.36) Tvær plötur með hliðarlengdir $\ell = 5{,}0\,\text{mm}$ hafa verið aðskildar með plötubili $d = 0{,}10\,\text{mm}$ frá hvor annarri. Plötuþéttirinn er tengdur við $9{,}0\,\text{V}$ rafhlöðu. Síðan er $0{,}10\,\text{mm}$ þykku lagi af Mylar ($\varepsilon_{\text{Mylar}} = 3{,}1$) komið fyrir á milli platnanna (án þess að aftengja rafhlöðuna). Hver verður spennumunurinn, rafsviðið og hleðslan á þéttinum **(a)** áður en Mylar-lagið er sett inn á milli platnanna **(b)** eftir að Mylar lagið er sett inn á milli platnanna.

(26.21) $C = 17{,}4\,\text{pF}$, $Q = 1{,}57\,\text{nC}$. **(26.23)** $\ell = 4{,}75\,\text{cm}$. **(26.35)** $C = 149\,\text{pF}$, $V = 12.000\,\text{V}$.

(26.36) $V_0 = 9{,}0\,\text{V}$, $Q_0 = 19{,}8\,\text{pC}$, $E_0 = 90\,\text{kN/C}$, $V_M = 9{,}0\,\text{V}$, $Q_M = 61{,}2\,\text{pC}$, $E_M = 29\,\text{kN/C}$.

Dæmatími 12: Orkan í þétti

Krafturinn sem að önnur plata plötuþéttisins togar í hina með er gefinn með $F = QE = Q \cdot \frac{Q}{2\varepsilon_0 A}$. En þá er vinnan sem að þarf til þess að búa til plötuþétti gefin með:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A} \cdot d = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$$

Rúmmál þéttisins er Ad svo að orkuþéttleiki rafsviðsins (orka á rúmmálseiningu, J/m^3) verður:

$$u_{\scriptscriptstyle E} = \frac{W}{Ad} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A^2} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{Q}{\varepsilon_0 A}\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

(26.31) Við viljum að plötuþéttir nokkur með rýmd $C = 1{,}0\,\mu$F geymi 1,0 J af orku. Hver ætti spennumunurinn að vera á milli platna plötuþéttisins?

(26.33) Plötuþéttir með geisla $r = 1{,}0$ cm og plötubil $d = 0{,}50$ mm hefur spennumun 200 V. **(a)** Hver er heildarorka þéttisins? **(b)** Hver er orkuþéttleiki rafsviðsins?

(26.64) Þéttir með rýmd $C_1 = 5{,}0\,\mu$F heldur $Q = 4{,}0$ mC af hleðslu. Utanaðkomandi kraftur breytir fjarlægðinni á milli platnanna (án þess að breyta hleðslunni) þar til að rýmd þéttisins er $C_2 = 2{,}0\,\mu$F. Hversu mikla vinnu vann krafturinn á þéttinum?

(26.67) Flassljósið í stafrænum myndavélum notar 3,0 V rafhlöðu til þess að hlaða þéti. Þéttirinn er síðan afhlaðinn þegar við tökum myndina. Afhleðslan tekur 10 μs og meðalafl ljósaperunnar er 10 W. Hver er rýmd þéttisins?

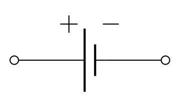
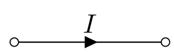
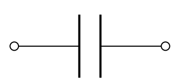
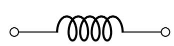
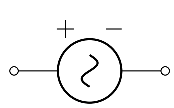
(26.31) $V = 1400$ V. **(26.33)** $U = 1{,}11 \cdot 10^{-7}$ J, $u_{\scriptscriptstyle E} = 0{,}71$ J/m^3. **(26.64)** $W = 2{,}4$ J.

(26.67) $C = 22\,\mu$F.

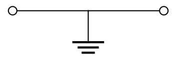
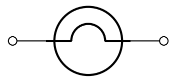
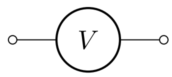
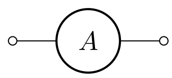
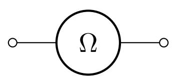
Kafli 17

Inngangur að rafrásum

17.1 Íhlutir í rafrásir

Mynd	Lýsing	Tákn
	Rafhlaða	V
	Rafstraumur	I
	Viðnám	R
	Þéttir	C
	Spóla	L
	Riðspennugjafi	$\mathcal{E}(t)$

Tafla 17.1: Íhlutir í rafrásum sem hafa algebrulegar stærðir.

Mynd	Lýsing
	Jarðtenging
	Rofi
	Ljósapera
	Spennumælir
	Straummælir
	Viðnámsmælir

Tafla 17.2: Aðrir algengir íhlutir í rafrásir.

17.2 Lögmál Kirchoffs

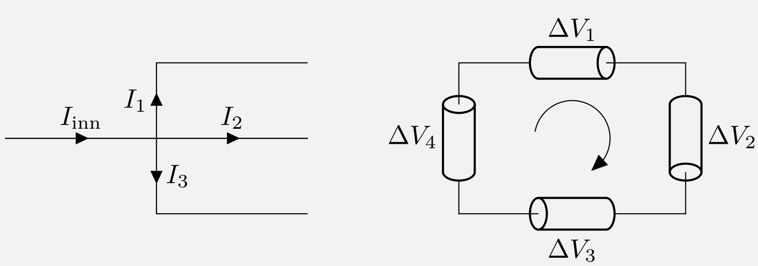
Lögmál 17.1. Við höfum eftirfarandi tvö lögmál fyrir rafrásir:

(i) **(Gatnamótalögmál Kirchoffs)** Rafstraumsflæðið er varðveitt. Það er að segja við höfum í sérhverjum punkti að:

$$I_{\text{inn}} = I_{\text{út}}$$

(ii) **(Lykkjulögmál Kirchoffs)** Sspennufallið í gegnum lykkju í rafrás er núll. Þ.e.a.s.

$$\Delta V_{\text{lykkja}} = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \ldots + \Delta V_n = 0$$



Útleiðsla: Gatnamótalögmálið er afleiðing af því að rafflæði er varðveitt (samanber vatnsflæði í vatnspípum). Lykkjulögmálið er afleiðing af því að spennan í tilteknum punkt er föst í rásinni og þar með þarf spennan að vera sú sama þegar við komum aftur í punktinn svo við höfum að ef V er spennan í þessum ákveðna punkti þá er spennan þegar við komum aftur í þennan punkt að lokinni lykkjunni gefinn með:

$$V + \Delta V_1 + \Delta V_2 + \ldots + \Delta V_n = V \implies \Delta V_{\text{lykkja}} = 0.$$

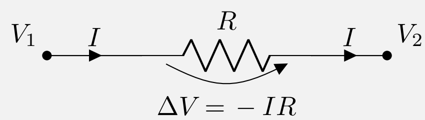
17.3 Spennufall

Lögmál 17.2. Lítum á rás þar sem að spennan er gefin með V_1 öðrum meginn við viðnám R. Látum rafstraumin sem flæðir í gegnum viðnámið vera I. Spennan hinum meginn við viðnámið er þá:

$$V_2 = V_1 - IR.$$

Þetta er oft umorðað þannig að **spennufallið** við það að fara í gegnum viðnám í rás er gefið með:

$$V_R = IR$$

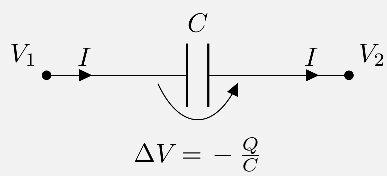


Lögmál 17.3. Lítum á rás þar sem að spennan er gefin með V_1 öðrum meginn við þétti með rýmd C og hleðslu Q. Spennan hinum meginn við þéttinn er þá:

$$V_2 = V_1 - \frac{Q}{C}.$$

Spennufallið við það að fara yfir þétti með rýmd C og hleðslu Q í rás er þá:

$$V_C = \frac{Q}{C}$$

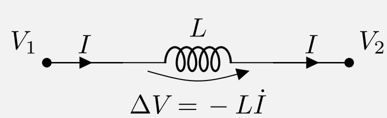


Lögmál 17.4. Lítum á rás þar sem að spennan er gefin með V_1 öðrum meginn við spólu með spanstuðul L. Látum $I(t)$ vera strauminn í spólunni sem fall af tíma, t. Spennan hinum meginn við spóluna er þá:

$$V_2 = V_1 - L\dot{I} = V_1 - \frac{dI}{dt}.$$

Spennufallið við það að fara yfir spólu með spanstuðul L og rafstraum $I(t)$ í rás er þá:

$$V_L = L\dot{I} = L\frac{dI}{dt}$$



Lögmál 17.5. Lítum á tiltekinn punkt í rafrás þar sem að spennan er V og straumurinn sem flæðir inn í punktinn er gefinn með I. Þá er rafaflið, P, í þessum tiltekna punkti rafrásarinnar gefið með:

$$P = IV$$

Útleiðsla: Við fáum að:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta(qV)}{\Delta t} = \frac{\Delta q}{\Delta t} \cdot V = IV.$$

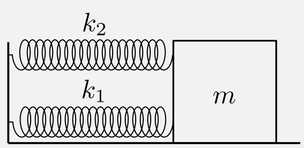
17.4 Raðtenging og hliðtenging

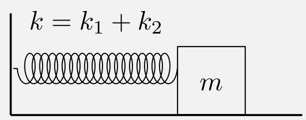
Raðtengingar og hliðtengingar eru öflug tól sem við getum notað til þess að einfalda rásir.

Gormar

Lögmál 17.6. (Hliðtenging gorma) Þegar að við hliðtengjum gorma með gormstuðla $k_1, k_2, \ldots, k_n$ þá hegðar kerfið sér eins og einn gormur með gormstuðul

$$k_{\text{heild}} = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$$





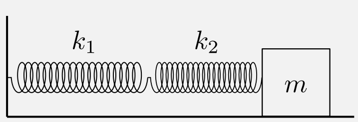
Útleiðsla: Við höfum þá að kraftajafnan er gefin með:

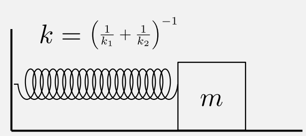
$$ma = -k_1x - k_2x = -(k_1 + k_2)x = -kx$$

Svo við sjáum að kerfið hegðar sér eins og gormur með gormstuðul $k = k_1 + k_2$. □

Lögmál 17.7. (Raðtenging gorma) Þegar við raðtengjum gorma með gormstuðla $k_1, k_2, \ldots, k_n$ þá hegðar kerfið sér eins og einn gormur með gormstuðul k_{heild} þar sem:

$$\frac{1}{k_{\text{heild}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \ldots + \frac{1}{k_n}.$$





Útleiðsla: Látum x_1 vera strekkinguna á fyrri gorminum og x_2 vera strekkinguna á seinni gorminum. Þá er $x = x_1 + x_2$ heildarstrekkking kerfisins frá jafnvægisstöðu. Á massann m verkar eininungis gormkraftur frá seinni gorminum svo:

$$ma = -k_2x_2$$

En við vitum þar að auki að $k_1x_1 = k_2x_2$ því togkrafturinn í seinni gorminum hlítur að vera núll því gormurinn er massalaus og einu kraftarnir sem verka á gorminn eru k_1x_1 og k_2x_2. En þá er:

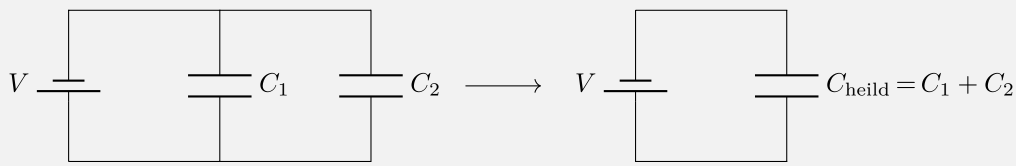
$$ma = -kx = -k(x_1 + x_2) = -k\left(-\frac{ma}{k_1} - \frac{ma}{k_2}\right) = k\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)ma \implies \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}.$$

□

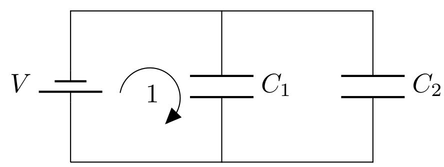
Þéttar

Lögmál 17.8. (Hliðtenging þétta) Þegar að við hliðtengjum þétta með rýmd $C_1, C_2, \ldots, C_n$, þá hegðar kerfið sér eins og kerfi með einu jafngildum þétti með rýmd

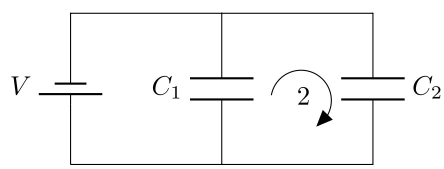
$$C_{\text{heild}} = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$$



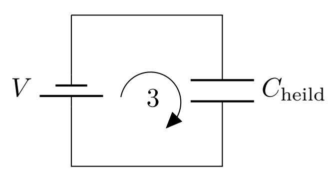
Útleiðsla: Samkvæmt lykkjulögmáli Kirchoffs þá þarf spennufallið yfir sérhverja lokaða rás í rásinni að vera núll. Við skoðum því fyrst eftirfarandi lykkju:



En þar með sjáum við að $V - \frac{Q_1}{C_1} = 0$ svo $V = \frac{Q_1}{C_1}$. Athugum síðan að ef við skoðum eftirfarandi lykkju:



Þá höfum við að $\frac{Q_2}{C_2} - \frac{Q_1}{C_1} = 0$ svo $\frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_1}{C_1} = V$. Loks skulum við skoða jafngildu rásina:



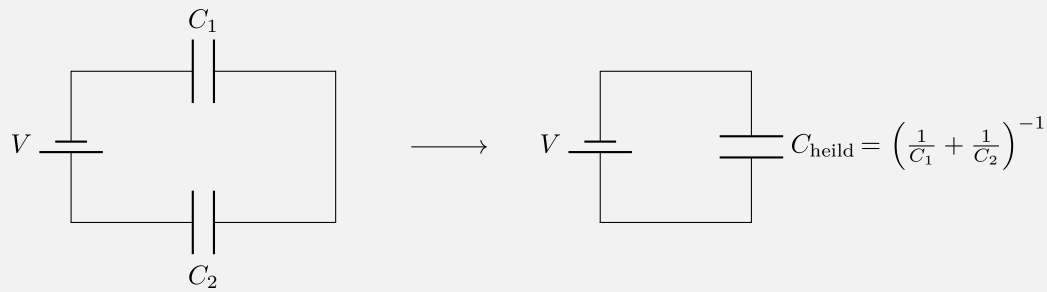
En þá höfum við samkvæmt lykkjulögmáli Kirchoffs að $V - \frac{Q_{\text{heild}}}{C_{\text{heild}}} = 0$ svo

$$C_{\text{heild}} = \frac{Q_{\text{heild}}}{V} = \frac{Q_1 + Q_2}{V} = \frac{C_1 V + C_2 V}{V} = C_1 + C_2.$$

$\square$

Lögmál 17.9. (Raðtenging þétta) Þegar að við raðtengjum þétta með rýmd $C_1, C_2, \ldots, C_n$, þá hegðar kerfið sér eins og kerfi með einu jafngildum þétti með rýmd, C_{heild}, þar sem:

$$\frac{1}{C_{\text{heild}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}.$$



Útleiðsla: Samkvæmt lykkjulögmáli Kirchoffs er:

$$V - \frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q_2}{C_2} = 0$$

Ásamt

$$V - \frac{Q_{\text{heild}}}{C_{\text{heild}}} = 0.$$

En þar sem að rásin er hliðtengd þá er $Q_{\text{heild}} = Q_1 = Q_2$ svo við ályktum að:

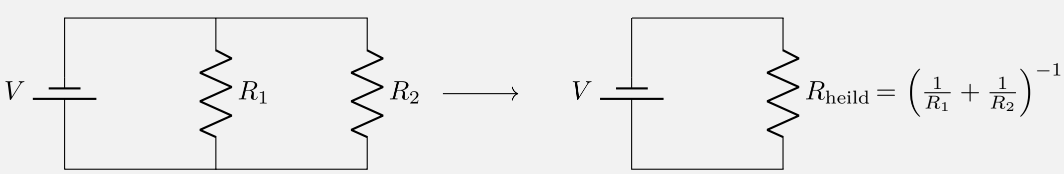
$$\frac{1}{C_{\text{heild}}} = \frac{V}{Q_{\text{heild}}} = \frac{\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2}}{Q_{\text{heild}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

□

Viðnám

Lögmál 17.10. (Hliðtenging viðnáma) Þegar að við hliðtengjum viðnám $R_1, R_2, \ldots, R_n$, þá hegðar kerfið sér eins og kerfi með einu jafngildu viðnámi, R_{heild}, þar sem:

$$\frac{1}{R_{\text{heild}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}.$$



Útleiðsla: Með því að skoða lykkjurnar þá fáum við að:

$$V = R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_{\text{heild}} I_{\text{heild}}$$

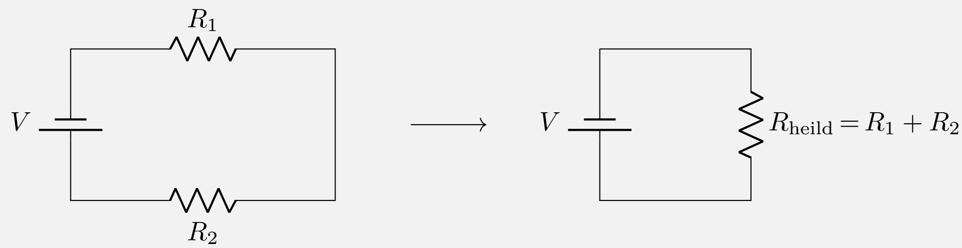
Þar að auki sjáum við ef við notum gatnamótalögmál Kirchoffs að $I = I_1 + I_2$. En þar með er:

$$\frac{1}{R_{\text{heild}}} = \frac{I_{\text{heild}}}{V} = \frac{I_1 + I_2}{V} = \frac{\frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2}}{V} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

□

Lögmál 17.11. (Raðtenging viðnáma) Þegar við raðtengjum viðnám, $R_1, R_2, \ldots, R_n$, þá heðgar kerfið sér eins og kerfi með einu jafngildu viðnámi

$$R_{\text{heild}} = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$$



Útleiðsla: Við höfum þá samkvæmt lykkjulögmáli Kirchoffs að:

$$V - IR_1 - IR_2 = 0$$

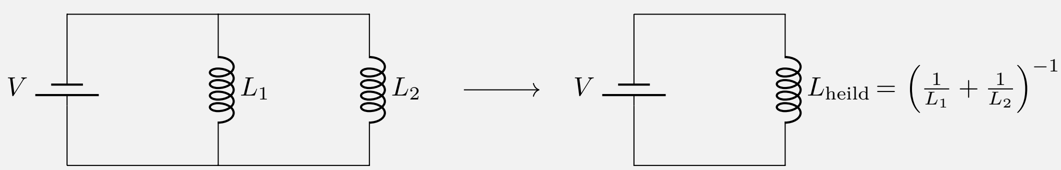
En í jafngildu rásinni væri $V = IR_{\text{heild}}$ svo við ályktum að $R_{\text{heild}} = R_1 + R_2$.

□

Spólur

Lögmál 17.12. (Hliðtenging spóla) Þegar við hliðtengjum spólur með spanstuðla, $L_1, L_2, \ldots, L_n$, þá heðgar kerfið sér eins og kerfi með einni jafngildri spólu með spanstuðul L_{heild} þar sem

$$\frac{1}{L_{\text{heild}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots + \frac{1}{L_n}.$$



Útleiðsla: Samkvæmt lykkjulögmáli Kirchoffs þá er:

$$V - L_1\dot{I}_1 = 0, \quad V - L_2\dot{I}_2 = 0, \quad V - L_{\text{heild}}\dot{I} = 0.$$

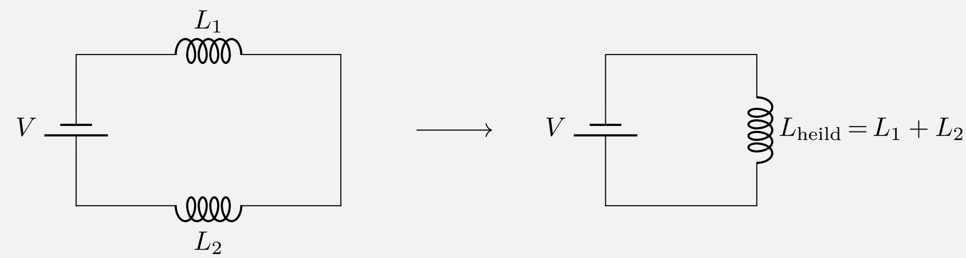
Þar sem að heildarstraumurinn sem að flæðir í rásinni er $I = I_1 + I_2$ þá er $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$ með því að diffra. Við ályktum því að:

$$\frac{1}{L_{\text{heild}}} = \frac{\dot{I}}{V} = \frac{\dot{I}_1 + \dot{I}_2}{V} = \frac{\frac{V}{L_1} + \frac{V}{L_2}}{V} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}.$$

□

Lögmál 17.13. (Raðtenging spóla) Þegar við raðtengjum spólur með spanstuðla, $L_1, L_2, \ldots, L_n$, þá hegðar kerfið sér eins og kerfi með einni jafngildri spólu með spanstuðul

$$L_{\text{heild}} = L_1 + L_2 + \ldots + L_n$$



Útleiðsla: Við höfum samkvæmt lykkjulögmálinu að:

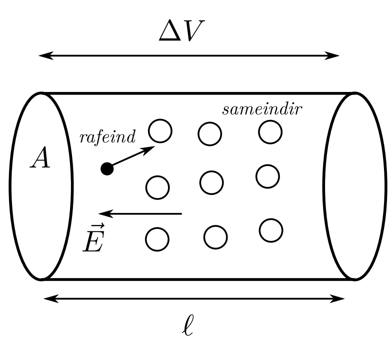
$$V - L_1\dot{I} - L_2\dot{I} = 0 = V - L_{\text{heild}}\dot{I} \implies L_{\text{heild}} = L_1 + L_2.$$

□

17.5 Drude-líkanið (*)

Í þessum viðauka munum við reyna að útskýra einfalt líkan fyrir rafstraum. Það er nefnilega svolítið skrítið að við gerum ráð fyrir að rafstraumurinn sé fastur í rásinni þ.e.a.s. að rafeindirnar ferðist með jöfnum hraða í gegnum rafrásina. Því ef við rifjum upp tengslin milli rafspennu og rafsviðs, $\Delta V = Ed$ þá sjáum við að rafeindirnar ættu að finna fyrir rafsviði, E, og þar með rafkrafti $F_E = eE$, en þar með myndu þær hafa fasta hröðun, $a = \frac{eE}{m}$, í rásinni og rafstraumurinn ætti að aukast eftir því sem að rafeindirnar ferðast lengra í rásinni. Við munum nú reyna að útskýra hvers vegna rafeindirnar ferðast með jöfnum hraða í rásinni. Hliðstæðu er að finna í loftmótsstöðu og lokahraðanum sem að hlutir ná í frjálsu falli með loftmótsstöðu.

Við skoðum vírbút af lengd ℓ með þverskurðarflatarmál A sem að samanstendur af efni með heildarmassa M og mólmassa μ. Látum spennumuninn á milli enda vírbútsins vera ΔV og þar með er rafsviðið í vírbútnum gefið með $E = \frac{\Delta V}{\ell}$.



Við lítum á sem svo að rafeindirnar séu á hreyfingu en að sameindirnar séu kyrrstæðar og að rafeindirnar skoppi á milli sameindanna og lendi í árekstrum við þær. Vegna rafsviðsins finna rafeindirnar fyrir krafti $F_E = eE$ en í árekstrunum við sameindirnar þá finna þær fyrir einhversskonar loftmótsstöðu:

$$F_{\text{árekstur}} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

þar sem að Δp er skriðþungabreytingin á tímanum Δt. Látum τ tákna meðaltímann sem líður á milli árekstra rafeindanna við sameindirnar (við munum síðar sýna hvernig er hægt að ákvarða τ). Þegar að rafeindirnar skoppa af sameindunum með hraða v þá geta þær fengið hvaða hraða sem er á bilinu $[-v, v]$ svo að meðaltali er hraði rafeindanna eftir áreksturinn 0 (sumar hafa þá neikvæðan hraða en aðrar jákvæðan en að meðaltali hafa þær engan hraða eftir áreksturinn). En það þýðir að skriðþungabreytingin á milli árekstra verður að meðaltali:

$$F_{\text{árekstur}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{mv - m \cdot 0}{\tau} = \frac{mv}{\tau}$$

En þar með verður heildarkraftajafnan:

$$ma = eE - \frac{mv}{\tau}$$

Í kraftajafnvægi er $a = 0$ og þá ferðast rafeindirnar þess vegna með föstum hraða sem kallast rekhraði:

$$0 = ma = eE - \frac{mv}{\tau} \implies v_d = \frac{eE}{m}\tau.$$

Látum nú f_e tákna heildarfjölda rafeinda á rúmmálseiningu. Þá verður rafstraumurinn:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{e \cdot f_e \cdot A v_d \tau}{\tau} = e f_e A v_d = \frac{e^2 f_e \tau}{m} AE.$$

Við skilgreinum þá eðlisviðnám sem stærðina:

$$\rho = \frac{m}{e^2 f_e \tau}$$

Þá höfum við sýnt að:

$$I = \frac{A}{\rho} E$$

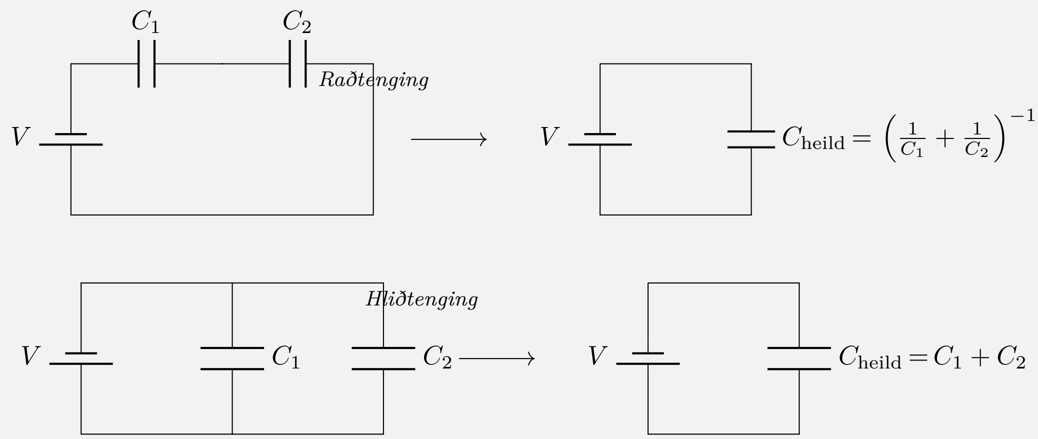
Viðnámið var síðan skilgreint sem stærðin $R = \frac{\rho L}{A}$ svo að við höfum hér sýnt að:

$$I = \frac{A}{\rho} E = \frac{E\ell}{R}$$

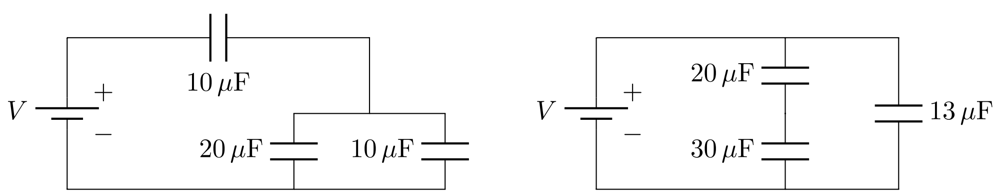
En $E\ell = \Delta V$ svo við ályktum að $\Delta V = E\ell = IR$. Þar með höfum við leitt út lögmál Ohms.

17.6 Dæmi

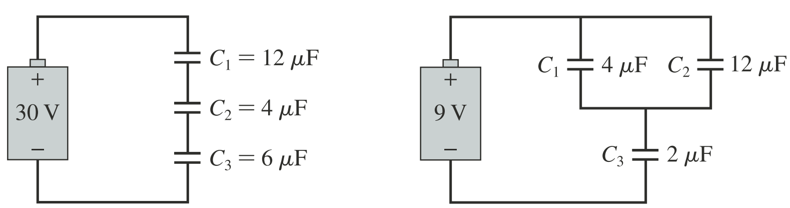
Dæmatími 13: Jafngildir þéttar



(26.27 og 26.28) Einfaldið eftirfarandi rásir og ákvarðið heildarrýmdir þeirra:



(26.56 og 26.57) Ákvarðið hleðsluna og spennufallið yfir hvern þétti í rásunum hér fyrir neðan:

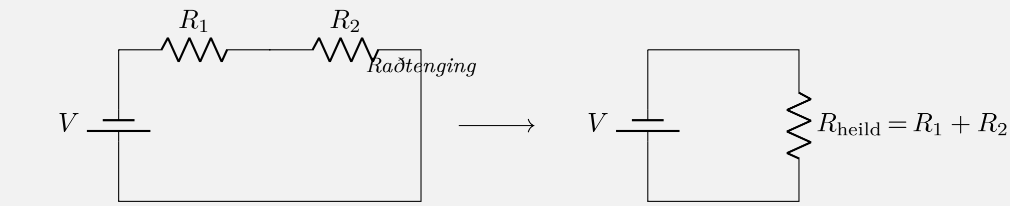


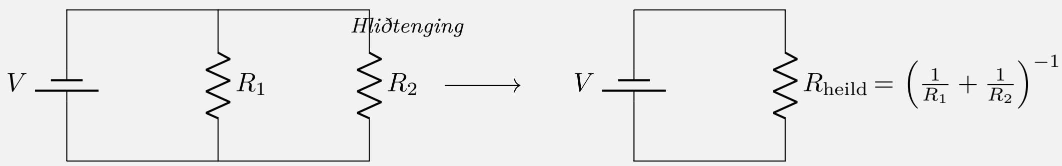
(26.27) $C_{\text{heild}} = 7{,}5\,\mu\text{F}$. **(26.28)** $C_{\text{heild}} = 25\,\mu\text{F}$.

(26.56) $Q = 60\,\mu\text{C}, \Delta V_1 = 5\,\text{V}, \Delta V_2 = 15\,\text{V}, \Delta V_3 = 10\,\text{V}$.

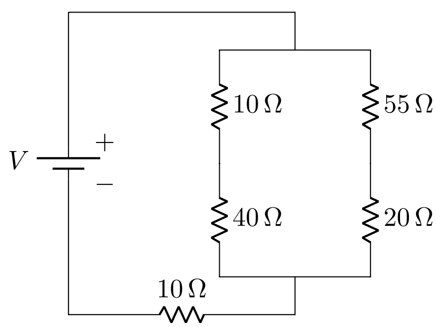
(26.57) $Q = 16\,\mu\text{C}, Q_1 = 4\,\mu\text{C}, Q_2 = 12\,\mu\text{C}, Q_3 = 16\,\mu\text{C}$.

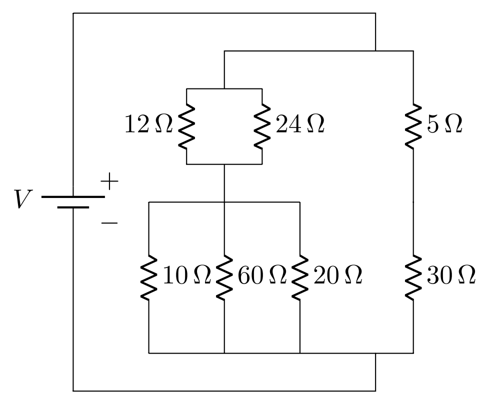
Dæmatími 14: Jafngild viðnám



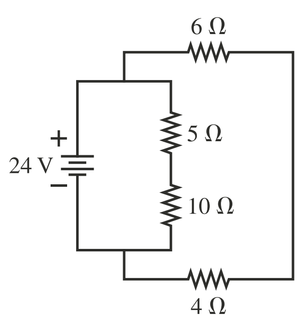


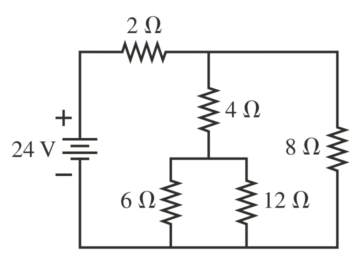
(28.25 og 28.26) Einfaldið eftirfarandi rásir og ákvarðið heildarviðnám þeirra:





(28.58 og 28.59) Ákvarðið rafstrauminn og spennufallið yfir hvert viðnám í rásunum hér fyrir neðan:





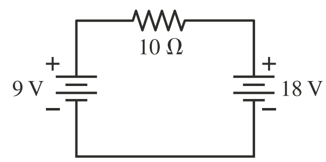
(28.25) $R_{\text{heild}} = 40\,\Omega$. **(28.26)** $R_{\text{heild}} = 10\,\Omega$. **(28.58)** $I = 4{,}0\,\text{A}, I_1 = 2{,}4\,\text{A}, I_2 = 1{,}6\,\text{A}$.
(28.59) $I = 4{,}0\,\text{A}, I_1 = I_2 = 2{,}0\,\text{A}, I_3 = 1{,}33\,\text{A}, I_4 = 0{,}67\,\text{A}$.

Dæmatími 15: Lögmál Kirchoffs

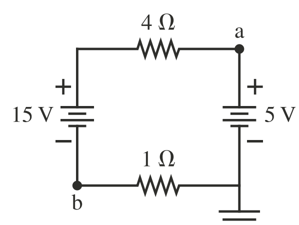
Lykkjulögmál Kirchoffs segir að heildarspennufallið við það að fara hring í rafrás er núll. Með öðrum orðum: $\Delta V_{\text{heild}} = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \ldots + \Delta V_n = 0$. Gatnamótalögmál Kirchoffs segir að ef að I_{inn} er heildarrafstraumurinn sem flæðir inn í punkt og $I_{\text{út}}$ er heildarrafstraumurinn sem flæðir út úr sama punkti þá er $I_{\text{inn}} = I_{\text{út}}$. Spennuföllin eru:

$$\Delta V_R = IR, \qquad \Delta V_C = \frac{Q}{C}, \qquad \Delta V_L = L\dot{I} = L\frac{dI}{dt}.$$

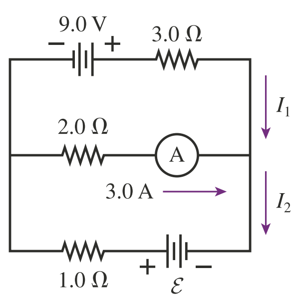
(28.4) Hver er stærð og stefna straumsins sem fer í gegnum $10\,\Omega$ viðnámið á myndinni hér fyrir neðan?



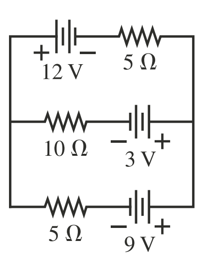
(28.31) Hver er spennumunurinn, $\Delta V = V_b - V_a$ milli punktanna a og b á myndinni hér fyrir neðan?



(28.52) Straummælirinn á myndinni hér fyrir neðan sýnir 3,0 A. Ákvarðið $\mathcal{E}, I_1$ og I_2.



(28.63) Hver er stærð og stefna straumsins sem fer í gegnum $10\,\Omega$ viðnámið á myndinni hér fyrir neðan?



(28.4) $I = 0{,}9\,\text{A}$. **(28.31)** $\Delta V = -7{,}0\,\text{V}$. **(28.52)** $\mathcal{E} = 12\,\text{V}, I_1 = 3{,}0\,\text{A}$. **(28.63)** $I = 0{,}45\,\text{A}$.

Dæmatími 16: Afl í rafrásum

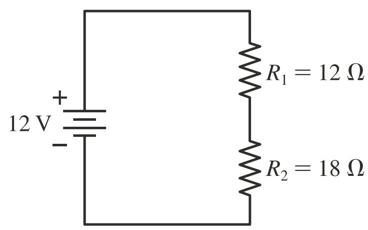
Varmaaflið/rafaflið sem tapast í rafrásum er gefið með:

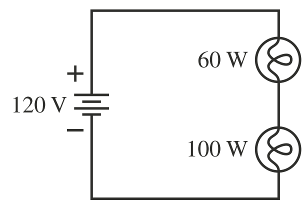
$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{d\,(qV)}{dt} = \frac{dq}{dt}V = IV.$$

Þar sem V táknar spennufallið yfir tiltekinn íhlut og I táknar rafstrauminn í gegnum íhlutinn.

(28.7) Í hefðbundnum innstungum hér á landi notum við 220 V riðspennu sem sveiflast með 50 Hz tíðni. Dyson Supersonic hárblásari notar 1600 W stafrænan mótor til þess að gefa nákvæman og öflugan blástur. Hversu mikill straumur er í Dyson Supersonic hárblásaranum þegar hann er í gangi? Hvert þarf innra viðnámið í hárblásarnum að vera?

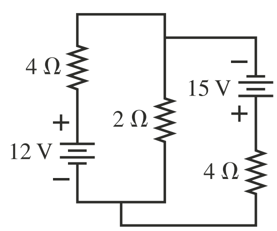
(28.8) Lítum á myndina hér fyrir neðan til vinstri. Hversu mikið rafafl tapast út um hvort viðnám?





(28.9) Lítum á myndina hér fyrir ofan til hægri. Búið er að koma fyrir tveimur ljósaperum fyrir í rásinni, einni 60 W og einni 100 W. Athugið að ljósaperur hafa innra viðnám og styrkur ljósaperu ákvarðast út frá aflinu sem að peran myndi gefa ef að hún væri tengd við 220 V heimilisspennu. Báðar ljósaperurnar skína. Hvor ljósaperan skín skærar og hversu mikið rafafl tapast í hvorri ljósaperu?

(28.78) Hvert er rafaflið sem tapast í gegnum $2\,\Omega$ viðnámið á myndinni hér fyrir neðan?



(28.7) $I = 7{,}3\,\mathrm{A}, R = 30\,\Omega$. **(28.8)** $P_1 = 1{,}9\,\mathrm{W} > P_2 = 2{,}9\,\mathrm{W}$. **(28.9)** $P_1 = 7{,}0\,\mathrm{W} > P_2 = 4{,}2\,\mathrm{W}$.

(28.78) $P = 0{,}29\,\mathrm{W}$.

Dæmatími 17: Eðlisviðnám

Viðnám víra er breytilegt eftir því úr hvaða efni þeir eru gerðir. Almennt gildir að viðnám vírsins er:

$$R = \rho \frac{\ell}{A}.$$

Þar sem ρ er eðlisviðnám vírsins, ℓ er lengd vírsins og A er þverskurðarflatarmál hans.

Efni	**Eðlisviðnám**
Ál	$2{,}8 \cdot 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$
Kopar	$1{,}7 \cdot 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$
Gull	$2{,}4 \cdot 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$
Járn	$9{,}7 \cdot 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$
Silfur	$1{,}6 \cdot 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$
Volfram	$5{,}6 \cdot 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$
Nikkel	$1{,}5 \cdot 10^{-6}\,\Omega\,\mathrm{m}$
Kolefni	$3{,}5 \cdot 10^{-5}\,\Omega\,\mathrm{m}$

(27.27) **(a)** Hvert er viðnám gullvírs sem er 2,0 m á lengd og hefur þvermál 0,20 mm. **(b)** Hvert er viðnám rétthyrningslaga kolefnisvírs sem hefur hliðarlengdir 1,0 mm og lengd 10 cm?

(27.28) Verkfræðingur tekur 94 cm langan vír sem hefur þvermál 0,33 mm og tengir hann við rafhlöðu með 1,5 V spennu. Með því að nota straummæli sér hann að straumurinn í rásinni er 8,0 A. Úr hvaða efni er vírinn?

(27.33) Blýið í blýöntum er í alvörunni úr kolefni. Blýantur af lengd 6,0 cm og með 0,70 mm þvermál er tengdur í sitthvorn endann við 9,0 V rafhlöðu. Hver er straumurinn sem að fer í gegnum blýantinn?

(27.37) Rafmagnsvírarnir sem eru notaðir í rafrásum heimila eru oftast koparvírar með þvermál 2,0 mm. Vírarnir geta þurft að vera mjög langir í stórum íbúðarhúsum til þess að ná að tengja allt sem þarf að tengja. Hver er spennumunurinn á milli endanna á 20 m löngum heimilisvír sem ber 8,0 A rafstraum?

(27.27) $R_{\mathrm{Au}} = 1{,}5\,\Omega, R_{\mathrm{C}} = 3{,}5\,\Omega$. **(27.28)** Silfri. **(27.33)** $I = 1{,}6\,\mathrm{A}$. **(27.37)** $\Delta V = 0{,}87\,\mathrm{V}$.

Kafli 18

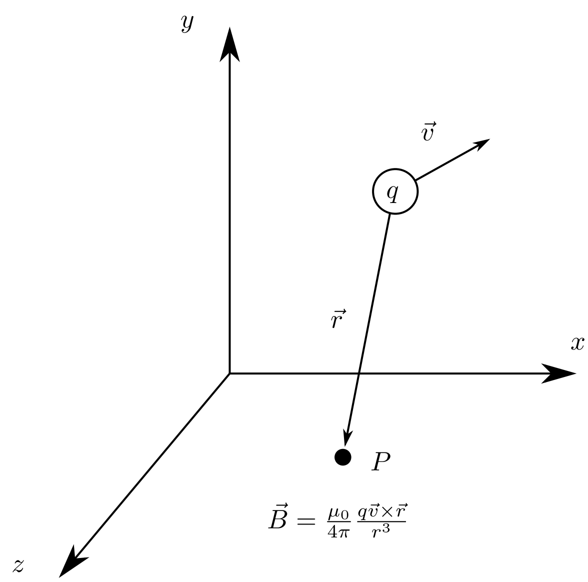
Segulsvið og lögmál Ampéres

Við höfðum séð að hleðslur á hreyfingu búa til rafsvið $\vec{E}_Q = \frac{kQ}{r}\hat{r}$ í kringum sig. Við höfðum einnig séð að ef að hlaðin ögn með hleðslu q er stödd í ytra rafsviði, $\vec{E}$, þá finnur hún fyrir rafsviðskraftinum $\vec{F}_E = q\vec{E}$. Það er því óhjákvæmilegt að við þurfum á einhverjum tímapunkti að tala um hvað gerist þegar hleðslur fara á hreyfingu. En þar með komum við að segulsviðinu. Eindir sem eru á hreyfingu búa nefnilega þar að auki til segulsvið í kringum sig (við munum síðar sjá þegar að við skoðum afstæðiskenninguna að rafsvið og segulsvið eru í rauninni sama sviðið, þ.e. rafsegulsviðið). Segulsviðið sem að punkthleðsla, q, sem hefur hraða $\vec{v}$, býr til í punkti P sem er í fjarlægð $\vec{r}$ frá hleðslunni er gefið með lögmáli Biot-Savart (tveir menn Jean-Bapiste Biot og Félix Savart) sem stærðin:

Lögmál 18.1. (Lögmál Biot-Savart fyrir punkthleðslur) Segulsviðið sem að punkthleðsla, q, sem hefur hraða $\vec{v}$, býr til í punkti P sem er í fjarlægð $\vec{r}$ frá hleðslunni er gefið með:

$$\vec{B}_{\text{punkthleðsla}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}.$$

þar sem að $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{Tm}}{\text{A}} = 1{,}26 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{Tm}}{\text{A}}$ er fasti sem nefnist segulsvörunarstuðull tómarúms.



En venjulega þegar að við erum að tala um hleðslur á hreyfingu þá höfum við einhvern rafstraum I. En þá er eðlilegra að setja fram lögmál Biot-Savart fyrir rafstraum:

Lögmál 18.2. (Lögmál Biot-Savart fyrir vírbút) Segulsviðið sem að vírbútur af lengd $\Delta\vec{\ell}$ sem ber rafstraum I myndar í fjarlægð $\vec{r}$ frá vírbútnum er gefið með:

$$\vec{B}_{\text{vírbútur}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta\vec{\ell}\times\vec{r}}{r^3}.$$

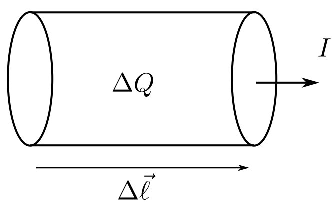
Útleiðsla: Samkvæmt skilgreiningunni á rafstraum þá er $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ þar sem að ΔQ er heildarhleðslan sem ferðast í gegnum vírbútinn á tímanum Δt. En þar með athugum við að:

$$\Delta Q\vec{v} = \Delta Q\frac{\Delta\vec{\ell}}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}\Delta\vec{\ell} = I\Delta\vec{\ell}.$$

En þar með gefur lögmál Biot-Savart fyrir punkthleðslur að:

$$\vec{B}_{\text{vírbútur}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\Delta Q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta\vec{\ell}\times\vec{r}}{r^3}.$$

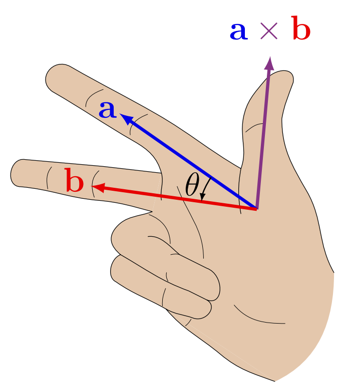
□



En á þessum tímapunkti ættum við því að staldra við og rifja upp hvernig krossfeldi virka. Við höfðum séð að fyrir tvo vigra $\vec{a}$ og $\vec{b}$ þá er krossfeldi vigranna skilgreint sem vigurinn $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$. Við höfum þá eftirfarandi reiknireglu fyrir stærðina á krossfeldinu:

$$|\vec{c}| = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = ab\sin\theta$$

þar sem að θ er hornið á milli vigranna $\vec{a}$ og $\vec{b}$ og stefnan ákvarðast með hægri handar reglu:

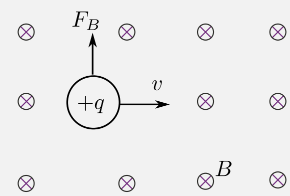


En það er einnig til formleg stærðfræðileg skilgreining á því hvernig maður reiknar krossfeldi vigra. Við höfum þá að ef $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ þá er:

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\hat{x} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\hat{y} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\hat{z} = \begin{pmatrix} a_yb_z - a_zb_y \\ a_zb_x - a_xb_z \\ a_xb_y - a_yb_x \end{pmatrix}.$$

En eind með hleðslu q og hraða $\vec{v}$ sem er í ytra segulsviði, $\vec{B}$, finnur einnig fyrir segulkrafti:

Lögmál 18.3. (Segulkrafturinn á prufuhleðslu) Lítum á ögn með hleðslu $\vec{q}$ sem hefur hraða $\vec{v}$ og er stödd í ytra segulsviði, $\vec{B}$. Þá finnur hún fyrir segulkrafti:



$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

En aftur þá er þægilegra að setja þetta fram í samræmi við kraftinn sem að vírbútur í ytra segulsviði, $\vec{B}$, finnur fyrir:

Lögmál 18.4. (Segulkrafturinn á vírbút) Lítum á vírbút af lengd $\Delta\vec{\ell}$ sem að ber rafstraum I og er staddur í ytra segulsviði $\vec{B}$. Þá finnur vírinn fyrir segulkrafti sem er gefinn með:

$$\vec{F}_B = I\Delta\vec{\ell} \times \vec{B}.$$

Útleiðsla: Samkvæmt skilgreiningunni á rafstraum þá er $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ þar sem að ΔQ er heildarhleðslan sem ferðast í gegnum vírbútinn á tímanum Δt. En þar með athugum við að:

$$\Delta Q\vec{v} = \Delta Q\frac{\Delta\vec{\ell}}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}\Delta\vec{\ell} = I\Delta\vec{\ell}.$$

En þar með höfum við að:

$$\vec{F}_B = \Delta Q\vec{v} \times \vec{B} = I\Delta\vec{\ell} \times \vec{B}.$$

$\square$

En eins og við höfðum séð þá var afar erfitt að leiða út rafsvið í tilteknum punkti út frá skilgreiningunni á rafsviði punkthleðslu. Það sem að hjálpaði okkur gríðarlega mikið var að nota lögmál Gauss sem sagði að heildarrafflæðið út um yfirborð var varðveitt og gefið með:

$$\Phi_{E,\text{heild}} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{inni}}}{\varepsilon_0}$$

Þá skilgreindum við Gauss-flöt umhverfis hleðsludreifinguna okkar (oftast kúla eða sívalningur) og gátum þannig fundið rafsviðið. Til þess að ákvarða segulsvið þá getum við því miður ekki nýtt okkur segulflæðið því það kemur í ljós að heildarsegulflæðið út um hvaða yfirborð sem er, er núll, með öðrum orðum þá gildir:

$$\Phi_{B,\text{heild}} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0.$$

En það hjálpar voðalega lítið til þess að finna segulsviðið! Í staðinn þurfum við að skoða svokallaðar Ampére-lykkjur (sem eru einvíða hliðstæðan við Gauss-fleti) en þá höfum við lögmál Ampéres:

Lögmál 18.5. (Lögmál Ampéres) Við höfum að:

$$\Gamma_{\text{heild}} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{inni}}$$

Þegar við vorum að glíma við lögmál Gauss þá höfðum við í rauninni einungis áhguga á yfirborðsflatarmáli Gauss-flatarins sem að við skilgreindum. Þegar að við erum að glíma við lögmál Ampéres þá höfum við í rauninni einungis áhuga á ummáli Ampére-lykkjunnar. Algengast er að við veljum hring með ummál $2\pi r$ eða ferhyrning með ummál 4ℓ.

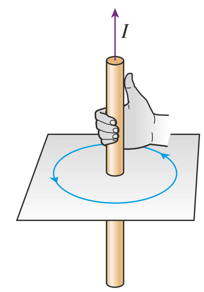
Lögmál 18.6. (Segulsvið umhverfis beinan vír) Styrkur segulsviðsins í fjarlægð r frá beinum vír sem að ber rafstraum I er gefinn með:

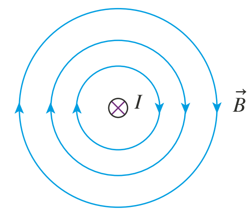
$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Útleiðsla: Veljum Ampére-lykkju sem er hringur með geisla r í kringum vírinn sem ber strauminn I. Þá fæst samkvæmt lögmáli Ampéres að:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{inni}} \implies B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \implies B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

$\square$





Lögmál 18.7. (Segulsviðið í miðjunni á hringlaga gjörð) Lítum á hringlaga gjörð með geisla R sem ber rafstraum I. Þá er segulsviðið í miðju gjarðarinnar gefið með:

$$B_{\text{miðja}} = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Útleiðsla: Skiptum gjörðinni niður í litla búta hver af lengd $\Delta\ell$ þannig að við höfum N búta og $N\cdot\Delta\ell = 2\pi R$. Skoðum framlagið, dB sem að hver lítill bútur $\Delta\ell$ veitir til segulsviðsins í miðju gjarðarinnar. Við höfum þá samkvæmt lögmáli Biot-Savart fyrir vírbút að:

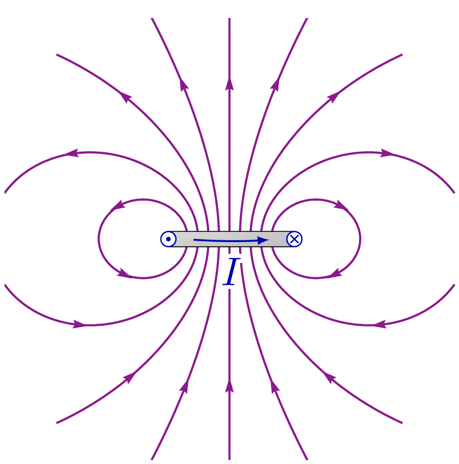
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta\ell R}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta\ell}{R^2}$$

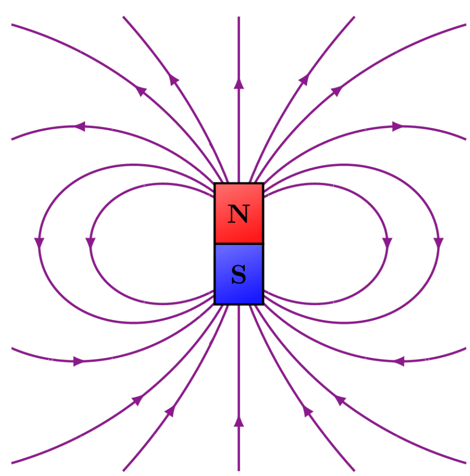
En þá er heildarrafsviðið í miðjunni gefið með:

$$B_{\text{miðja}} = NdB = N\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta\ell}{R^2} = N\Delta\ell\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} = 2\pi R \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

$\square$

Ástæðan fyrir því að við höfum áhuga á þessu er að við getum hermt eftir segulsviði frá hefðbundnum segli með þessum hætti:

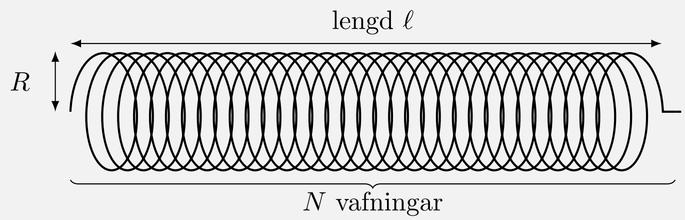




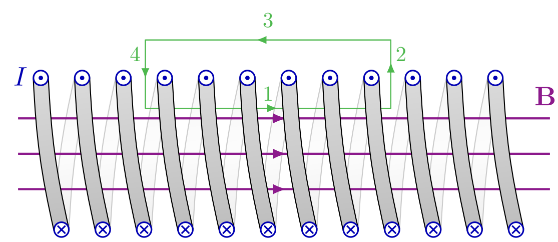
Við getum síðan stillt styrkleikan með því að bæta við vafningum í kringum lykkjuna sem er nú þegar til staðar þá verður styrkur segulsviðsins: $B_{\text{miðja}} = \frac{\mu_0 N I}{2R}$. Það er samt til enn þá sniðugri leið til þess að búa til svona segul! Það er með því að smíða spólu!

Lögmál 18.8. (Segulsvið langspólu) Langspóla samanstendur af vírlykkju sem er vafið þétt í sívalning af lengd ℓ með geisla R. Þá er segulsviðið innan í spólunni er einsleitt og gefið með:

$$B_{\text{spóla}} = \frac{\mu_0 I N}{\ell}.$$

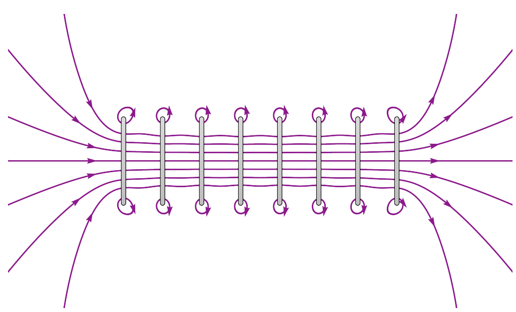


Útleiðsla: Við veljum Ampére-lykkjuna okkar sem rétthyrning með hliðarlengdir a (lárétt) og b (lóðrétt) eins og sést á myndinni hér til hægri. En við sjáum að heildarfjöldi vafninga sem að Ampére-lykkjan okkar umlykur hlítur að vera $N \cdot \frac{a}{\ell}$. Við sjáum einnig að ekkert framlag til feriltegursins mun koma frá 2 og 4 þar sem að segulsviðið er hornrétt á ferilinn þar. Ekkert framlag mun koma frá 3 þar sem að segulsviðið er (svo gott sem) núll fyrir utan langspóluna. Við höfum þá samkvæmt lögmáli Ampéres að:

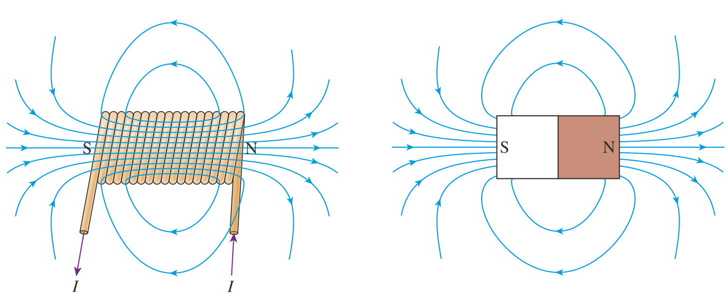


$$\oint \vec{B} \cdot d\ell = \mu_0 I_{\text{inni}} \implies Ba = \mu_0 I \frac{Na}{\ell} \implies B_{\text{spóla}} = \frac{\mu_0 I N}{\ell}. \quad \square$$

Hér fyrir neðan sést síðan mynd sem að sýnir lögun segulsviðsins inni í langspólunni. Takið eftir að segulsiðið styttist (næstum) út fyrir utan langspóluna.



og samanburðurinn við segulinn verður enn þá skýrari:



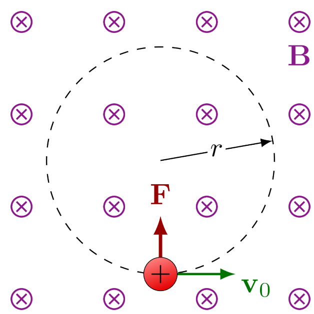
Sýnidæmi

Vinna segulkraftsins og hringhreyfing

Það er eitt sem að við ættum að byrja á því að nefna í tengslum við segulkraftinn. Hann hefur enga stöðuorku (við sáum að fyrir einsleitt rafsviðið var stöðuorkan $U_E = qEd$). En stöðuorka er nefnilega skilgreind út frá vinnunni sem að krafturinn vinnur við það að hleðsluna á milli tveggja staða. En fyrir segulsviðið þá er færslan alltaf hornrétt á kraftinn svo að heildarvinna segulsviðsins er alltaf núll. Með öðrum orðum þá höfum við að:

$$dW_B = \vec{F}_B \cdot d\vec{s} = q\vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{s} = q\vec{v} \times \vec{B} \cdot \vec{v}dt = 0$$

því $\vec{v} \times \vec{B}$ er vigur sem er hornréttur á bæði $\vec{v}$ og $\vec{B}$ svo að innfeldið $(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}$ hlítur að vera núll. Þetta er reyndar algjörlega augljóst á eftirfarandi mynd:



Við sjáum þá að $\vec{v}$ er alltaf hornréttur á $\vec{F}_B$ svo að vinnan hlítur að vera núll. En þar með komum við að öðrum eiginleika segulsviðsins. Allar eindir sem ferðast í einsleitu segulsviði, $\vec{B}$, munu enda á því að vera á hringhreyfingu því að krafturinn $\vec{F}_B$ leitar alltaf inn að miðju. En geislinn er háður massa eindarinnar, hleðslu hennar, hraða hennar og styrk segulsviðsins. Við höfum nefnilega að þá gildir að:

$$m\frac{v^2}{r} = ma = F_B = qvB \implies r = \frac{mv}{qB}.$$

En það er meira varið í þessa sögu en einungis það að eindirnar verða á hringhreyfingu! Það sem er magnað er tíðnin sem að hringhreyfingin hefur því það liggur til grundvallar fyrir öllum öreindahröðlum dagsins í dag (t.d. eins og LHC hjá CERN). Því ef við skoðum tímann sem að að það tekur ögnina að ferðast einn hring, eða jafnvel betra, tíðnina sem að ögnin hefur á hringhreyfingunni, þá sjáum við að $vT = 2\pi r$ og þar með er:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi r} = \frac{v}{2\pi\left(\frac{mv}{qB}\right)} = \frac{qB}{2\pi m}$$

Sem er óháð hraða eindarinnar! Ef að við þekkjum segulsviðið inni í svona öreindahraðli og við mælum tíðnina þá getum við semsagt fundið hlutfallið: $\frac{q}{m}$ á hleðslu eindarinnar og massa hennar (ef við þekkjum annað hvort massa eindarinnar eða hleðslu hennar þá getum við síðan ákvarðað hitt!).
Í sumum dæmum getur verið þægilegt að muna að hornhraði eindarinnar er:

$$\omega = 2\pi f = \frac{qB}{m}$$

En þá er $v = r\omega = \frac{qBr}{m}$.

Tveir vírar

Við getum núna skoðað hvaða áhrif segulsviðið sem að straumurinn í vír hefur á annan vír sem er í fjarlægð d frá hinum. Látum einn vírinn bera straum I_1 og hinn bera straum I_2.
Við skoðum tvö tilvik. Annars vegar þegar straumarnir eru í sömu stefnu og hinsvegar þegar þeir eru í gagnstæða stefnu. Það eina sem breytist á milli tilvikana er stefna kraftsins á milli víranna. Ef þeir eru í sömu átt þá finna þeir fyrir aðdráttarkrafti ef þeir eru í gagnstæðar áttir þá finna þeir fyrir fráhrindikrafti. Við athugum að vírarnir finna fyrir segulsviði hvors annars þannig að vír 1 mun finna fyrir segulsviðinu:

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d}, \qquad \text{á meðan að 2 mun finna fyrir} \qquad B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

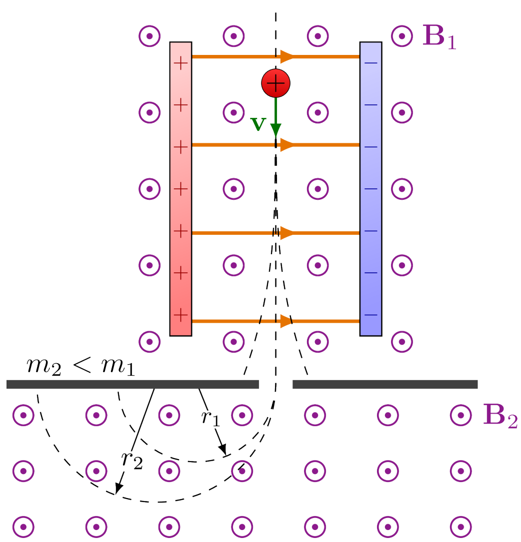
Stefna segulsviðins (inn eða út úr blaðinu) ákvarðast af stefnum straumanna með hægri handar reglu. En þá er krafturinn sem að vírarnir finna fyrir vegna hvors annars:

$$F_{12} = I_2 \ell B_1 = \frac{\mu_0 \ell I_1 I_2}{2\pi d} = F_{21}.$$

Þar sem að ℓ er lengd þess hluta af vírunum sem eru samsíða. Stefnan ákvarðast út frá hægri handar reglu.

Massagreinir

Skoðum að lokum áhugaverða græju sem er notuð til þess að mæla $\frac{q}{m}$ á sameindum (þannig ef að hleðslan er þekkt þá getum við fundið massa sameindarinnar með þessari aðferð). Skoðum eftirfarandi uppstillingu:



Fyrst erum við með plötuþétti sem að gefur einsleitt rafsvið, $\vec{E}$, í x-stefnuna á milli platnanna. Við erum einnig með einsleitt segulsvið, $\vec{B}$, í z-stefnuna. Við enda platnanna höfum við komið fyrir lítilli rauf sem að agnirnar geta farið í beint í gegnum ef að segulkrafturinn og rafkrafturinn eru í kraftajafnvægi þegar að ögnin ferðast í gegnum plötuþéttinn. En til þess þarf:

$$F_E = F_B \implies qE = qvB \implies v = \frac{E}{B}.$$

Ef að sameindin hefur einhvern annan hraða v þegar að hún kemur inn á milli platna plötuþéttisins þá mun hún sveigja í burtu og ekki komast inn í raufina. Eftir það kemst hún í einsleitt segulsvið og ferðast á hálfhring þar til að hún klessir á veggi massagreinisins (við mælum síðan staðsetninguna frá raufinni þar sem að agnirnar klesstu á vegginn. En þar með höfum við að:

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{mE}{qB^2} \implies \frac{q}{m} = \frac{E}{B^2 r}$$

En þetta þýðir að ef að við þekkjum styrk rafsviðsins og styrk segulsviðins og við mælum geisla hálfhringsins þar sem að agnirnar lenda á massagreininum þá getum við ákvarðað hlutfallið $\frac{q}{m}$. Við sjáum þá sér í lagi að ef að tvær eindir hafa sömu hleðslu, q, þá mun eindin sem að hefur meiri massa, $m_1 > m_2$ rekast á massagreininn með minni geisla, $r_1 < r_2$.

18.1 Dæmi

Dæmatími 18: Segulflæði og lögmál Ampéres

Segulflæði er skilgreint sem stærðin:

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA\cos\theta$$

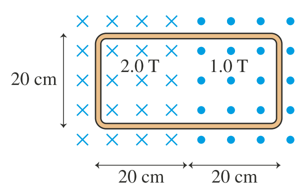
Þar sem að θ er hornið á milli vigranna. Á örsmæðarformi má rita þetta sem: $\Phi_B = \displaystyle\int \vec{B} \cdot d\vec{A}$.
Lögmál Ampéres segir að:

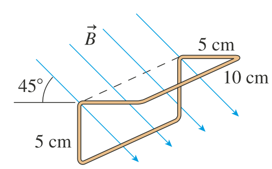
$$\Gamma_{\text{heild}} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{inni}}.$$

Þar sem $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m} = 1{,}26 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{H/m}$ er fasti sem nefnist segulsvörunarstuðull tómarúms

(30.4) Hvert er segulflæðið út um gjörðina sem að sést á myndinni hér fyrir neðan til vinstri?

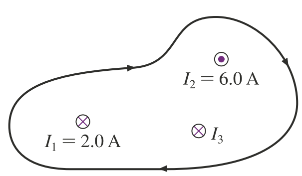
(30.5) Hvert er segulflæðið út um gjörðina sem að sést á myndinni hér fyrir neðan til hægri?

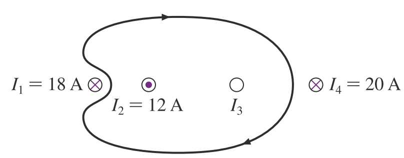




(29.22) Gefið er að $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 3{,}77 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Tm}$. Hvert er gildið á I_3 á myndinni hér fyrir neðan til vinstri?

(29.23) Gefið er að $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 1{,}38 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Tm}$. Hver er rafstraumurinn I_3 á myndinni hér fyrir neðan til hægri?





(30.4) $\Phi_B = 0{,}05\,\mathrm{T\,m^2}$. **(30.5)** $\Phi_B = 3{,}5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{T\,m^2}$. **(29.22)** $I_3 = 7{,}0\,\mathrm{A}$. **(29.23)** $I_3 = -23\,\mathrm{A}$.

Dæmatími 19: Segulsvið umhverfis beinan vír

Með því að beita lögmáli Ampéres á beinan vír þá fæst að styrkur segulsviðsins er:

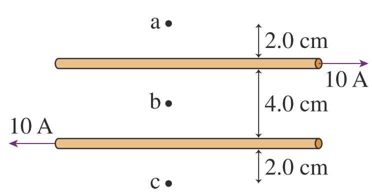
$$\Gamma_{\text{heild}} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{inni}} \implies B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \implies B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

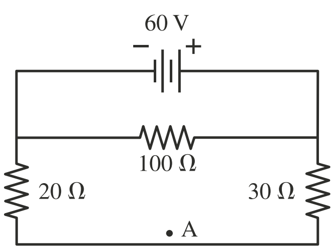
Þar sem að r er fjarlægðin frá miðju vírsins sem ber strauminn, I.

(29.8) Málmurinn níóbín verður ofurleiðari við hitastig sem eru lægri en 9 K (ofurleiðarar hafa ekkert viðnám). Hinsvegar þá hættir efnið að vera ofurleiðandi ef að segulsviðið við yfirborð ofurleiðarans verður meira en 0,10 T. Hver er mesti straumurinn í beinum, ofurleiðandi, níóbín vír með þvermál 4,0 mm?

(29.9) Á síðustu árum hafa minni spámenn verið að velta fyrir sér heilsufarslegum afleiðingum allra raftækjanna sem við erum umkringd í daglegu lífi. Sér í lagi hefur fólk velt fyrir sér skaðsemi háspennulína sem bera 100 A straum í 20 m hæð yfir jörðu. Hver er segulsviðsstyrkurinn á jörðinni beint undir háspennulínunum? (Til samanburðar er segulsvið jarðarinnar $B_{\text{jörð}} = 50\,\mu$T).

(29.14) Lítum á myndina hér fyrir neðan til vinstri. Tveir vírar bera 10 A straum (í sitthvora stefnuna). Hver er styrkur og stefna segulsviðsins í a, b og c?





(29.15) Punkturinn A er 2,0 mm frá vírnum sem sést í rafrásinni hér fyrir ofan til hægri. Hver er styrkur og stefna segulsviðsins í punktinum A? (Þið megið gera þá nálgun að einungis vírinn sem er næstur punktinum A veiti marktækt framlag til segulsviðsins í punktinum A).

(29.8) $I = 1000$ A. **(29.9)** $B = 2{,}0\,\mu$T. **(29.14)** $B_a = 67\,\mu$T, $B_b = -200\,\mu$T, $B_c = -67\,\mu$T. **(29.15)** $B_A = -120\,\mu$T.

Dæmatími 20: Lögmál Biot-Savart og segulkrafturinn

(i) Kyrrstæðar hleðslur búa til rafsvið, $\vec{E}$. Hleðslur á hreyfingu búa þar að auki til segulsvið, $\vec{B}$, sem er gefið með lögmáli Biot og Savart sem stærðin:

$$\vec{B}_{\text{punkthleðsla}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$$

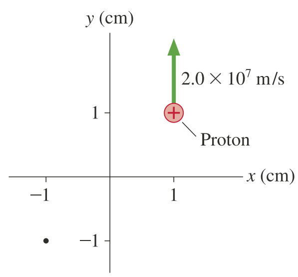
Þar sem $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\text{H/m} = 1{,}26 \cdot 10^{-6}\,\text{H/m}$ er fasti sem nefnist segulsvörunarstuðull tómarúms (samanber ε_0), $\vec{v}$ er hraði punkthleðslunnar q og $\vec{r}$ er fjarlægðin að punkthleðslunni.

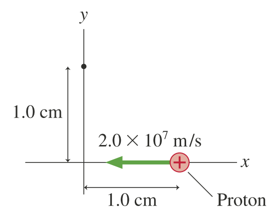
(ii) Hlaðin ögn með hleðslu q og hraða $\vec{v}$ í segulsviði $\vec{B}$ finnur fyrir krafti:

$$\vec{F}_B = q\vec{v}\times\vec{B}.$$

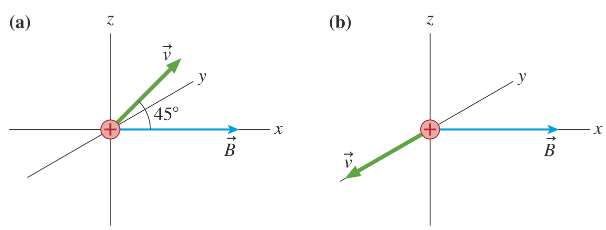
(29.5) Hvert er segulsviðið, $\vec{B}$, í svarta punktinum á myndinni hér fyrir neðan til vinstri?

(29.6) Hvert er segulsviðið, $\vec{B}$, í svarta punktinum á myndinni hér fyrir neðan til hægri?

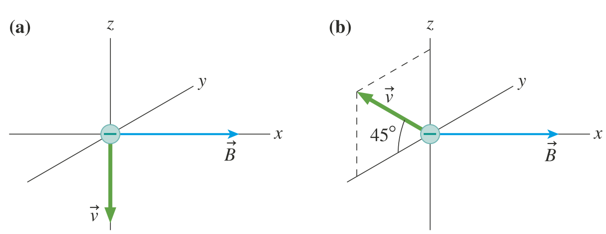




(29.26) Róteind ferðast í segulsviði, $B = 0{,}50\,\text{T}$, með hraða, $v = 1{,}0 \cdot 10^7\,\text{m/s}$. Stefnur vigranna sjást á myndunum hér fyrir neðan í **(a)** og **(b)** lið. Hver er segulkrafturinn sem verkar á róteindina?



(29.27) Rafeind ferðast í segulsviði, $B = 0{,}50\,\text{T}$, með hraða, $v = 1{,}0 \cdot 10^7\,\text{m/s}$. Stefnur vigranna sjást á myndunum hér fyrir neðan í **(a)** og **(b)** lið. Hver er segulkrafturinn sem verkar á rafeindina?



(29.5) $\vec{B} = 2{,}83 \cdot 10^{-16}\,\text{T}\,\hat{z}$. **(29.6)** $\vec{B} = -1{,}13 \cdot 10^{-15}\,\text{T}\,\hat{z}$. **(29.26)** $F_a = 5{,}7 \cdot 10^{-13}\,\text{T}\,\hat{y}$, $F_b = 8{,}0 \cdot 10^{-13}\,\text{T}\,\hat{z}$. **(29.27)** $F_a = 8{,}0 \cdot 10^{-13}\,\text{T}\,\hat{y}$, $F_b = 5{,}7 \cdot 10^{-13}\,\text{T}\,\hat{y} - 5{,}7 \cdot 10^{-13}\,\text{T}\,\hat{z}$.

Dæmatími 21: Hringhreyfing í segulsviði

Hlaðin ögn með hleðslu, q og massa m sem er stödd í segulsviði mun ferðast á hringhreyfingu vegna miðsóknarkraftsins sem að segulsviðið veldur. Við höfum þá að:

$$m\frac{v^2}{r} = ma = F_B = qvB$$

Geisli hringhreyfingarinnar verður því $r = \frac{mv}{qB}$. Með því að rifja upp að $v = r\omega$ og að $\omega = 2\pi f$ þá er einnig hægt að finna tíðnina í hringhreyfingunni (cyclotron-tíðni eða hringhraðaltíðni)

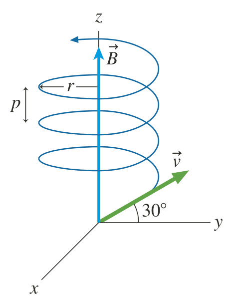
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{v}{r} = \frac{qB}{2\pi m}$$

(29.30) Sem hluti af einföldu og ódýru rannsóknarverkefni í 6. bekk í MR ætlar þú að útbúa öreindahraðall sem að hraðar róteindum upp í 10% af hraða ljóssins, $v = 0,1c = 3{,}00 \cdot 10^7\,\mathrm{m/s}$ og heldur þeim á hringhreyfingu. Stærsta hringlaga ílátið sem að þú finnur í BYKO hefur 50 cm þvermál. Hver þarf styrkur segulsviðsins að vera til þess að þú náir markmiði þínu?

(29.31) Örbylgjurnar í örbylgjuofni eru myndaðar í svokallaðri magnetrónu. Inni í magnetrónunni eru rafeindir á hringhreyfingu með hringhraðaltíðni 2,4 GHz. **(a)** Hver er segulsviðsstyrkurinn í magnetrónunni? **(b)** Magnetrónan er hringlaga og hefur þvermál 2,5 cm. Hver er mesta hugsanlega hreyfiorka sem að rafeindirnar geta haft í magnetrónunni?

(29.63) Andefni er í einhverjum skilningi spegilmynd venjulegs efnis. Andróteind er að öllu leiti eins og róteind (með massa $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$) nema hleðsla hennar er $-e = -1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ (en ekki $+e$). Eina leiðin til þess að rannsaka andróteindir er að koma þeim fyrir á hringhreyfingu í lofttæmi því að ef að þær komast í snertingu við róteindir þá eyðast báðar eindir og mynda gammablossa. Í CERN vilja menn fanga andróteindir í 2,0 mT segulsviði á hringhreyfingu með hraða $1{,}5 \cdot 10^4\,\mathrm{m/s}$. Hvert þarf þvermálið á hraðlinum að vera hið minnsta til þess að andróteindirnar sleppi ekki úr hraðlinum?

(29.65) Kveikt er á einsleitu 30 mT segulsviði í jákvæða $\hat{z}$ stefnu. Rafeind er sleppt af stað úr xy-planinu með upphafshraða $5{,}0 \cdot 10^6\,\mathrm{m/s}$ yfir horni $\theta = 30°$ miðað við lárétt. Hver verður geisli hringhreyfingarinnar, r, og gengjubilið, p, í skrúfferli rafeindarinnar?



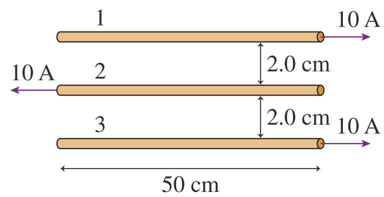
(29.30) $B = 1{,}25\,\mathrm{T}$. **(29.31)** $B = 85{,}7\,\mathrm{mT}$, $K_{\max} = 1{,}61 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{J}$. **(29.63)** þ = 15,6 cm. **(29.65)** $r = 0{,}82\,\mathrm{mm}$, $p = 3{,}0\,\mathrm{mm}$.

Dæmatími 22: Segulkrafturinn á vír

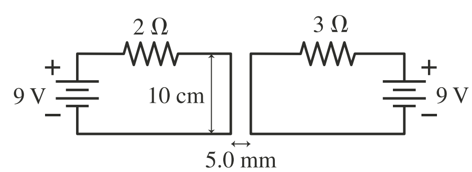
Vír sem að ber straum I og hefur lengd ℓ í ytra segulsviði, B, finnur fyrir krafti:

$$\vec{F}_B = I\vec{\ell} \times \vec{B}.$$

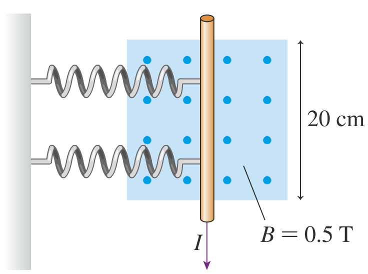
(29.36) Þrír 50 cm langir vírar bera 10 A straum í stefnurnar sem sást á myndinni hér fyrir neðan. Hver er stærð og stefna kraftsins sem að hver vír finnur fyrir vegna hinna víranna?

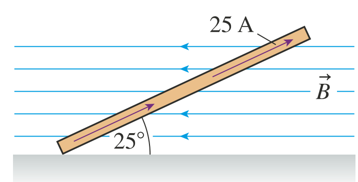


(29.34) Tveir 10 cm langir samsíða vírar eru staddir í 5,0 mm fjarlægð frá hvor öðrum. Hver er krafturinn, F_v, sem að verkar á vinstri vírinn vegna hægri vírsins og hver er krafturinn, F_h, sem að verkar á hægri vírinn vegna vinstri vírsins?



(29.72) Á myndinni hér fyrir neðan til vinstri má sjá tvo gorma með gormstuðla 10 N/m sem eru festir við vír. Þegar að rafstraumur, I, er sendur í gegnum vírinn þá þjappast gormarnir saman um 10 cm. Hversu stór er straumurinn?





(29.73) Á myndinni hér fyrir ofan til hægri má sjá hliðarmynd af ferhyrningslaga straumgjörð sem hefur heildarmassa $m = 2{,}0\,\text{kg}$ og hliðarlengdir $\ell = 2{,}5\,\text{m}$. Neðsti endi gjarðarinnar hvílir á núningslausum fleti. Í rásinni er 25 A straumur (í stefnuna sem að sést á myndinni). Hver þarf styrkur segulsviðsins, B, í lárétta stefnu að vera til þess að gjörðin haldist kyrr og myndi 25° horn miðað við lárétt?

(29.36) $F_1 = 25\,\text{mN}$, $F_2 = 0\,\text{N}$, $F_3 = -25\,\text{mN}$. **(29.34)** $F_v = F_h = 54\,\mu\text{N}$. **(29.72)** $I = 2{,}0\,\text{A}$. **(29.73)** $B = 0{,}16\,\text{T}$.

Dæmatími 23: Segulsvið langspólu

Segulsviðið inni í spólu sem er búin til með því að vefja vír með þvermál, þ, þétt í sívaling með vafningafjölda, N, geisla, R, og lengd, ℓ, er gefið með:

$$B_{\text{spóla}} = \frac{\mu_0 I N}{\ell} = \frac{\mu_0 I}{\text{þ}}$$

(29.25) Segulómunartæki nota öflugt, 1,5 T, segulsvið til þess að taka myndir af líffærum. Myndatökuklefinn er spóla sem er hönnuð þannig að hún er 1,8 m að lengd og hefur þvermál 75 cm. Spólan er búin til með því að vefja vír með þvermál 2,0 mm þétt í kringum klefann. **(a)** Hver er vafningafjöldi spólunnar? **(b)** Hver er straumurinn sem að þarf að leiða í gegnum spóluna til þess að búa til svona sterkt segulsvið?

(29.49) Í verklegum tíma eruð þið beðin um að smíða spólu með þvermál 20 cm sem að hefur einsleitt segulsvið 5,0 mT inni í henni. Vondi eðlisfræðikennarinn ykkar gefur ykkur tvo víra til verksins. Vír A hefur þvermál 1,02 mm og getur mest borið 6,0 A straum. Vír B hefur þvermál 0,41 mm og getur mest borið 1,0 A straum. Hvorn vírinn ættuð þið að nota og hversu mikinn straum þarf spólan að hafa?

(29.50) Hefðbundinn sívalningslaga segull hefur geisla 1,0 cm og lengd 8,0 cm. Styrkur segulsviðsins við Norðurpól segulsins er 0,10 T. Við ætlum að búa til sívalingslaga spólu með sama geisla og sömu lengd sem hefur einsleitt segulsvið með sama styrk og segullinn. Hversu marga vafninga þarf spólan að hafa ef að straumurinn í spólunni er 2,0 A?

(29.79) Þú ert með koparvír af lengd 1,0 m og 9,0 V spennugjafa. Koparvírinn hefur þvermál 1,00 mm og eðlisviðnám $1{,}7 \cdot 10^{-8}\,\Omega\,\text{m}$. Nú tengjum við enda vírsins við spennugjafan og búum til spólu úr koparvírnum. Hver verður styrkur segulsviðsins inni í spólunni?

(29.25) $N = 375$, $I = 2{,}4\,\text{kA}$. **(29.49)** $I_1 = 4{,}1\,\text{A}$, $I_2 = 1{,}6\,\text{A}$. **(29.50)** $N = 3180$. **(29.79)** $B = 0{,}52\,\text{T}$.

Kafli 19

Lögmál Faradays og spanstraumur

19.1 Lögmál Faradays

Lögmál 19.1. (Lögmál Faradays) Breyting á segulflæði, $\frac{d\Phi_B}{dt}$, spanar spanspennu, $\mathcal{E}(t)$, og spanstraum $J(t)$, samkvæmt:

$$RJ(t) = \mathcal{E}(t) = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Þar sem að R er viðnámið í rásinni þar sem að spanstraumurinn spanast.

Þar sem að segulflæðið er gefið með $\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA\cos\gamma$ þar sem að γ er hornið á milli vigranna. Ef $\gamma = 0°$ þá eru aðallega tvær leiðir fyrir okkur til þess að breyta seglflæðinu. Við höfum nefnilega samkvæmt diffrun margfeldis að:

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d}{dt}(BA) = \frac{dB}{dt}A + B\frac{dA}{dt}$$

Í flestum dæmum sem að við munum skoða þá er annaðhvort $\frac{dA}{dt} = 0$ eða $\frac{dB}{dt} = 0$ svo að við höfum annað hvort að:

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = A\frac{dB}{dt}, \qquad \text{eða} \qquad \frac{d\Phi_B}{dt} = B\frac{dA}{dt}.$$

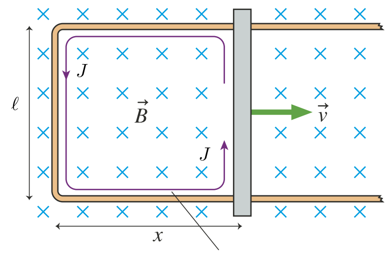
Með öðrum orðum þá er það annaðhvort segulsviðið sem að breytist með tíma eða flatarmálið sem að breytist með tíma. Reyndar ættum við að nefna að stundum er það hornið γ á milli vigranna sem er breytt (með því að snúa gjörð með fast flatarmál A í föstu segulsviði B) þá fæst:

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d}{dt}(BA\cos\gamma) = -BA\sin\gamma\frac{d\gamma}{dt} = -\omega BA\sin\gamma(t)$$

Þar sem að $\omega = \frac{d\gamma}{dt}$ er hornhraðinn sem að gjörðinni er snúið með.

19.2 Sýnidæmi

Skoðum til dæmis uppstillinguna á myndinni hér fyrir neðan:



Búið er að koma fyrir rennivír ofan á U-laga vír. Það er einsleitt segulsvið, $\vec{B}$, inn í töfluna. Rennivírinn lokar rásinni þannig að flatarmál rásarinnar þar sem að straumurinn getur hlaupið er $A = \ell x$ þar sem að x er fjarlægðin sem að rennivírinn hefur verið dreginn. Vírarnir hafa eðlisviðnám ρ og rennivírinn hefur viðnám R_r. Nú byrjum við að draga rennivírinn til hægri með hraða v. Þá breytist flatarmál gjarðarinnar (en segulsviðið er óbreytt svo $\frac{dB}{dt} = 0$) og flatarmálið er þá gefið með:

$$A(t) = \ell(x_0 + vt) = \ell x_0 + \ell vt$$

þar sem x_0 er fjarlægð rennivírsins frá vinstri endanum í byrjun. En þá fáum við að:

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d}{dt}(BA) = B\frac{dA}{dt} = B\ell v$$

En samkvæmt lögmáli Faradays er þá spanspennan sem að spanast gefin með:

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -B\ell v$$

Við getum hunsað mínusmerkið því það er einungis notað til þess að segja okkur í hvaða stefnu straumurinn spanast. Núna er segulflæðið að aukast inn í blaðið (því $\vec{B}$ er inn í blaðið og A er að aukast) svo að við ályktum að straumurinn spanast rangsælis (miðað við klukkuganginn) í rásinni. Straumurinn í rásinni verður þá gefinn með:

$$\left(R_r + \rho \cdot \frac{\ell + 2x(t)}{A}\right) J(t) = Blv \implies J(t) = \frac{Blv}{R_r + \rho\frac{\ell+2x_0}{A} + \rho\frac{2vt}{A}}$$

Þar sem að A er þverskurðarflatarmál U-laga vírsins. Sér í lagi sjáum við að $J(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

Annað sem maður gæti spurt að er hversu mikil orka tapast þá út um R_r viðnámið. Við athugum þá að:

$$P = I\Delta V_{R_r} = I^2 R_r \implies P(t) = J^2(t) R_r.$$

Heildaraflið sem tapast í rásinni er hinsvegar:

$$P = J(t)\mathcal{E}(t).$$

19.3 Sjálfspan í spólu

Lögmál 19.2. (Spanstuðull) Við skilgreinum spanstuðul spólu þannig að spennufallið yfir spóluna, ΔV_L, er gefið með:

$$\Delta V_L = -L\frac{dI}{dt}.$$

Lögmál 19.3. (Sjálfspan spólu) Lítum á spólu með geisla R af lengd ℓ og með vafningafjölda N. Þá er spanstuðull spólunnar gefinn með:

$$L_{\text{langspóla}} = \frac{\mu_0 A N^2}{\ell},$$

þar sem $A = \pi R^2$.

Útleiðsla: Við höfum að segulflæðið í einni lykkju breytist samkvæmt:

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d}{dt}(BA) = A\frac{d}{dt}(B) = A\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0 I N}{\ell}\right) = \frac{\mu_0 A N}{\ell}\frac{dI}{dt}.$$

En það eru alls N lykkjur og hver þeirra veitir sama framlag til spanspennunar svo að við jöfum að spennufallið er:

$$\Delta V_L = \mathcal{E}(t) = -N\cdot\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{\mu_0 A N^2}{\ell}\frac{dI}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \implies L_{\text{langspóla}} = \frac{\mu_0 A N^2}{\ell}.$$

Þar sem að $A = \pi R^2$ er þverskurðarflatarmál spólunnar. $\square$

Lögmál 19.4. (Orkuþéttleiki segulsviðsins) Orkuþéttleiki (orka á rúmmálseiningu) segulsviðs er gefið með:

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2.$$

Til samanburðar var orkuþéttleiki rafsviðsins:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2.$$

Lögmál 19.5. (Orkan í spólu) Orkan sem að spóla með spanstuðul L geymir þegar að straumur I fer í gegnum hana er gefin með:

$$U_L = \frac{1}{2}LI^2.$$

Útleiðsla: Orkuþéttleiki segulsviðsins er:

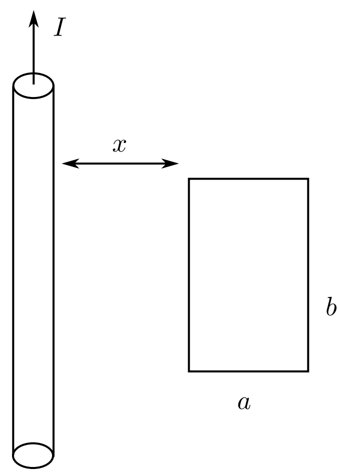
$$u_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

En þar með höfum við að orkan sem að spólan geymir er:

$$U_L = u_B\cdot A\ell = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 I N}{\ell}\right)^2 A\ell = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mu_0 A N^2}{\ell}\cdot I^2 = \frac{1}{2}LI^2. \quad \square$$

19.4 Hvers vegna er riðstraumur málið?

Skoðum eftirfarandi uppstillingu:



Vír ber straum I upp og rétthyrningslaga gjörð með hliðarlengdir a og b er stödd í fjarlægð x frá vírnum. Til að byrja með ætlum við að skoða hvað gerist þegar að straumurinn er fastur (þ.e.a.s. frá jafnspennugjafa). Athugum að vírinn býr til segulsvið í kringum sig og að segulsviðið er því missterkt eftir því hvar við erum í gjörðinni. Við höfum þá að heildarsegulflæðið út um gjörðina er:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \qquad \text{þannig að:} \qquad \Phi_B = \int_x^{x+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} b dr = \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln(r)\right]_x^{x+a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{x+a}{x}\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)$$

Þetta er óháð því hvort að straumurinn er tímaháður eða ekki. Ef I er fast þá fæst einfaldlega að:

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = 0.$$

En þar með spanast enginn straumur í rásinni ef að við erum með jafnan straum. Hinsvegar ef að við erum með riðstraum, $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$ þá höfum við að:

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)\right) = -\frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) \cos(\omega t)$$

Ef að heildarviðnám gjarðarinnar er R þá fáum við að spanstraumurinn sem að spanst í rásinni er gefinn með:

$$RJ(t) = \mathcal{E}(t) = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) \cos(\omega t) \implies J(t) = \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi R} \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) \cos(\omega t)$$

19.5 Dæmi

Dæmatími 24: Lögmál Faradays og lögmál Lenz

Lögmál Faradays segir að spanspennan sem að myndast við það að segulflæði breytist er gefið með:

$$\mathcal{E}(t) = \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

En spanspennan getur myndað spanstraum, $J(t)$ í rás sem hefur viðnám R samkvæmt:

$$\mathcal{E}(t) = J(t)R.$$

Mínusmerkið í lögmáli Faradays hefur fengið sérstakt nafn og kallast lögmál Lenz. Það segir að spanstraumurinn sem að myndast í rásinni er í öfuga átt miðað við breytinguna á segulflæðinu.

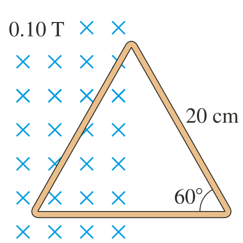
(30.11) Helmingurinn af einshliða þríhyrning með 20 cm hliðarlengdir er staddur inni í segulsviði sem að hefur styrk 0,10 T. **(a)** Hvert er segulflæðið út um þríhyrninginn? **(b)** Þríhyrningurinn er búinn til úr koparvír sem hefur geisla 1,5 mm. Hvert er viðnám þríhyrningsins? Eðlisviðnám kopars er $1{,}7 \cdot 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$. **(c)** Segulsviðið byrjar skyndilega að minnka um 0,01 T/s. Hver er stærð og stefna spanstraumsins sem að spanast í rásinni?

(30.13) Rétthyrningslaga gjörð er ýtt inn í einsleitt 0,20 T segulsvið með hraðanum 50 m/s. Viðnám gjarðarinnar er 0,10 Ω. Hver er stærð og stefna spanstraumsins sem að spanast í rásinni?

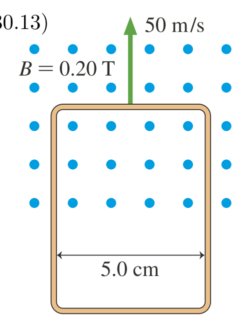
(30.15) Ferningslaga gjörð með hliðarlengdir 8,0 cm hefur viðnám 0,20 Ω. Á myndinni sést að spanstraumurinn í rásinni er 150 mA. Er styrkur segulsviðsins að aukast eða að minnka (inn í blaðið)? Með hvaða hraða (T/s) er styrkur segulsviðsins að breytast?

(30.14) Allar gjarðirnar í liðum **(a)**, **(b)** og **(c)** hafa 10 cm þvermál og eru staddar í þremur mismunandi segulsviðum. Viðnám gjarðanna er 0,20 Ω. Hver er stærð og stefna spanstraumsins sem að spanast í gjörðunum þremur?

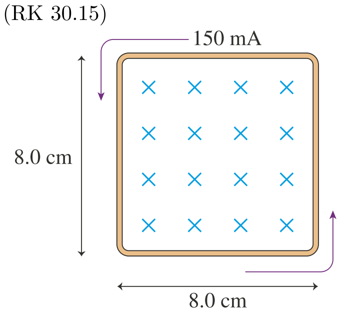
(RK 30.11)



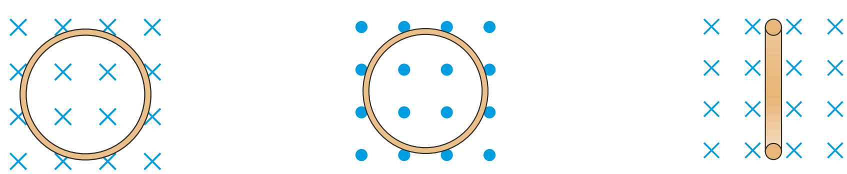
(RK 30.13)



(RK 30.15)



(RK 30.14)

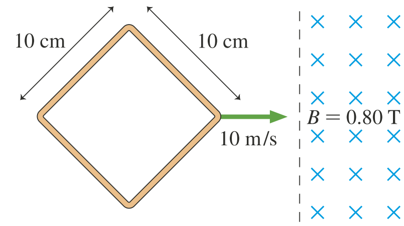


(a) Segulsviðið eykst um 0,50 T/s **(b)** Segulsviðið minnkar um 0,50 T/s **(c)** Segulsviðið minnkar um 0,50 T/s

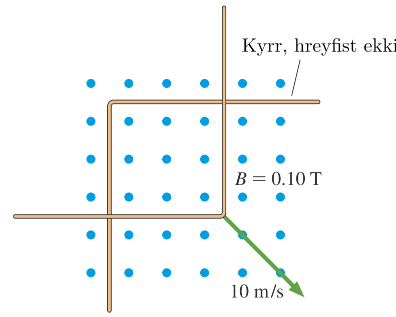
(30.11) $J = 1{,}2\,\mathrm{mA}$. **(30.13)** $J = 5{,}0\,\mathrm{A}$. **(30.15)** $\frac{dB}{dt} = 4{,}7\,\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{s}}$. **(30.14)** $J_a = J_b = 20\,\mathrm{mA}$.

Dæmatími 25: Spanstraumur

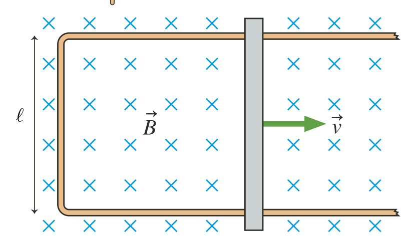
(30.53) Ferningslaga gjörð hefur hliðarlengdir 10 cm og ferðast inn í einsleitt 0,80 T segulsvið með hraða 10 m/s. Viðnám gjarðarinnar er 0,10 Ω. **(a)** Teiknið graf sem sýnir spanstrauminn í rásinni, $J(t)$, sem fall af tíma, t frá $t = 0{,}000\,\mathrm{s}$ til $t = 0{,}020\,\mathrm{s}$. **(b)** Hver verður mesti straumurinn í rásinni? Hvar er gjörðin stödd þegar að straumurinn er mestur?



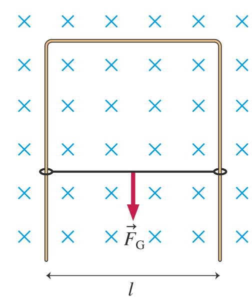
(30.54) Tveir L-laga vírar sjást á myndinni hér til hægri. Þeir eru staddir í einsleitu 0,10 T segulsviði. Við tímann $t = 0\,\mathrm{s}$ þá eru hornpunktar þeirra staddir í sama punkti (flatarmálið sem að vírarnir umlykja er þá núll í byrjun). Þá byrjum við að draga annan L-laga vírinn með hraða 10 m/s undir 45° horni miðað við lárétt á meðan að við höldum hinum vírnum kyrrum. Vírarnir, sem eru úr gulli, hafa eðlisviðnám $\rho_{\mathrm{gull}} = 2{,}4 \cdot 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$ og þvermál 1,75 mm. **(a)** Hver er stefna spanstraumsins í rásinni? **(b)** Ákvarðið spanspennuna, $\mathcal{E}(t)$ og spanstrauminn, $J(t)$, sem fall af tíma, t. **(c)** Gefið töluleg gildi á spanspennunni og spanstraumnum við tímann $t = 0{,}10\,\mathrm{s}$.



(30.55) Rennivír nokkur er 20 cm að lengd og hefur massa 50 mg og viðnám 1,0 Ω. Rennivírinn er dreginn með föstum hraða 10 m/s til hægri í einsleitu 0,10 T segulsviði eins og sést á myndinni hér til hægri. Rennivírinn rennur meðfram núningslausum, ofurleiðandi teinum sem hafa ekkert viðnám (eina viðnámið í rásinni er þá vegna rennivírsins). **(a)** Hver er spanstraumurinn sem að spanast í rásinni? **(b)** Hversu mikinn kraft þarf til þess að draga vírinn? **(c)** Þegar að vírinn er dreginn svona mun spanstraumurinn í rásinn valda því að varmaafl tapast í viðnámi rennivírsins og hann mun þar af leiðandi hitna. Eðlisvarmi vírsins er $c_{\mathrm{Kopar}} = 710\,\mathrm{J/kg\,K}$. Um hversu margar gráður hitnar rennivírinn við það að draga hann svona í 10 s?



(30.59) Rennivír nokkur er 20 cm að lengd og hefur massa 10 g og viðnám 0,10 Ω. Rennivírinn getur runnið lóðrétt meðfram U-laga núningslausum, ofurleiðandi teinum eins og sést á myndinni hér til hægri. Styrkur segulsviðsins er 0,50 T. Nú er kerfinu sleppt úr kyrrstöðu og þyngdarkrafturinn sem að verkar á rennivírinn togar hann þá niður. Eftir einhvern tíma mun rennivírinn vera í kraftjafnvægi og ferðast þá með föstum lokahraða niður, v_{lok}. Ákvarðið lokahraðann.



(30.53) $J_{\max} = 11{,}3\,\mathrm{A}$. **(30.54)** $\mathcal{E}(0{,}1\,\mathrm{s}) = 1{,}0\,\mathrm{V}$, $J(0{,}1\,\mathrm{s}) = 35{,}4\,\mathrm{A}$. **(30.55)** $J = 0{,}20\,\mathrm{A}$, $F = 4{,}0\,\mathrm{mN}$, $\Delta T = 11{,}3\,°\mathrm{C}$ **(30.59)** $v_{\mathrm{lok}} = 0{,}98\,\mathrm{m/s}$.

Dæmatími 26: Spanspólur og orkan í segulsviði

Spanstuðull langspólu af lengd ℓ með vafningafjölda N og þverskurðarflatarmál A er gefinn með:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell}$$

Spennufallið í gegnum spóluna er þá $\Delta V_L = -L\frac{dI}{dt}$. Orkan sem að spólan geymir er þá gefin með:

$$U_L = \frac{1}{2}LI^2$$

Orkuþéttleiki segulsviðsins er: $u_B = \frac{U_L}{A\ell} = \frac{1}{2\mu_0}B^2$.

(30.12) Spansóla er búin til með því að vefja vír með þvermál 0,30 mm þétt í kringum sívalning með geisla 2,0 mm. **(a)** Hversu löng þarf spólan að vera til þess að spanstuðull spólunnar sé 10 μH? **(b)** Nú hleypur fastur 100 mA straumur í gegnum spóluna. Hversu mikla orku geymir spanspólan? **(c)** Hver er orkuþéttleiki segulsviðsins inni í spólunni? **(d)** Hver er styrkur segulsviðsins inni í spólunni? **(e)** Skyndilega fellur straumurinn í spólunni niður í 0 A á 5,0 μs. Hvert var spennufallið yfir spóluna á meðan að straumurinn var að minnka?

(30.26) Spanspóla nokkur hefur spanstuðul 100 mH og heildarviðnám vírsins sem að spólan er búin til úr er 4,0 Ω. Spólan er tengd við rafhlöðu sem hefur íspennu 12 V og innra viðnám 2,0 Ω. Hversu mikla orku geymir spólan?

(30.27) Spóla nokkur er 12 cm löng og hefur þvermál 3,0 cm og vafningafjölda 200. Hversu mikla orku geymir spólan þegar að um hana streymir 0,80 A rafstraumur?

(30.28) Segulómunartæki (MRI scanner) eru notuð í læknisfræðilegum tilgangi til þess að taka sneiðmyndir af líkamshlutum sjúklinga. Sá líkamshluti sem á að rannsaka er þá settur í miðju myndatökuklefans sem er í rauninni risastór spóla sem er 40 cm í þvermál og 1,0 m löng. Segulsviðið sem að myndast inni í myndatökuklefanum er 5,0 T og er búið til með því að leiða 100 A straum í gegnum spóluna. En eins og við höfum lært í verklegu þá getur stafað brunahætta af því að nota rafstraum sem er við meira en 1,0 A. Af öryggisráðstöfun er því notast við ofurflæðandi helíum við lágt hitastig til þess að kæla vírana sem að spólan er búin til úr þannig að þeir vírar verða ofurleiðandi og hafa því svo gott sem ekkert innra viðnám. **(a)** Hver er vafningafjöldi spólunnar? **(b)** Hversu mikla orku geymir spólan þegar hún er að myndgreina líkamshluta sjúklings? **(c)** Hver er orkuþéttleiki segulsviðsins inni í myndatökuklefanum?

(30.12) $\ell = 5{,}70\,\text{cm}$, $U_L = 5{,}0 \cdot 10^{-8}\,\text{J}$, $u_B = 0{,}070\,\text{J/m}^3$, $B = 419\,\mu\text{T}$, $\Delta V_L = 0{,}20\,\text{V}$. **(30.26)** $U_L = 0{,}20\,\text{J}$. **(30.27)** $L = 296\,\mu\text{H}$, $U_L = 94{,}7\,\mu\text{J}$. **(30.28)** $N = 39.800$ vafningar, $U_L = 1{,}25\,\text{MJ}$, $u_B = 1{,}0 \cdot 10^{-7}\,\text{J/m}^3$.

Kafli 20

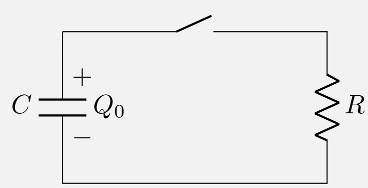
Tímaþróun í rafrásum

20.1 Jafnspennurásir (DC)

20.1.1 RC-rás:

Lögmál 20.1. (Afhleðsla þéttis) Lítum á rafrás þar sem að hleðslu Q_0 hefur verið komið á þétti í rafrás með viðnámi R sem er til að byrja með rofin þannig að enginn straumur flæðir í rásinni. Við tímann $t = 0\,\mathrm{s}$ lokum við fyrir rofan svo að straumur geti flætt í rásinni. Þá mun þéttirinn afhlaðast og hleðslan á þéttinum eftir tímann, t, verður gefin með:

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}$$



Útleiðsla: Eftir að rofanum er lokað þá höfum við samkvæmt lykkjulögmáli Kirchoffs að:

$$\frac{Q}{C} - IR = 0$$

En við höfum að $I = \frac{dq}{dt} = -\frac{dQ}{dt} = -\dot{Q}$ (neikvæða formerkið táknar að rafstraumurinn í rásinni er hleðslan sem að þéttirinn missti) svo við ályktum að:

$$\frac{Q}{C} + R\dot{Q} = 0 \implies \dot{Q} + \frac{1}{RC}Q = 0.$$

Við margföldum síðan með $e^{t/RC}$ báðum meginn og fáum að:

$$0 = \dot{Q} + \frac{1}{RC}Q = \dot{Q}e^{t/RC} + \frac{1}{RC}e^{t/RC}Q = \frac{d}{dt}\left(Qe^{t/RC}\right).$$

Þar sem að við höfum notað diffrun margfeldis í öfuga átt (ég kalla þetta að pilla af afleiðuna). En þar með ályktum við að til sé fasti α þannig að:

$$Qe^{t/RC} = \alpha \implies Q(t) = \alpha e^{-t/RC}.$$

Upphafsskilyrðið gefur síðan að $Q(0) = \alpha = Q_0$ svo við ályktum að:

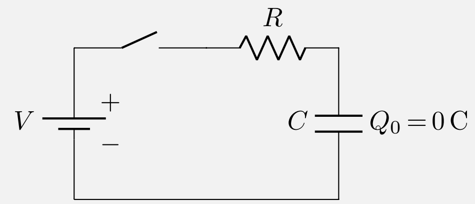
$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}.$$

□

Lögmál 20.2. (Hleðsla þéttis) Lítum á rafrás með spennugjafa V, viðnámi R og þétti með rýmd C þar sem að til að byrja með er engin hleðsla á þéttinum, $Q_0 = 0\,\mathrm{C}$. Til að byrja með er rásin rofin þannig að enginn straumur flæðir í rásinni. Við tímann $t = 0\,\mathrm{s}$ lokum við fyrir rofan svo að straumur geti flætt í rásinni. Þá mun þéttirinn hlaðast og hleðslan á þéttinum eftir tímann, t, verður gefin með:

$$Q(t) = Q_{\max}\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

Þar sem $Q_{\max} = CV$ er mesta hleðslan sem að þéttirinn getur borið (við spennuna V).



Útleiðsla: Við notum lykkjulögmál Kirchoffs og höfum þá:

$$V - IR - \frac{Q}{C} = 0$$

En nú er $I = \frac{dq}{dt} = \frac{dQ}{dt}$ svo við höfum:

$$\dot{Q} + \frac{1}{RC}Q = \frac{V}{R}$$

Við margföldum síðan aftur með $e^{t/RC}$ og fáum að:

$$\frac{d}{dt}\left(Qe^{t/RC}\right) = \dot{Q}e^{t/RC} + \frac{1}{RC}e^{t/RC}Q = \frac{V}{R}e^{t/RC}$$

En þá fáum við með tegrun að:

$$Qe^{t/RC} = VCe^{t/RC} + \alpha$$

Þar sem α er tegurfasti sem ákvarðast af upphafsskilyrðinu $Q(0) = Q_0 = 0\,\mathrm{C}$. En þar með er:

$$Q(t) = VC + \alpha e^{-t/RC}$$

En þá gefur upphafsskilyrðið að $Q(0) = Q_0 = 0 = VC + \alpha$ svo $\alpha = -VC$ og við höfum því:

$$Q(t) = VC\left(1 - e^{-t/RC}\right) = Q_{\max}\left(1 - e^{-t/RC}\right).$$

□

Við höfum þá samanburð við einfölda sveifluhreyfingu $\ddot{z} = -\omega^2 z$ og höfum því:

Skilgreining 20.3. Diffurjafna af gerðinni $\dot{z} = -\alpha z$ kallast *hrörnunarhreyfing* og hefur lausn:

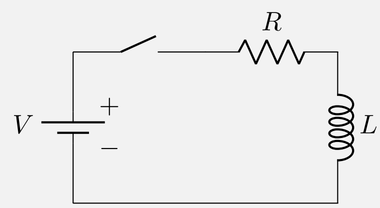
$$z(t) = z_0 e^{-\alpha t}.$$

20.1.2 LR-rás:

Lögmál 20.4. (Með spennugjafa) Lítum á rafrás með spennugjafa V, viðnámi R og spólu með spanstuðul L þar sem að til að byrja með er engin hleðsla á þéttinum, $Q_0 = 0\,\mathrm{F}$. Til að byrja með er rásin rofin þannig að enginn straumur flæðir í rásinni. Við tímann $t = 0\,\mathrm{s}$ lokum við fyrir rofan svo að straumur geti flætt í rásinni. Þá mun straumurinn í rásinni aukast smátt og smátt og verður við tímann, t, gefin með:

$$I(t) = I_{\max}\left(1 - e^{-tR/L}\right).$$

Þar sem $I_{\max} = \frac{V}{L}$ er mesti straumurinn í rásinni. Sér í lagi sjáum við að þegar $t \to \infty$ þá má líta á sem svo að straumurinn $I(t) \approx I_{\max}$ sé fastur í rásinni og að það sé einungis spennufall yfir viðnámið.



Útleiðsla: Við höfum þá að:

$$V - IR - L\dot{I} = 0$$

Sem við getum umritað þannig að:

$$\dot{I} + \frac{R}{L}I = \frac{V}{L}.$$

Við margföldum í gegn með $e^{tR/L}$ og fáum:

$$\frac{d}{dt}\left(Ie^{tr/L}\right) = \dot{I}e^{tr/L} + \frac{R}{L}e^{tR/L}I = \frac{V}{L}e^{tR/L}$$

Þar sem að við höfum notað diffrun margfeldis. En þar með fáum við með því að tegra að:

$$Ie^{tR/L} = \int \frac{V}{L}e^{tR/L}dt = \frac{V}{R}e^{tR/L} + \alpha$$

þar sem α er tegrunarfasti sem ákvarðast af upphafsskilyrðinu $I(0) = I_0 = 0\,\mathrm{A}$. En við höfum þar með sýnt að:

$$I(t) = \frac{V}{L} + \alpha e^{-tR/L}$$

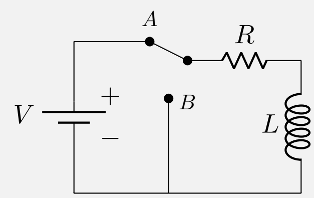
Upphafsskilyrðið gefur síðan að: $I(0) = I_0 = 0 = \frac{V}{L} + \alpha$ en þar með er er $\alpha = -\frac{V}{L}$ svo við ályktum að:

$$I(t) = \frac{V}{L}\left(1 - e^{-tR/L}\right) = I_{\max}\left(1 - e^{-tR/L}\right).$$

□

Lögmál 20.5. (Án spennugjafa) Lítum á rafrás sem hefur verið tengd í langan tíma þannig að fastur straumur I_0 flæðir í rásinni. Við tímann $t = 0\,\mathrm{s}$ færum við rofann úr stillingu A í stillingu B. Þá mun straumurinn í rásinni hrörna samkvæmt:

$$I(t) = I_0 e^{-Rt/L}$$



Útleiðsla: Við skulum sýna aðra lausnaraðferð með aðskilnaði breytistærða (annars er hægt að herma eftir útleiðslunni fyrir RC-rásina nema núna er margfaldað með $e^{Rt/L}$ í stað $e^{t/RC}$). Lykkjulögmál Kirchoffs gefur:

$$-IR - L\frac{dI}{dt} = 0 \implies \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I$$

Aðskiljum breytistærðir með því að margfalda báðar hliðar með dt og einangra báðar hliðar þannig að vinstri hliðin verður einungis háð I en hægri hliðin einungis háð t og tegra svo:

$$\begin{aligned}
dI = -\frac{R}{L}Idt \implies \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt &\implies \int_{I_0}^{I}\frac{dI}{I} = \int_0^t -\frac{R}{L}dt \\
&\implies [\ln(I)]_{I_0}^{I} = \left[-\frac{R}{L}t\right]_0^t \\
&\implies \ln(I) - \ln(I_0) = -\frac{R}{L}t - \left(-\frac{R}{L}\cdot 0\right) = -\frac{R}{L}t \\
&\implies \ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -\frac{R}{L}t \\
&\implies \frac{I}{I_0} = e^{-\frac{Rt}{L}}
\end{aligned}$$

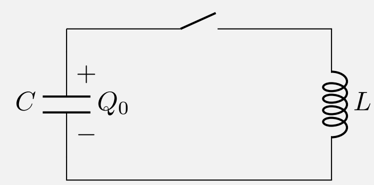
Sem gefur því niðurstöðuna:

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{Rt}{L}}.$$

20.1.3 LC-rás:

Lögmál 20.6. Lítum á rafrás með spólu með spanstuðli L og þétti með rýmd C og upphafshleðslu Q_0. Til að byrja með er rásin rofin þannig að enginn straumur flæðir í rásinni. Við tímann $t = 0\,\mathrm{s}$ lokum við fyrir rofan svo að straumur geti flætt í rásinni. Þá mun þéttirinn hlaðast og afhlaðast á einfaldri sveifluhreyfingu og hleðslan á þéttinum eftir tímann, t, verður gefin með:

$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega t), \qquad \text{þar sem sveiflutíðnin er} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



Útleiðsla: Samkvæmt lykkjulögmáli Kirchoffs er þá:

$$\frac{Q}{C} - L\frac{dI}{dt} = 0$$

Við notum síðan að $\frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{d^2Q}{dt^2}$ og ályktum að:

$$\ddot{Q} = -\frac{1}{LC}Q$$

Sem er einföld sveifluhreyfing með sveiflutíðni $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ svo við ályktum að:

$$Q(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Þar með er straumurinn í rásinni gefinn með:

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

En upphafsskilyrðin $I(0) = 0$ gefur að $\varphi = 0\,\mathrm{rad}$ og upphafsskilyrðið $Q(0) = Q_0$ gefur okkur þá að:

$$Q(t) = Q_0\cos(\omega t), \qquad I(t) = Q_0\omega\sin(\omega t).$$

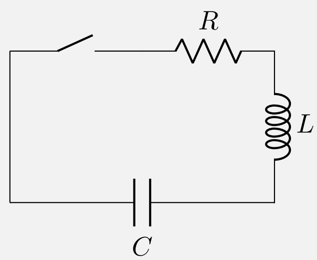
□

20.1.4 RCL-rás:

Lögmál 20.7. (RCL-rás) Lítum á RCL-rás þar sem að viðnámi R, spólu með spanstuðul L og þétti með rýmd C hefur verið komið fyrir í rafrás. Þéttirinn er fullhlaðinn og við tímann $t = 0\,\mathrm{s}$ lokum við rofanum. Þá er hleðslan á þéttinum á hrörnunar-sveifluhreyfingu og er gefin með:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\alpha t}\cos(\Omega t + \varphi), \qquad \text{þar sem að} \quad \alpha = \frac{R}{2L}, \quad \Omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

Sér í lagi sjáum við að $\lim\limits_{t\to\infty} Q(t) = 0$ svo eftir að rofinn hefur verið lokaður lengi er ekkert að gerast.



Útleiðsla: Samkvæmt lykkjulögmáli Kirchoffs er:

$$-\frac{Q}{C} - IR - L\dot{I} = 0$$

Sem við getum umritað þannig að:

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0.$$

Sem er óhliðruð, línuleg 2. stigs diffurjafna með fastastuðlum. Við skoðum því kennimargliðuna:

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC}$$

Sem hefur rætur:

$$\lambda_{\pm} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\frac{R}{2L} \pm i\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

Þar sem að við höfum notað skilgreininguna á tvinntölunni $i^2 = -1$. Í okkar umfjöllun munum við alltaf gera ráð fyrir að stærðin undir rótinni sé jákvæð það er að segja að:

$$\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2 > 0 \implies R > \frac{2L}{\sqrt{LC}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

(það er hægt að skoða tilvikin þegar að $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ og þegar $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ en það hefur aðra eðlisfræðilega merkingu sem að við munum ekki fara út í núna). Lausnirnar eru því gefnar með:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\alpha t}\cos(\Omega t + \varphi), \qquad \text{þar sem að} \quad \alpha = \frac{R}{2L}, \quad \Omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

20.2 Riðspennurásir (AC)

Lítum á RCL-rás sem er raðtengd rás við riðspennugjafa $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$ sem sveiflast með sveiflutíðni ω, viðnám R, þétti með rýmd C og spólu með spanstuðul L. Við skilgreinum stærðirnar:

$$X_L = \omega L, \qquad X_C = \frac{1}{\omega C}, \qquad Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \qquad \text{og} \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)$$

Þá gildir að straumurinn í rásinni er gefinn með:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi), \qquad I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}.$$

og spennuföllinn yfir íhlutina eru:

$$\Delta V_C = I_0 X_C \sin(\omega t - \varphi), \qquad \Delta V_R = I_0 R \cos(\omega t - \varphi), \qquad \Delta V_L = -I_0 X_L \sin(\omega t - \varphi).$$

Meðalaflið sem að tapast í viðnáminu er gefið með:

$$P_{_R} = P_{_\mathcal{E}} = I_{\text{rms}} \mathcal{E}_{\text{rms}} \cos\varphi.$$

Þar sem að $I_{\text{rms}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0$ og $\mathcal{E}_{\text{rms}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0$.

Útleiðsla: Samkvæmt lykkjulögmáli Kirchoffs er diffurjafnan okkar:

$$\mathcal{E}(t) - \frac{Q}{C} - L\frac{dI}{dt} - IR = 0 \implies \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC}Q = \frac{\mathcal{E}_0}{L}\cos(\omega t)$$

En við höfum þegar leyst óhliðruðu diffurjöfnuna. Fullkomin lausn á þessari diffurjöfnu fæst því með því að bæta við tiltekinni lausn, þ.e. $Q_{\text{f}} = Q_{\text{ó}} + Q_{\text{t}}$ þar sem að:

$$Q_{\text{ó}}(t) = Q_0 e^{-\alpha t} \cos(\Omega t + \varphi)$$

úr útleiðslunni á undan þá sjáum við að eftir að rásin hefur verið kveikt í langan tíma (lesist nokkrar sekúndur) þá er $\lim_{t\to\infty} Q_{\text{ó}}(t) = 0$ og tiltekna lausnin því eina lausnin sem að skiptir máli. Til þess að ákvarða hana þá giskum við á (heppilega valda) lausn af gerðinni:

$$Q(t) = Q_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

og stingum því inn í diffurjöfnuna. Þá er:

$$I(t) = \dot{Q}(t) = \omega Q_0 \cos(\omega t - \varphi), \qquad \dot{I}(t) = \ddot{Q}(t) = -\omega^2 Q_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

Þá fáum við að upprunalega diffurjafnan gefur:

$$-\omega^2 Q_0 L \sin(\omega t - \varphi) + R\omega Q_0 \cos(\omega t - \varphi) + \frac{Q_0}{C}\sin(\omega t - \varphi) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$$

Rifjum síðan upp hornafallareglurnar:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta, \qquad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$

Sem gefur því að:

$$\left(-\omega^2 L + \frac{1}{C}\right)[\sin(\omega t)\cos(\varphi) - \cos(\omega t)\sin(\varphi)] + R\omega\,[\cos(\omega t)\cos(\varphi) + \sin(\omega t)\sin(\varphi)] = \frac{\mathcal{E}_0}{Q_0}\cos(\omega t)$$

Með því að endurraða sjáum við að:

$$\left(\omega^2 L \sin\varphi + R\omega\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{C}\right)\cos(\omega t) + \left(-\omega^2 L\cos\varphi + R\omega\sin(\varphi) + \frac{\cos(\varphi)}{C}\right)\sin(\omega t) = \frac{\mathcal{E}_0}{Q_0}\cos(\omega t)$$

Með því að bera saman stig og stuðla vinstra og hægra meginn sjáum við því að:

$$\begin{cases} \omega^2 L \sin\varphi + R\omega\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{C} = \frac{\mathcal{E}_0}{Q_0} \\ -\omega^2 L\cos\varphi + R\omega\sin(\varphi) + \frac{\cos\varphi}{C} = 0 \end{cases}$$

Með því að leysa neðri jöfnuna fáum við að:

$$-\omega^2 L + \frac{1}{C} = -R\omega\tan(\varphi) \implies \tan(\varphi) = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{X_L - X_C}{R} \implies \varphi = \arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right).$$

Þar sem að við höfum skilgreint $X_L = \omega L$ og $X_C = \frac{1}{\omega C}$. En við athugum að:

$$\frac{1}{\cos^2\varphi} = 1 + \tan^2\varphi \implies \frac{1}{\cos\varphi} = \sqrt{1+\tan^2\varphi} = \sqrt{1 + \left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)^2} = \frac{1}{R}\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

Fáum þá úr efri jöfnunni að:

$$Q_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega^2 L\sin\varphi + R\omega\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{C}} = \frac{\frac{\mathcal{E}_0}{\cos\varphi}}{\omega^2 L\tan\varphi + R\omega - \frac{1}{C}\tan\varphi} = \frac{\frac{\mathcal{E}_0}{\omega R}\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}{(X_L - X_C)\frac{X_L - X_C}{R} + R} = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}.$$

Sem sýnir því að:

$$Q_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega Z}, \qquad \text{þar sem við höfum skilgreint} \qquad Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

En þar með ályktum við að:

$$Q(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega Z}\sin(\omega t - \varphi)$$

En þá er straumurinn í rásinni gefinn með:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}\cos(\omega t - \varphi).$$

Við skilgreinum þá $I_0 = \omega Q_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}$. Þá er sér í lagi:

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{\mathcal{E}_0\omega}{Z}\sin(\omega t - \varphi)$$

Við sjáum þá að spennufallið yfir þéttinn er gefið með:

$$\Delta V_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega C Z}\sin(\omega t - \varphi) = I_0 X_C \sin(\omega t - \varphi).$$

Þá er:

$$\Delta V_R(t) = I(t)R = I_0 R\cos(\omega t - \varphi)$$

Síðan er:

$$\Delta V_L(t) = L\frac{dI}{dt} = -\omega L I_0\sin(\omega t - \varphi) = -I_0 X_L\sin(\omega t - \varphi) = -I_0 X_L \sin(\pi + \varphi - \omega t) = I_0 X_L\sin(\omega t - \varphi - \pi).$$

Meðalaflið sem að tapast út um viðnámið er jafnt aflinu sem að riðspennugjafinn gefur svo við höfum að:

$$P_R = P_\varepsilon = \frac{1}{T}\int_0^T I(t)\mathcal{E}(t)dt = \frac{I_0\mathcal{E}_0}{T}\int_0^T \cos(\omega t - \varphi)\cos(\omega t)dt = \frac{I_0\mathcal{E}_0}{T}\int_0^T \left[\cos^2(\omega t)\sin(\varphi) + \sin(\omega t)\cos(\omega t)\cos(\varphi)\right]dt$$

Fyrra hornafallið gefur núll þegar að við tegrum yfir eina lotu $T = \frac{2\pi}{\omega}$ en seinna hornafallið gefur $\frac{T}{2}\cos(\varphi)$.
Við ályktum því að:

$$P_R = P_\varepsilon = \frac{1}{2}I_0\mathcal{E}_0\cos\varphi = I_{\mathrm{rms}}\mathcal{E}_{\mathrm{rms}}\cos\varphi.$$

20.3 Dæmi

Dæmatími 27: RC-rásir

RC-rás er rás sem að inniheldur einungis viðnám R og þétti með rýmd C. Lykkjulögmálið gefur þá:

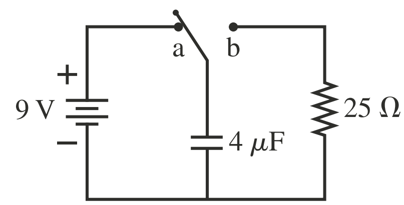
$$\frac{Q}{C} - IR = 0 \implies \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC}Q = 0 \implies Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}$$

Með því að diffra fáum við síðan að straumurinn í rásinni er:

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{RC}e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC}$$

Stærðin $\tau = RC$ kallast stundum *tímafasti* rásarinnar.

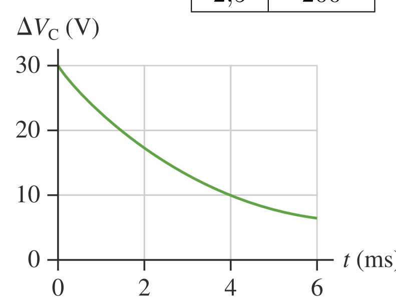
(28.36) Rofinn á myndinni hér til hægri hefur verið í stillingu a í langan tíma. Við tímann $t = 0\,\text{s}$ er rofinn færður yfir í stillingu b. Hver verður hleðslan á þéttinum, $Q(t)$, og straumurinn í gegnum viðnámið, $I(t)$ **(a)** einmitt þegar að rofanum er lokað? **(b)** eftir $50\,\mu\text{s}$ **(c)** eftir $200\,\mu\text{s}$.



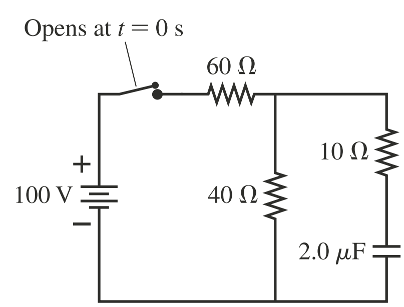
(28.68) Þið eruð með fullhlaðinn $20\,\mu\text{F}$ þétti sem að þú tengir við tímann $t = 0\,\text{s}$ inn í rafrás með óþekkt viðnám. Í töflunni hér til hægri sjást straumgildin, I, sem að straummælirinn sýndi við tímann t. Gerið viðeigandi graf af gögnunum og ákvarðið viðnámið í rásinni og upphaflega spennufallið yfir þéttinn við tímann $t = 0\,\text{s}$.

t [s]	I [μA]
0,5	890
1,0	640
1,5	440
2,0	270
2,5	200

(28.70) Þéttir með rýmd $50\,\mu\text{F}$ hafði upphaflega verið hlaðinn þannig að spennumununurinn á milli platnanna var $30\,\text{V}$. Grafið hér til hægri sýnir spennufallið, ΔV_C, yfir þéttinn sem fall af tíma, t, þegar að þéttirinn er afhlaðinn í gegnum viðnám. Ákvarðið viðnámið, R.



(28.80) Rofinn á myndinni hér til hægri hefur lokaður í langan tíma. Við tímann $t = 0\,\text{s}$ er rofinn opnaður. **(a)** Hver er hleðslan á þéttinum áður en rofinn er opnaður? **(b)** Hversu langur tími líður þar til að hleðslan á þéttinum hefur minnkað niður í $10\,\%$ af upphaflegu gildi sínu?



(28.36) $I(50\,\mu\text{s}) = 220\,\text{mA}$, $I(200\,\mu\text{s}) = 49\,\text{mA}$. **(28.68)** $R \approx 64\,\text{k}\Omega$, $I_0 \approx 1180\,\mu\text{A}$, $\Delta V_C(0) \approx 75{,}5\,\text{V}$. **(28.70)** $R = 73\,\Omega$. **(28.80)** $Q_0 = 80\,\mu\text{C}$, $t = 230\,\mu\text{s}$.

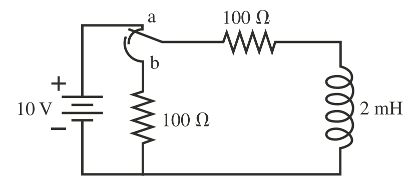
Dæmatími 28: LR-rásir

LR-rás er rás sem að inniheldur einungis viðnám R og spólu með spanstuðul L. Lykkjulögmálið gefur:

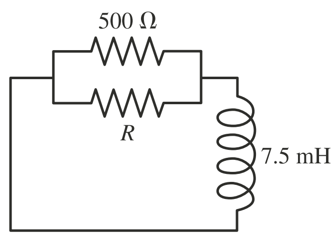
$$-IR - L\frac{dI}{dt} = 0 \implies \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0 \implies I(t) = I_0 e^{-Rt/L}$$

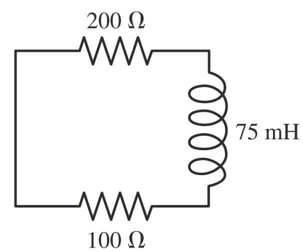
Stærðin $\tau = \frac{L}{R}$ kallast stundum *tímafasti* rásarinnar (sbr. tímafasti RC-rásarinnar).

(30.16) Rofinn á myndinni hér til hægri hefur verið í stillingu a í langan tíma. Við tímann $t = 0\,\mathrm{s}$ er rofinn færður yfir í stillingu b. **(a)** Hver er straumurinn í rásinni einmitt við tímann $t = 0\,\mathrm{s}$? **(b)** Hver verður straumurinn í rásinni við tímann $t = 5{,}0\,\mu\mathrm{s}$? **(c)** Við hvaða tíma mun straumurinn í rásinni hafa minnkað niður í $1\,\%$ af upphaflegu gildi sínu?



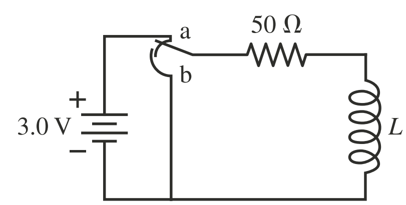
(30.34) Lítum á rafrásina hér fyrir neðan til vinstri. Hvað gildi á R gefur $25\,\mu\mathrm{s}$ tímafasta fyrir rafrásina?





(30.35) Lítum á rafrásina hér fyrir ofan til hægri. Við tímann $t = 0\,\mathrm{s}$ er straumurinn í rásinni I_0. Við hvaða tíma veðrur straumurinn í rásinni $\frac{1}{2}I_0$?

(30.79) Lítum á rafrásina hér til hægri. Við tímann $t = 0\,\mathrm{s}$ er rofinn færður úr stöðu a í stöðu b. Við tímann $t = 5{,}0\,\mu\mathrm{s}$ hefur spólan tapað helmingnum af orkunni sem að hún geymdi við tímann $t = 0\,\mathrm{s}$. Hvert er gildið á spanstuðli spólunnar?



(30.16) $I_0 = 0{,}10\,\mathrm{A}$, $I(5{,}0\,\mu\mathrm{s}) = 61\,\mathrm{mA}$, $t = 46\,\mu\mathrm{s}$. **(30.34)** $750\,\Omega$. **(30.35)** $173\,\mu\mathrm{s}$. **(30.79)** $L = 720\,\mu\mathrm{H}$.

Dæmatími 29: LC-rásir

LC-rás er rás sem að inniheldur einungis spólu með spanstuðul L og þétti með rýmd C. Fáum þá:

$$\frac{Q}{C} - L\frac{dI}{dt} = 0 \implies \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC}Q = 0 \implies Q(t) = Q_{\max}\cos(\omega t + \varphi), \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

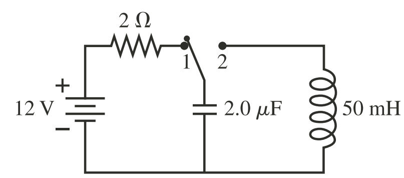
Sem er einfaldlega einföld sveifluhreyfing. Fasahornið ákvarðast af upphafsskilyrðunum og rafstraumurinn fæst með því að diffra hleðsluna. Stærðin $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ kallast sveiflutíðni rásarinnar.

(30.71) Þú hefur fengið LC-rás í jólagjöf frá ömmu þinni (þú baðst reyndar um RC-rás). Amma þín keypti spólu með spanstuðul 20 mH og plötuþétti með rýmd 8,0 pF. Amma þín var búin að hlaða plötur plötuþéttisins þannig að spennumunurinn á milli platna plötuþéttisins er 25 V. Þú tengir síðan rásina á aðfangadag við tímann t = 18:00. **(a)** Hversu langur tími mun líða þar til að þéttirinn er alveg afhlaðinn í fyrsta skipti? **(b)** Hver verður straumurinn sem að fer í gegnum spóluna einmitt þá?

(30.72) Spennufallið yfir þétti með rýmd 0,10 μF er 5,0 V. Við tímann $t = 0$ s er þéttirinn tengdur við spólu með spanstuðul 1,0 mH. Hver verður mesti straumurinn sem að fer í gegnum spóluna í sveifluhreyfingunni?

(30.73) Sem hluti af munnlegu prófi í eðlisfræði þá biður erfiði eðlisfræðikennarinn þinn þig um að búa til LC-rás sem að sveiflast með tíðni 10 kHz. Sem varúðarráðstöfun þá biður hann þig þar að auki um að sjá til þess að mesti straumurinn í rásinni sé 0,10 A og að mesta orkan sem að þéttirinn geymir sé $1{,}0 \cdot 10^{-5}$ J. Hver á rýmd þéttisins að vera og hver á spanstuðull spólunnar að vera?

(30.33) Rofinn á myndinni hér til hægri hefur verið í stillingu 1 í langan tíma. Hann er færður yfir í stillingu 2 við tímann $t = 0$ s. **(a)** Hver verður mesti straumurinn sem að fer í gegnum spóluna? **(b)** Við hvaða tíma verður straumurinn mestur (í fyrsta skipti) í spólunni?



(30.71) $t = 628$ ns, 500 μA. **(30.72)** $I_{\max} = 50$ mA. **(30.73)** $C = 130$ nF, $L = 2{,}0$ mH.
(30.33) $I_{\max} = 76$ mA, $t = 500\,\mu$s.

Dæmatími 30: RCL-rásir með AC-spennugjafa

RCL-sveiflurásir eru rásir sem innihalda sveifluspennugjafa $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$ sem er raðtengdur við viðnám, R, spólu með spanstuðul, L og þétti með rýmd, C. Lögmál Kirchoffs gefa þá að:

$$\mathcal{E}(t) - \Delta V_R - \Delta V_L - \Delta V_C = 0$$

Með því að leysa þessa diffurjöfnu fæst að straumurinn í rásinni er gefinn með:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi), \quad \text{þar sem} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right).$$

Þar að auki sem:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}, \qquad Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \qquad X_L = \omega L, \qquad X_C = \frac{1}{\omega C}.$$

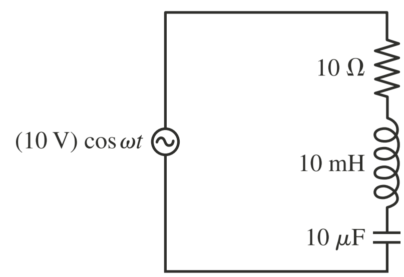
Í þessum fræðum er líka oft fjallað um svokölluð *rms*-gildi. Þá skilgreinum við:

$$\mathcal{E}_{\mathrm{rms}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}, \qquad I_{\mathrm{rms}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$

Aflið sem að sveifluspennugjafinn gefur tapast síðan í viðnáminu og meðalaflið sem að tapast er:

$$P = \mathcal{E}_{\mathrm{rms}} I_{\mathrm{rms}} \cos\varphi.$$

(32.30) Raðtengd RLC-rás samanstendur af $50\,\Omega$ viðnámi, $3{,}3\,\mathrm{mH}$ spólu og $480\,\mathrm{nF}$ þétti. Hún er tengd við sveifluspennu með útslag $5{,}0\,\mathrm{V}$. Ákvarðið samviðnám (Z) rásarinnar, stærsta gildið á straumnum í rásinni, fasahornið og meðalaflið við eftirfarandi gildi á tíðninni: **(a)** $3000\,\mathrm{Hz}$ **(b)** $4000\,\mathrm{Hz}$



(32.32) Lítum á rásina hér til hægri. **(a)** Hver er hermitíðni rásarinnar? (Ath. við segjum að rásin sé við *hermitíðni* ef að *samviðnám rásarinnar*, $Z = R$ en þá er $X_L = X_C$). **(b)** Hvert er fasahornið við hermitíðnina? **(c)** Hvert er meðalaflið sem að tapast í rásinni við hermitíðnina?

(32.52) Raðtengd RLC-rás samanstendur af $550\,\Omega$ viðnámi, $0{,}10\,\mathrm{H}$ spólu og $100\,\mu\mathrm{F}$ þétti. Hún tekur $2{,}5\,\mathrm{A}$ rms-straum þegar að hún er tengd við $60\,\mathrm{Hz}$ sveifluspennugjafa. Hver eru gildin á: **(a)** rms-spennunni, $\mathcal{E}_{\mathrm{rms}}$ **(b)** fasahorninu, φ? **(c)** Meðalaflinu sem að tapast í rásinni?

(32.53) Raðtengd RLC-rás samanstendur af $550\,\Omega$ viðnámi, $2{,}1\,\mathrm{mH}$ spólu og $550\,\mathrm{nF}$ þétti. Hún er tengd við $50\,\mathrm{V}$ rms-spennugjafa sem er hægt að stilla sveiflutíðnina á. Í $2{,}5\,\mathrm{mm}$ fjarlægð frá einum af vírunum í rásinni má greina segulsvið sem að sveiflast vegna riðstraumsins í rásinni. Hvert er stærsta gildið á segulsviðinu sem að er hægt að búa til og við hvaða sveiflutíðni er það?

(32.30) $Z_a = 179{,}8\,\Omega, I_a = 27{,}8\,\mathrm{mA}, \varphi_a = 1{,}29\,\mathrm{rad}, P_a = 19{,}3\,\mathrm{mW}$. $Z_b = 173{,}2\,\Omega, I_b = 28{,}9\,\mathrm{mA}, \varphi_b = 1{,}28\,\mathrm{rad}, P_b = 20{,}7\,\mathrm{mW}$. **(32.32)** $f = 503\,\mathrm{Hz}$, $\varphi = 0\,\mathrm{rad}$, $P = 5{,}0\,\mathrm{W}$. **(32.52)** $\mathcal{E}_{\mathrm{rms}} = 128\,\mathrm{V}$, $\varphi = 0{,}22\,\mathrm{rad}$, $P = 312\,\mathrm{W}$. **(32.53)** $B_{\max} = 7{,}3\,\mu\mathrm{T}$, $f = 4680\,\mathrm{Hz}$.

Kafli 21

Saga atómsins

21.1 Hið agnarsmáa kemur í skömmtum

Sagan af hinu agnarsmáa hefst hjá forngríska heimspekingnum, Demókrítusi (460-370 f. Kr), sem staðhæfði fystur manna að allt efni samanstæði af litlum ókljúfanlegum einingum sem að hann kallaði frumeindir eða atóm. Síðan gerðist því miður ekkert í atómsögunni í meira en þúsund ár og hugmyndir Demókrítusar féllu smátt og smátt í gleymsku. Það var kannski aðallega af því að kenningar Demókrítusar voru í beinni mótsögn við kenningar Aristótalesar (sem er og var miklu vinsælli heimspekingur heldur en Demókrítus, en það segir kannski allt sem segja þarf um heimspekinga). Söguna tók síðan upp að nýju árið 1797 hjá breska efnafræðingnum John Dalton. Hann hafði tekið eftir því að þegar að maður blandar saman tveimur mismunandi efnum (t.d. nitri og súrefni) til þess að búa til nýja efnablöndu þá getur maður fengið margar mismunandi útkomur eftir því í hvaða hlutföllum maður blandar saman efnunum. Til dæmis ef að maður tekur 140 g af nitri og bætir við 80 g af súrefni þá fær maður hláturgas eða tvínituroxíð (N_2O). Hinsvegar ef að maður tvöfaldar magnið af súrefni og bætir við 160 g í staðinn þá fær maður nituroxíð (NO). Loks ef maður fjórfaldar upprunalega magnið af súrefni og setur 320 g af súrefni þá fær maður niturtvíoxíð (NO_2). Það eru semsagt einhver tengsl við heiltölurnar 1:2:4 (og um leið og við sjáum tengsl við heiltölurnar þá eigum við að hugsa um einhver skammtatengsl!).

Þessi uppgötvun Daltons kann að virðast augljóst fyrir skólagengnum nútímamanni sem hefur þegar lært atómkenninguna og veit að það er ekki hægt að blanda frumefnum saman í hvaða hlutföllum sem er (til dæmis er ekki til $NO_{\sqrt{2}}$ því það er ekki hægt að tengja $\sqrt{2}$ súrefnisatóm við hvert niturатóm). En á þeim tíma þegar Dalton setti þessar athuganir fram þá var þetta afar skrítin niðurstaða sem stangaðist á við upplifun samtímamannsins af náttúrunni. Til þess að setja þetta í samhengi, þá var þetta svolítið eins og að maður væri með uppskrift að piparkökum og myndi síðan hundraðfalda magnið af pipar (eins og bakaradrengurinn í Dýrunum í Hálsaskógi) og í staðinn fyrir að fá mjög vondar piparkökur þá fengi maður dásemdar vínabrauðslengju.

Með þessari uppgötvun Daltons fóru hjólin að snúast því nú var hægt að nýta sér þessa skammtahugmynd til þess að mæla atómmassa tiltekinna frumefna (í hlutfalli við hvert annað). Þá skilgreindu menn léttasta frumefnið, vetni, þannig að það hefði atómmassann 1 u (þá var auðvitað ekki þekkt að $1\,\mathrm{u} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ þar að auki sem að það er ólíklegt að Dalton hafi notað kílóið þar sem að það hafði fyrst verið skilgreint tveimur árum fyrr, árið 1795). Þannig var hægt að ákvarða að súrefni hefði atómmassann 16 u með því að vigta það í samanburði við vetni í efnasamsetningunni H_2O. Reyndar hélt Dalton sjálfur lengi vel að vatn væri efnasambandið HO sem gaf honum þá röngu niðurstöðu að hlutföllin væru þannig að súrefni hefði atómmassann 5,5 u (hann gerði þar að auki algebruvillu!) sem sýnir kannski helst að þrátt fyrir þessa stórmerku uppgötvun Daltons þá var enn langt í land hvað varðaði heilstæða atómkenningu. Dalton birti síðan árið 1805 töflu sem sýndi massa mismunandi frumefna í hlutfalli við massa vetnis. Það má segja að þetta hafi í einhverjum skilningi verið fyrsta lotukerfið. Þar með hafði atómkenning Demókrítusar verið endurvakin og fyrsti vísirinn að mólhugtakinu verið lagður (mólið er skilgreint sem fjöldi kolefnisatóma í 12 g af kolefni en það væri alveg eins hægt að skilgreina það eins og Dalton gerði sem fjölda vetnisatóma í 1 g af vetni).

Með frumeindamassakenningu Daltons fóru menn að uppgötva ný efni og bæta í töflu Daltons. Árið 1863 var búið að bera kennsl á 56 frumefni og greina frumeindamassa þeirra. Það var hinsvegar ekki fyrr en árið 1867 sem að rússneski efnafræðingurinn Dmitri Mendelejev bjó til hið hefðbundna lotukerfi sem að við þekkjum í dag. Sagan segir að lotukerfið hafi birst honum í draumi:

> *„I saw in a dream a table where all elements fell into place as required. Awakening, I immediately wrote it down on a piece of paper, only in one place did a correction later seem necessary.“*
>
> **- Dmitri Mendelejev, 1867**

Eftir að Mendelejev hafði safnað saman efnunum í samræmi við efnaeiginleika þeirra tók hann eftir að það voru göt í töflunni. Hann dró þá ályktun að það ætti eftir að uppgötva frumefni sem að myndu fylla í skarðið. Þannig tókst honum að spá fyrir um tilvist þriggja nýrra efna, German, (Ge), Gallín, (Ga) og Skandín (Sc). Það sem meira var þá spáði hann fyrir um frumeindamassa þeirra ásamt ýmsum efnaeiginleikum þeirra. German fannst síðan árið 1875, Skandín árið 1879 og Gallín árið 1886 og öll smellpössuðu inn í götin í lotukerfi Mendelejevs eins og hann hafði spáð fyrir um. Þetta átti ekki eftir að vera síðasta skiptið í mannkynssögunni þar sem að fræðimanni tókst að spá fyrir um tilvist öreindar (vitið þér enn eða hvað?).

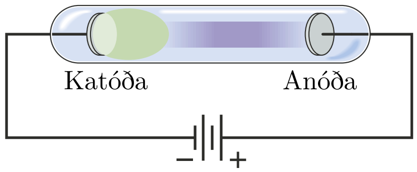
Með frumeindamassakenningu Daltons hafði verið hægt að raða frumefnunum með frumeindamassa A í sætaröð með sætistölu Z. Til dæmis hafði vetni frumeindamassa $A = 1$ og sætistölu $Z = 1$ en súrefni hafði frumefnamassa $A = 16$ og sætistölu $Z = 8$. En lotukerfi Mendelejevs benti á að það væru enn leyndardómar sem væri hægt að afhjúpa. Hvað var það sem að stjórnaði þessum efnaeiginleikunum sem að Mendelejev gat spáð fyrir um? Var það kannski rétt hjá Aristótalesi eftir allt saman, að þessi ókljúfanlegu atóm, voru hugsanlega kljúfanleg og höfðu innri byggingu sem gat útskýrt þessa efnaeiginleika og þessi mynstur í lotukerfinu? Það er kannski í einhverjum skilningi í svona vangaveltum sem að hjarta eðlisfræðinnar liggur. Við þurfum stöðugt að vera að bera kennsl á mynstur í náttúrunni og reyna að finna leiðir til þess að útskýra þessi mynstur. Það vill bara oftast svo óheppilega til að um leið og ein útskýring er fundin þá uppgötva menn nýjar tengingar á öðrum sviðum sem valda því að við berum kennsl á enn fleiri og flóknari mynstur og vítahringurinn endurtekur sig í sífellu!

21.2 Thomson uppgötvar rafeindina

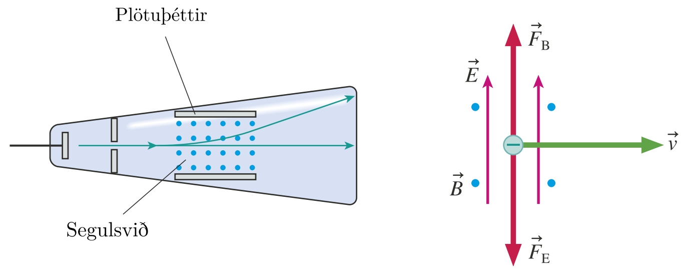
Það var síðan árið 1897 sem að Breski eðlisfræðingurinn og nóbelsverðlaunahafinn, J.J. Thomson[1], uppgötvaði rafeindina og þar með hafði hið ókljúfanlega atóm verið klofið! Við skulum fjalla aðeins um það hvernig að J.J. Thomson uppgötvaði rafeindina en til þess að skillja aðdraganda þess þá þurfum við að fara aðeins aftur á bak í sögunni. Við þurfum að fara aftur til ársins 1838 til Michael Faradays (já það er maðurinn á bak við hið alræmda spanlögmál). Faraday langaði til þess að skilja hvernig og hvort að það væri hægt að leiða rafmagn í gegnum gas. Hann tók því tvær plötur (í plötuþétti) og setti þær inn í glerpípu og lækkaði þrýstinginn á gasinu. Hann tengdi síðan plöturnar við jafnspennugjafa. Honum til mikillar undrunar þá byrjaði gasið að glóa með fjólubláum lit! Þessir geislar voru kallaðir katóðugeislar[2] því þeir komu frá neikvæðu plötu plötuþéttisins (hægt er að athuga það með því að setja eitthvað fyrir og sjá hvorum meginn skugginn fellur). Nú á dögum vitum við að þessir svokölluðu katóðugeislar eru ekkert annað en straumur af rafeindum (það var einmitt uppgötvun J.J. Thomson). Þegar að rafeidnirnar lenda í árekstrum við gasið þá örvast gassameindirnar upp í hærra orkustig en þegar að þær falla aftur niður í grunnástand sitt þá geislast orkumismunur ástandanna út sem ljós. Í rauninni má líta á sem svo að þessi glerpíputilraun Faradays hafi verið fyrsti öreindahraðallinn. Næstu árin voru menn að betrumbæta glerpíputilraun Faradays.

[1] J.J. Thomson var doktorsleiðbeinandi fyrir 8 aðra nóbelsverðlaunahafa (6 í eðlisfræði og 2 í efnafræði).
[2] Orðin katóða og anóða eru tekin úr forngrísku og merkja annars vegar lækkun og hinsvegar lyfting eða hækkun

Glerpíputilraun Faradays



Þversviðstilraun Thomson



Snildarhugmynd J.J. Thomson var síðan að setja inn einsleitt rafsvið og segulsvið inn í miðjuna á glerpípunni (með plötuþétti og spólu). En á þeim tíma var þekkt að rafsegulkraftarnir sem að hlaðnar agnir finna fyrir vegna rafsviðsins og segulsviðsins eru gefnir með:

$$F_E = qE, \qquad \text{og} \qquad F_B = qvB$$

En í tilviki Thomsons þá stillti hann tækinu sínu þannig upp að katóðugeislinn ferðaðist beint á milli platna plötuþéttisins. Þá gat hann ályktað að:

$$F_B = F_E \implies qE = qvB \implies v = \frac{E}{B}.$$

Eftir að hann hafði síað út hraða eindanna í katóðugeislanum þá sendi hann geislan áfram í einsleitt segulsvið (sjá massagreininn í fyrirlestri 6). Hann gat síðan mælt geisla hringhreyfingarinnar sem að eindir katóðugeislans ferðuðust með. Þá fékk hann samkvæmt hringhreyfingunni að:

$$m\frac{v^2}{r} = qvB \implies \frac{q}{m} = \frac{v}{rB}.$$

Það var engin leið fyrir Thomson til þess að ákvarða hleðslu né massa eindanna í katóðugeislanum. En hann gat mælt hlutfallið milli hleðslu eindnana og massa þeirra: $\frac{q}{m}$. Gildið sem að hann fékk í tilrauninni fyrir katóðugeislana var:

$$\frac{e}{m_e} = 1{,}76 \cdot 10^{11}\ \mathrm{C/kg}.$$

En þetta var miklu hærra hlutfall heldur en allt annað sem var þekkt á þessum tíma! Næst hæsta hlutfallið sem var þekkt á þessum tíma var fyrir vetnisjónina H^+ (betur þekkt sem róteind í dag en róteindin hafði ekki verið uppgötvuð á þeim tíma) en þar var hlutfallið:

$$\frac{e}{m_p} = 9{,}59 \cdot 10^{7}\ \mathrm{C/kg}$$

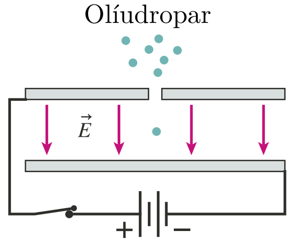
Hlutfallið í þversviðstilraun Thomsons var því um það bil 1836 sinnum hærra heldur en næsthæsta þekkta hlutfallið á þeim tíma! Það kannski ber að nefna á þessum tímapunkti að menn vissu ekki endilega að katóðugeislinn samanstæði af rafeindum og því var tvennt í stöðunni: Annað hvort samanstóð katóðugeislinn af eindum með mjög mikla hleðslu eða af eindum með mjög lítinn massa (tvær leiðir til þess að gera hlutfallið $\frac{q}{m}$ stórt). Flest virti benda til þess að það væri massinn sem væri mjög lítill (því menn höfðu áttað sig á því að hleðsla væri skömmtuð stærð þó að þeir hefðu ekki ákvarðað minnstu skammtastærðina á hleðslunni, þ.e. grunnhleðsluna $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$). Eina leiðin hinsvegar til þess að skera út um það hvort það væri mjög stór hleðsla eða mjög lítill massi sem að eindirnar í katóðugeislanum hefðu þá þurftu menn samt að finna leið til þess að mæla annað hvort eitt og sér! En það var einmitt þessi skammtahugmynd um grunnhleðsluna sem að leiddi menn á sporið. Það var nefnilega frekar auðvelt á þessum tíma að ákvarða heildarhleðsluna á einu móli af sameindum svo í rauninni þá var helsta vandamálið að ákvarða Avogadrosartöluna, N_A[3] (þekkt

[3]Reyndar má sjá með gaslögmálinu að $PV = nRT$ þar sem n er mólfjöldinn og það var frekar auðvelt að mæla gasfastann R (með því að gera tilraun með t.d. 1 móli af gasi þar sem rúmmáli er t.d. haldið föstu $V = V_0$ og gera graf af P sem fall af T). En gasfastinn tengist Avogadrosartölunni og Boltzmann fastanum samkvæmt $R = k_B N_A$ svo það var þar með jafngilt að ákvarða Boltzmann-fastann k_B.

gildi í dag er $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23} \, \frac{1}{\text{mól}}$. Fyrsta mælingin á Avogadrosartölunni[4] hafði verið gerð árið 1865 af Johann Josef Loschmidt (gildið sem að hann fékk var reyndar $4{,}0 \cdot 10^{22} \, \frac{1}{\text{mól}}$ sem er nokkuð fjarri þekktu gildi í dag).[5] Þetta gaf Thomson leið til þess að meta massa eindanna í katóðugeislanum og færa rök fyrir því að eindirnar í katóðugeislunum hefðu mun minni massa heldur en léttasta eindin sem var þekkt á þeim tíma. Hann var þar með búinn að finna öreind sem var smærri heldur en allar þekktar frumeindir þess tíma.

21.3 Olíudropatilraun Millikan og Fletchers

Það tók hinsvegar smá tíma fyrir menn að samþykkja þessa niðurstöðu Thomsons um nýja öreind sem væri smærri heldur en frumeindirnar. Það var í rauninni ekki fyrr en árið 1909 þegar Millikan og Fletcher[6] framkvæmdu svokallaða olíudropatilraun sem gaf einfalda leið til þess að mæla grunnhleðsluna, e. Uppstillingin fyrir olíudropatilraunina var frekar einföld í sjálfu sér. Þeir settu spennumun $\Delta V = Ed$ á milli tveggja platna í plötuþétti og slepptu síðan olíudropum með hleðslu q og massa m á milli platna plötuþéttisins.



Eina leiðin fyrir dropana til þess að haldast kyrrir í lausu lofti var ef að rafkrafturinn var jafn stór og þyngdarkrafturinn, þ.e. ef

$$mg = qE \implies q = \frac{mg}{E} = \frac{mgd}{\Delta V}.$$

Þar sem ΔV var spennumunurinn á milli platna plötuþéttisins. Þetta var auðveldi hlutinn í olíudropatilrauninni. Erfiði hlutinn í tilraun Millikans og Fletchers var síðan að ákvarða massa olíudropanna sem að þeir höfðu komið þarna fyrir á milli platnanna. En málið var að olíudroparnir þeirra voru alveg gríðarlega smáir. Þvermál olíudropanna var af stærðargráðunni μm svo það var hægt að sjá þá í stækkunargleri en það var nánast ómögulegt að fá nákvæmt mat á stærð þeirra (óvissan hefði gert tilraunina ómarktæka). En þar sem að olíudroparnir voru svo gríðarlega smáir þá var loftmótsstaðan sem að droparnir fundu fyrir gríðarlega mikil en það þýddi að þegar slökkt var á rafsviðinu þá varð loftmótsstaðan svo gríðarlega mikil að olíudroparnir byrjuðu nánast samstundis að falla með föstum lokahraða (því loftmótsstöðukrafturinn og þyngdarhröðunin eru jafn stórir í fallinu). Með því að mæla tímann sem að það tók fyrir eindirnar að fall niður að plötum plötuþéttisins var hægt að meta lokahraða eindanna og þar með massa þeirra. Til þess að útskýra þetta aðeins nánar þá var þekkt að loftmótsstöðukrafturinn sem að verkaði á dropana (að því gefnu að þeir væru kúlulaga með geisla r) var gefinn með:

$$F_{\text{loftmótsstaða}} = 6\pi\eta r v$$

[4] Reyndar vilja sumir eigna franska lækninum Johann Chrysostomus Magnenus (1646) heiðurinn. En sagan segir að hann hafi ákvarðað Avogadrosartöluna með Fermi-tilraun. Hann kveikti á ilmkerti í tómri kirkju og mældi tímann sem það tók fyrir ilminn að berast hinum meginn í kirkjuna. Út frá því hversu langan tíma það tók fyrir hann að finna lyktina af ilmkertinu gat hann metið stærð Avogadrosartölunnar út frá rúmmáli kirkjunnar.

[5] Kannski er það smá útúrdúr en í einni af Annus Mirablis greinum Einsteins (1905) sem fjallar um Brown-hreyfingu þá sýnir Einstein hvernig er hægt að ákvarða Boltzmann-fastann (og þar með gasfastann) mjög nákvæmlega þar að auki sem að hann sýnir hvernig er hægt að ákvarða stærð frumeinda.

[6] Robert Millikan var doktorsleiðbeinandi Harvey Fletchers og birti ekki nafn Fletchers á grein þeirra um olíudropatilraunina. Þetta gerði það að verkum að Millikan hlaut nóbelsverðlaunin einn árið 1923 fyrir mælinguna á grunnhleðslunni þegar hann hefði líklegast átt að deila verðlaununum með Fletcher.

þar sem η táknar seigju vökvans (í þessu tilviki loft með $\eta_{\text{loft}} = 18{,}5 \cdot 10^{-6}\,\text{Pa}\,\text{s}$). Með því að skoða hvenær kraftajafnvægi næst þá höfum við að:

$$0 = ma = mg - 6\pi\eta r v \implies v_{\text{lok}} = \frac{mg}{6\pi\eta r}$$

En hægt var að tengja massa dropanna við eðlismassann samkvæmt $m = \rho V_{\text{dropi}} = \frac{4\pi\rho}{3} r^3$ þannig að:

$$v_{\text{lok}} = \frac{mg}{6\pi\eta r} = \frac{2}{9}\frac{\rho g}{\eta} r^2 \implies r = 3\sqrt{\frac{\eta v_{\text{lok}}}{2\rho g}}.$$

En þar með gátu Millikan og Fletcher ályktað að:

$$q = \frac{mgd}{\Delta V} = \frac{4\pi\rho r^3 g d}{3\Delta V} = 18\pi \frac{d}{\Delta V}\sqrt{\frac{\eta^3 v_{\text{lok}}^3}{2\rho g}}.$$

Eftir að hafa haft svona mikið fyrir þessari útleiðslu þá er frekar fyndið að Millikan og Fletcher notuðu vitlaust gildi á seigju loftsins í útreikningum sínum! Richard Feynman hafði eftirfarandi um málið að segja:

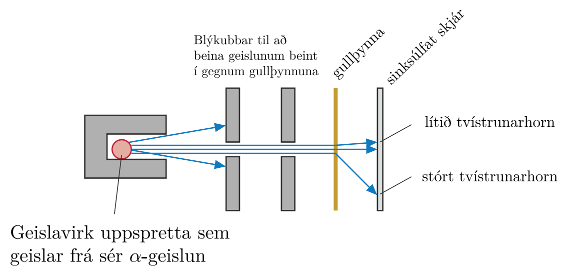
> *„We have learned a lot from experience about how to handle some of the ways we fool ourselves. One example: Millikan measured the charge on an electron by an experiment with falling oil drops, and got an answer which we now know not to be quite right. It's a little bit off because he had the incorrect value for the viscosity of air. It's interesting to look at the history of measurements of the charge of an electron, after Millikan. If you plot them as a function of time, you find that one is a little bit bigger than Millikan's, and the next one's a little bit bigger than that, and the next one's a little bit bigger than that, until finally they settle down to a number which is higher. Why didn't they discover the new number was higher right away? It's a thing that scientists are ashamed of—this history—because it's apparent that people did things like this: When they got a number that was too high above Millikan's, they thought something must be wrong—and they would look for and find a reason why something might be wrong. When they got a number close to Millikan's value they didn't look so hard. And so they eliminated the numbers that were too far off, and did other things like that.“*
>
> **- Richard Feynman, 1974**

21.4 Gullþynnutilraun Rutherfords

Sama ár og Millikan og Fletcher framkvæmdu olíudropatilraunina sína þá uppgötvuðu Ernest Rutherford[7]og doktorsnemar hans, Hans Geiger og Ernest Mardsen, kjarna frumeindanna með gullþynnutilrauninni. Þetta er án efa ein merkasta og frægasta tilraun mannkynssögunnar. Niðurstaða tilraunarinnar var svo sláandi og algjörlega í mótsögn við allt sem að menn þekktu á þeim tíma.

Uppstillingin í gullþynnutilraun Rutherfords var eftirfarandi. Geislavirkri uppsprettu (nánar um geislavirkni aðeins síðar) var staðsett fyrir aftan blývegg með litlu gati. Blýveggurinn átti að sjá til þess að α-geislunin frá geislavirku uppsprettunni beindist aðeins beint í gegnum gullþynnuna. Við vitum í dag að α-geislun er ekkert annað en geisli af helínjónum He^{++} sem samanstendur af tveimur róteindum og tveimur nifteindum, en það var ekki þekkt á þeim tíma. Fyrir aftan gullþynnuna var síðan sinksúlfat skjár sem gaf frá sér lítinn ljósblossa þar sem α-agnirnar lentu á skjánum.

[7]Rutherford hafði sjálfur verið doktorsnemi hjá J.J. Thomson og hafði fengið Nóbelsverðlaunin í efnafræði 1908, árið áður en gullþynnutilraunin var framkvæmd.



Rutherford hafði beðið doktorsnemana sína Geiger og Mardsen um að framkvæma þessa tilraun svo að þeir gætu staðfest atómlíkan þess tíma sem var kennt við J.J. Thomson lærimeistara Rutherfords. Atómlíkan Thomsons kallaðist rúsínukökulíkanið (líka stundum plómubúðingslíkanið) og sagði að atómið væri eins og rúsínukaka þar sem að rúsínurnar voru rafeindirnar sem voru jafndreifðar í jákvætt hlaðna kökudeginu. Ástæðan fyrir því að þetta var viðtekið á þeim tíma var að Thomson hafði sýnt fram á að rafeindir væru minni heldur en frumeindirnar og menn vissu að flestar frumeindir voru óhlaðnar (jafn mikið af róteindum og rafeindum) en einfaldasta leiðin (rakvél Occams) sem að þeim datt í hug til þess að útskýra þetta var einmitt ef að litlu róteindirnar væru jafndreifðar inni í jákvætt hlaðna atóminu. Það sem að Rutherford, Geiger og Mardsen bjuggust við var að þeir myndu alltaf fá örlítil tvístrunarhorn (ekki alveg núll en þeir bjuggust við því að stærsta mögulega tvístrunarhornið væri um það bil 0,02° eða svo gott sem núll). Niðurstaðan þeirra var satt best að segja fáránleg í samanburði við atómlíkan THomsons. Ekki nóg með það að tvístrunarhornin voru stærri heldur en það sem að þeir bjuggust við heldur gerðist það í um það bil 1 af hverjum 8000 mælingum að α-agnirnar endurvörpuðust aftur að uppsprettunni! Þær höfðu þá snúið við um 180° gráður) sem var fáránlegt! Rutherford hafði sjálfur eftirfarandi um niðurstöðuna að segja:

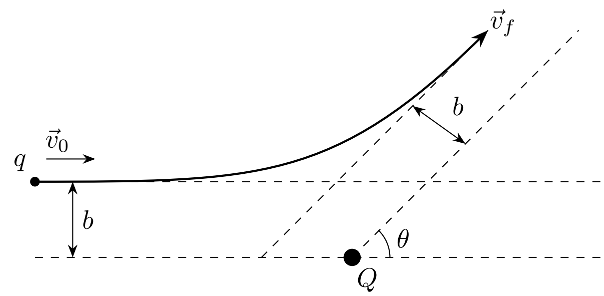
> *„It was quite the most incredible event that has ever happened to me in my life. It was almost as incredible as if you fired a 15-inch shell at a piece of tissue paper and it came back and hit you.“*
>
> **- Rutherford, 1909**

Hvernig var hugsanlega hægt að útskýra þessa niðurstöðu? Það er eiginlega smá kómískt að það hafi verið Rutherford sjálfur sem að útskýrði fræðilega hvernig stæði á þessari tilraunaniðurstöðu í gullþynnutilrauninni. En Rutherford er af mörgum talinn færasti verklegi eðlisfræðingur allra tíma (Michael Faraday er hugsanlega sá eini sem stóð honum fremri). Reyndar er Rutherford frægur fyrir að hafa haft mikla óbeit á fræðilegri eðlisfræði og eftirfarandi tilvitnun lýsir kannski skoðunum hans á fræðilegum eðlisfræðingum hvað best:

> *„How can a fellow sit down at a table and calculate something that would take me six months to measure in a laboratory?“*
>
> **- Rutherford, 1909**

En Rutherford áttaði sig á því hvernig væri hægt að útskýra þessa tilraunaniðurstöðu á fræðilegan hátt. Árið 1911 setti hann fram atómlíkan þar sem að hann kom með þá tilgátu að í miðjunni á atóminu væri kjarni sem bæri jákvæða hleðslu $+Q$. Hann sýndi enn fremur að ef að α-ögnin hefði massa m, upphafshraða v_0 og væri skotið í áttina að kjarnanum úr fjarlægð b (sjá myndina hér fyrir neðan fyrir nánari útskýringu) þá myndi tvístrunarhorn α-geislans njóta jöfnunnar:

$$b = \frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 m v_0^2}\cot\left(\frac{\theta}{2}\right).$$



Þar með sjáum við að ef $b = 0$ þá verður $\cot\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$ svo $\theta = 180°$ og ögnin endurkastast beint til baka. Rutherford sýndi þar að auki að líkurnar á því að ögnin myndi tvístrast um horn θ væru gefnar með:

$$\sigma(\theta) = \frac{Q^2 q^2}{4mv^2 v_0^2 \sin^4(\frac{\theta}{2})}$$

Þannig gat hann staðfest hlutfallið 1/8000 fyrir fullkomið endurkast í samræmi við mælingar þeira Geiger og Mardsen.
Tvístrunarhorn Rutherfords og atómkjarnakenning hans gerðu það að verkum að nú voru menn komnir með einfalda leið til þess að mæla fjölda róteinda í kjarnanum. Það sem meira var þá gerði þetta þeim kleift að meta stærðina á kjarnanum sem um það bil af stærðargráðunni 10^{-15} m í samanburði við 10^{-10} m fyrir stærð atómsins[8]. Með þessari vitneskju tókst Breska eðlisfræðingnum Henry Moseley[9] (sem var líka einn af doktorsnemum Rutherfords) að ákvarða 7 ný frumefni út frá sætistölunni, Z, með röngengeislamælingum (x-ray).

21.5 Chadwick uppgötvar nifteindina

Það kann kannski að virðast undarlegt sagnfræðilega - en það liðu síðan rúmlega 20 ár þar til að nifteindin var uppgötvuð árið 1932. Það kann að virðast augljóst í dag því hvert mannsbarn veit að heildarfjöldi nifteinda í kjarnanum er $A - Z$ þar sem A er frumeindamassinn og Z er sætistala frumefnisins. Það eitt og sér ætti að vera nóg til þess að fá eðlisfræðinga í það minnsta til þess að leita að nýrri kjarneind! En nei, svona getur eðlisfræðin vafist fyrir manni! Því fræðilegir eðlisfræðingar halda lengi fast í fallegar kenningar þó svo að þær séu rangar. Í þessu tilviki vildu þeir ekki gefast upp á rúsínukökulíkani Thomsons svona einfaldlega. En þetta var ekki einfaldlega útaf því að þeir voru að reyna að halda í gamla, bilaða kenningu. Það var reyndar mjög margt sem að benti til þess að svo væri! Helstu rökin sem að menn höfðu fyrir þessu rúsínukökulíkani fyrir kjarnan var β-geislun. En þegar að geislavirk efni senda frá sér β-geislun þá senda efnin út rafeindir úr kjarnanum og sætistalan lækkar. Hvernig gat rafeindinni verið skotið út úr kjarnanum nema ef að hún hafði verið þar til að byrja með? Kenningin á þeim tíma var þess vegna að inni í kjarnanum væru orkuríkar rafeindir á sveimi til þess að halda kjarnanum saman. Það var því á þeim tíma engin þörf fyrir nýja kjarneind eins og nifteindina til þess að útskýra eitt eða neitt. Menn töldu sig þegar hafa uppgötvað allt sem hægt var að vita um atómkjarnan!

Kannski var önnur ástæða þess hvað það tók langan tíma að uppgötva nifteindina að það var svo margt annað í gangi í eðlisfræði á þessum tíma. Fremstu eðlisfræðingar þess tíma voru að leggja línurnar að almennu afstæðiskenningunni, skammtafræði og skammtasviðsfræði. Það var enginn tími né hagur af því að vinna að rannsóknum í kjarneðlisfræði (Ó, hvað tímarnir áttu eftir að breytast!). Reyndar var skammtafræðin nú þegar á þessum tíma farin að benda á galla í þessu ranga, viðtekna rúsínukökukjarnalíkani en það var enginn að leita að þessum mótsögnum og þar með var enginn búinn að taka eftir þeim á þessum tíma! Reyndar var hugmyndin svo rótgróin að Enrico Fermi[10] og Franco Rasetti skrifuðu grein 1926 þar sem að þeir sýndu

[8]Rutherford notaði viðlíkinguna að kjarninn væri eins og fluga í dómkirkju.
[9]Sagan segir að Moseley hefði líklegast hlotið nóbelsverðlaunin 1916 hefði hann ekki látist 1915 í orrustunni við Gallipoli í fyrri heimsstyrjöldinni. Hann var þá 27 ára.
[10]Já, þetta er hinn eini sanni Enrico Fermi sem átti eftir að meta stærð fyrstu kjarnorkusprengjunnar með blaðsnifsum.

fram á að þetta líkan samræmdist ekki kenningum um spuna. Þeir ályktuðu út frá niðurstöðunni að spunahugmyndin væri röng (en ekki öfugt!). Það sem meira var þá var uppgötvunin á nifteindinni eiginlega bara slys! Hún var algjörlega ótengd allri þessari nýju eðlisfræði sem var verið að þróa á þessum tíma. Hún fannst eiginlega bara óvart!

Árið 1930 höfðu Walter Bothe og Herbert Becker framkvæmt tilraun þar sem að þeir skutu α-geislum að beryllín uppsprettu. Þeir tóku eftir því að við þetta þá geislaði beryllín uppsprettan frá sér nýrri geislun, sem að þeir héldu í fyrstu að væru γ-geislun (það reyndist ekki vera rétt). Tilraunin var endurtekin af Iréne Curie[11] og Fréderic Joliot eiginmanni hennar. Þau ályktuðu (ranglega) eins og Bothe og Becker að efnahvarfið væri:

$$^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\alpha \longrightarrow {}^{13}_{6}\mathrm{C} + \gamma$$

Ítalski eðlisfræðingurinn Ettore Majorana á að hafa sagt þegar hann frétti þessa niðurstöðu þeirra:

> *„What fools! They have disovered the neutral proton, and they do not recognise it!“*
>
> **- Ettore Majorana, 1931**

En þetta voru frábærar fréttir fyrir James Chadwick (enn einn doktorsnemi Rutherfords) en hann hafði verið að leita að öreind eins og nifteindinni í mörg ár! Í stuttri grein sem að Chadwick birti árið 1932 þá sýndi hann fram á að þessi geislun sem að Bothe-Becker-Curie-Joliot höfðu greint frá beryllín uppsprettunni gat ómögulega verið γ-geislun því hann sýndi hver mesta hugsanlega orkan sem γ-geislinn gæti haft (og sú tala var lægri heldur en orka geislanna sem að þau höfðu greint). Þar með ályktaði hann að hér væri ný eind uppgtötvuð og hið rétta kjarnahvarf væri:

$$^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\alpha \longrightarrow\ \longrightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}$$

Hingað til held ég að sagan okkar af atóminu hafi fjallað um atriði sem að þið teljið ykkur þekkja ágætlega, þ.e. að atómið samanstendur af rafeindum, róteindum og nifteindum þar sem að róteindirnar og nifteindirnar eru pakkaðar þétt saman í örlitlum kjarna af stærðargráðunni fm og rafeindirnar eru á sveimi í kringum kjarnan í órafjarlægð (hlutfallslega) þannig að stærð atómsins er af stærðargráðunni Å. Þetta er plánetulíkan Rutherfords[12] af atóminu og er eflaust enn þann dag í dag það atómlíkan sem að almúgamaðurinn kannast hvað best við (þið hafið síðan hugsanlega lært um líkindadreifingu rafeinda í efnafræði en meira um það síðar). Það er eiginlega frekar magnað að þetta plánetulíkan sé enn þann dag í dag kennt í menntakerfinu. Því þetta var bókstaflega bara atómlíkanið í 100 daga! Því aðeins 100 dögum eftir að Chadwick greindi frá því að hann hefði uppgötvað nifteindina þá tilkynntu samstarfsfélagar hans við Cavendish tilraunastofuna í Cambridge að þeir hefðu fundið jáeindina. Stuttu eftir það byrjuðu ótal margar nýjar öreindir að koma fram á sjónarsviðið. Reyndar voru öreindirnar svo margar að Enrico Fermi á að hafa sagt:

> *„If I could remember the names of all those particles, I'd be a botanist.“*
>
> **- Enrico Fermi, 1953**

En áður en að við kynnum þessar nýju öreindir til sögunnar (sem að þið hafið líklegast aldrei heyrt um!) þá skulum við staldra við og rífa plánetulíkanið af atóminu algjörlega í sundur og sína hvers vegna það er ekki nógu gott og hvaða mótsagnir það felur í sér! Því maður hefur ekki skilið eðlisfræðikenningu nógu vel fyrr en að maður getur sýnt að hún sé röng! Ætli það sé ekki kannski markmiðið í eðlisfræði eftir allt saman? Að afsanna flóknar kenningar og búa til nýjar flóknari kenningar fyrir aðra til þess að afsanna!

---

[11] Iréne Curie var dóttir Marie Curie og Pierre Curie. Það gleymist stundum í umræðunni að Iréne Curie og Fréderic Joliot hlutu einnig Nóbelsverðlaunin í efnafræði 1935. Marie Curie og Pierre Curie hlutu nóbelsverðlaunin í eðlisfræði saman (ásamt Antoine Henri Becquerel) árið 1903. Marie Curie hlaut síðan nóbelsverðlaunin í efnafræði árið 1911 (Pierre lést árið 1906). Þar með státar Curie-fjölskyldan sig af 5 nóbelsverðlaunum!

[12] Oft líka kennt við Bohr en tæknilega séð var Joseph Larmor fyrstur til þess að stinga upp á plánetulíkani af atóminu.

21.6 Staðallíkanið

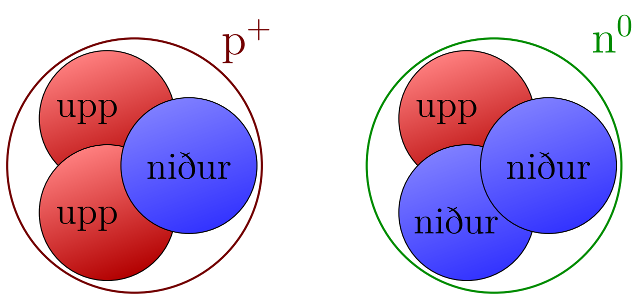
„Three quarks for Muster Mark!
Sure he hasn't got much of a bark
And sure any he has it's all beside the mark.“

- Finnegans Wake eftir James Joyce, 1939

Árið 1932 höfðu menn komist að því að allt efni samanstæði af atómum og að öll atóm samanstæðu af örlitlum kjarna af þétt pökkuðum róteindum og nifteindum. Umhverfis kjarnan voru rafeindir á sveimi. Á þeim tíma voru þetta einu eindirnar sem voru þekktar sem voru smærri heldur en atómið. Ef að lotukerfið tekur saman helstu eiginleika frumeindanna þá gætum við þess vegna smíðað einfalt lotukerfi sem að útskýrir hvernig að frumeindirnar eru búnar til:

Rafeind	**Róteind**	**Nifteind**

En nú þegar menn höfðu klofið atómið og séð að það samanstóð af róteindum, nifteindum og rafeindum þá datt mönnum það snilldarráð í hug að reyna að kljúfa þessar nýju eindir líka! Því eins og Aristótales hafði sagt þá var alltaf hægt að komast dýpra! Hingað til hefur mönnum ekki tekist að kljúfa rafeindina. Hinsvegar tókst mönnum að kljúfa bæði róteindina og nifteindina niður í svokallaða kvarka[13] árið 1964. Þar að auki fundu menn nýja öreind árið 1956 sem kallast fiseind. Fiseindin er óhlaðin og er miklu léttari heldur en hinar efniseindir staðallíkansins[14]. Róteindin samanstendur af tveimur upp kvörkum og einum niður kvarka á meðan að nifteindin samanstendur af tveimur niður kvörkum og einum upp kvarka. Til þess að þetta geti gengið upp þá þarf upp kvarkinn að hafa hleðslu $+\frac{2}{3}$ en niður kvarkinn hleðslu $-\frac{1}{3}$. Þá sjáum við einmitt að hleðsla róteindarinnar verður $(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=+1)$ en hleðsla nifteindarinnar verður $(-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=0)$.



Þar með varð lotukerfið fyrir minnstu byggingareiningar efnisheimsins eftirfarandi:

Rafeind	**Niður kvarki**	**Upp kvarki**	**Fiseind**

Í einhverjum skilningi má segja að þetta sé lotukerfið okkar í dag og að við ættum að stoppa núna áður en að þið hættið að skilja boffs. En nú fyrst fer sagan okkar að verða áhugaverð!

[13] Orðið kvarki var valið af Gell-Mann og er tekið úr eftirfarandi

[14] Í langan tíma var talið að fiseindin hefði engan massa. En í dag er talið að hún hafi massa af stærðargráðunni 10^{-37} kg eða rúmlega milljón sinnum minni massa heldur en rafeindin.

Af einhverjum undarlegum ástæðum sem að engum hefur tekist enn þann dag í dag að skilja þá ákváð náttúran að endurtaka þetta mynstur tvisvar (og aðeins tvisvar) í viðbót. Náttúran afritaði þessar eindir nema gerði þær bara aðeins þyngri (en annars hafa þær svipaða eiginleika). Til dæmis eru afritin af rafeindinni kallaðar mýeind (μ) og táeind (τ) og þær hafa massa:

$$m_\mu \approx 207 m_e, \qquad m_\tau \approx 3483 m_e.$$

Þegar að við afritum efniseindirnar fáum við (talan táknar massa eindanna sem margfeldi af massa rafeindar):

-1 **Rafeind** 1	$-\frac{1}{3}$ **Niður** 9	$+\frac{2}{3}$ **Upp** 4	**Fiseind rafeindar** $\sim 10^{-6}$
-1 **Mýeind** 207	-$\frac{1}{3}$ **Sérstaða** 186	$+\frac{2}{3}$ **Þokki** 2495	**Fiseind mýeindar** $\sim 10^{-6}$
-1 **Táeind** 3483	$-\frac{1}{3}$ **Botn** 8180	$+\frac{2}{3}$ **Toppur** $3{,}4 \cdot 10^5$	**Fiseind táeindar** $\sim 10^{-6}$

Hver lína í þessu lotukerfi kallast **kynslóð**. Allar kynslóðirnar samanstanda af fjórum eindum: Einni sem að líkist rafeindinni og tilheyrandi fiseind hennar og tveimur kvörkum. Allar eindirnar í fyrsta dálkinum hafa hleðslu -1. Allir kvarkarnir í öðrum dálkinum hafa hleðslu $-\frac{1}{3}$, allir kvarkarnir í þriðja dálknum hafa hleðslu $+\frac{2}{3}$ og allar fiseindirnar eru óhlaðnar.

Það er margt sem að eðlisfræðingar hafa komist að í tengslum við mynstrin í þessu nýja lotukerfi. Til dæmis getum við útskýrt hvers vegna hleðslur eindanna þurfa að vera nákvæmlega þær sem þær eru. Það sem meira er, ef við myndum einn daginn uppgötva rafeindareftirhermu úr fjórðu kynslóðinni þá myndum við samstundis vita að það væru til tveir kvarkar og tilheyrandi fiseind þar að auki í fjórðu kynslóðinni. Hinsvegar, þá er einnig margt sem að við skiljum ekki í þessu lotukerfi. Til dæmis bendir flest allt til þess að það séu ekki fleiri kynslóðir heldur en einungis þessar þrjár.[15] Við skiljum ekki af hverju það eru einungis þrjár kynslóðir af efniseindum en ekki t.d. 14 eða 30. Það dularfyllsta í þessu öllu saman er að við skiljum ekki mynstrin sem að ákvarða massa eindanna. Þetta er semsagt niðurstaðan: Það eru 12 efniseindir til og allt efni er búið til úr samsetningu af þessum 12 efniseindum.[16]

En þetta er í rauninni bara efnishelmingur staðallíkansins (við munum bráðlega kynna hinn helming staðallíkansins). Á þessum tímapunkti vaknar upp arargrúi af íðorðum sem að eðlisfræðingar nota í fagmáli sínu til þess að almúginn geti ekki skilið staðallíkanið almennilega. Til dæmis hafa þessar 12 efnisagnir fengið samheitið **fermíeindir**[17] (til heiðurs ítalska eðlisfræðingnum Enrico Fermi). Fermíeindirnar tólf skiptast í sex kvarka (quark) og sex **létteindir** (lepton). Stundum segjum við síðan að kvarkarnir hafi **bragð** (flavour). Til dæmis væri þokki bragð á kvarka). Allar eindir sem eru samsettar úr þremur kvörkum kallast **þungeindir** (baryon). Til dæmis eru róteindin (tveir upp, einn niður) og nifteindin (einn upp, tveir niður) dæmi um þungeindir.

[15]Helstu rökin sem að fólk færir fyrir því er að í fjórðu kynslóðinni þá væru tilheyrandi fiseindir ekki lengur léttar heldur væru þær þvert á móti þungar og líklegast 10^{10} sinnum þyngri en þær fiseindir sem að við þekkjum.

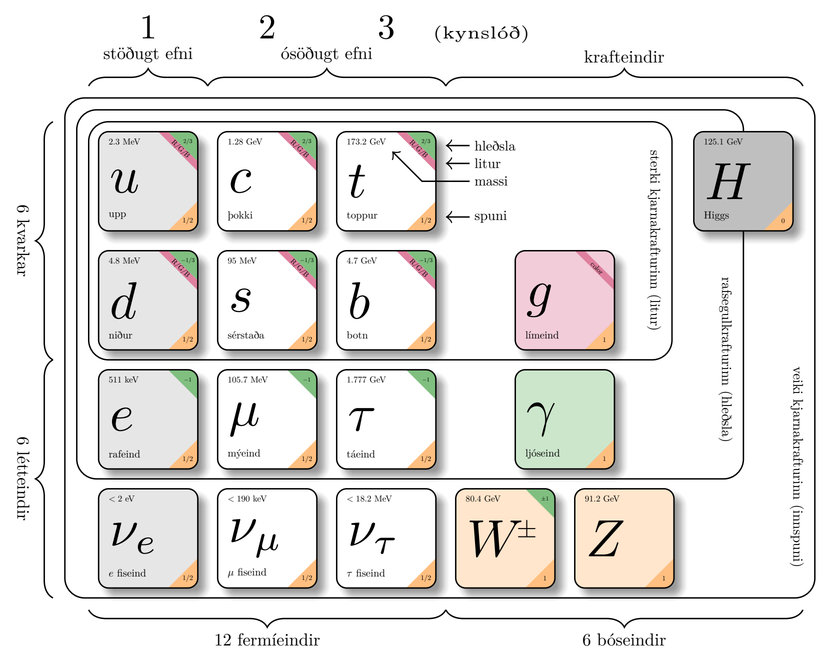
[16]Hver þeirra á síðan tilheyrandi andeind svo í rauninni eru efniseindirnar 24.

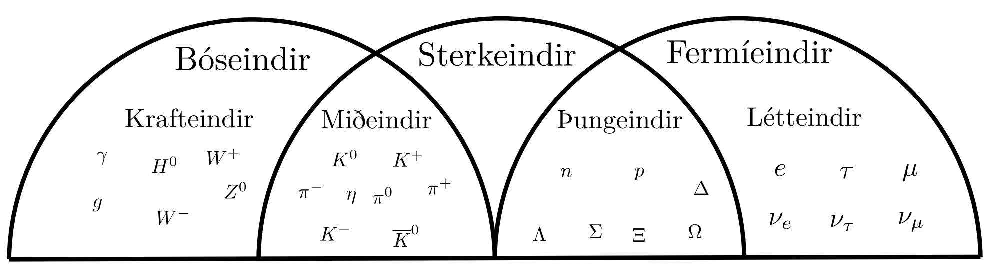
[17]Tæknilega séð er skilgreiningin á fermíeind sú að það séu allar þær eindir sem hafa hálf-tölu spuna eins og til dæmis $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$

En nú komum við að seinni hluta staðallíkansins, en hann samanstendur af **bóseindum**[18] sem eru stundum líka kallaðar **kraftberar**. En það eru þær eindir sem að gera efniseindunum (fermíeindunum) kleift að tala saman og finna fyrir hver annarri. Þið þekkið nú þegar eina bóseind en það er **ljóseindin** sem að miðlar rafsegulkraftinum (með öðrum orðum eru ljóseindir kraftberar rafsegulkraftsins). Við ættum síðan að nefna á þessu stigi kraftana fimm. Það kemur í ljós að það eru eindir sem að miðla kraftinum. Svokallaðar kraftberar:

- Þyngdarkrafturinn: Þyngdarkrafturinn er frekar sérstakur. Almenna afstæðiskenning Einsteins sýnir að þyngdarsviðið er í rauninni tímarúmið sjálft. Gárur í tímarúminu eru kallaðar þyngdarbylgjur og tilheyrandi kraftberar, svokallaðar, þyngdareindir, hafa aldrei verið mældar.
- Rafsegulkrafturinn: Ljóseindir, γ, bera rafsegulkraftinn.
- Sterki kjarnakrafturinn: Límeindir, g, bera sterka kjarnakraftinn.
- Veiki kjarnakrafturinn: W, Z^- og Z^+ bóseindirnar bera veika kjarnakraftinn.
- Higgs-krafturinn: Higgs-eindin, H, ber Higgs-kraftinn. Higgs-sviðið sem gefur ögnum massa.

Við skulum nú setja fram staðallíkanið í allri sinni dýrð:





Mynd 21.2: Vennmynd sem sýnir flokkun öreinda.

[18] Paul Dirac gaf eindunum það nafn til heiðurs indverska eðlisfræðingnum Satyendra Nath Bose sem hlaut aldrei nóbelinn.

Kafli 22

Afstæðiskenningin

„The views of space and time which I wish to lay before you have sprung from the soil of experimental physics, and therein lies their strength. They are radical. Henceforth, space by itself, and time by itself, are doomed to fade away into mere shadows, and only a kind of union of the two will preserve an independent reality.“

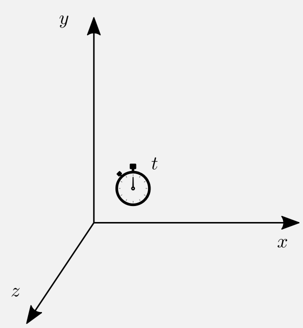
- Hermann Minkowski, 1908

22.1 Inngangur

Það eru tvær afstæðiskenningar kenndar við Einstein. Annars vegar takmarkaða afstæðiskenningin og hinsvegar almenna afstæðiskenningin. Sú fyrri, takmarkaða afstæðiskenningin, er í rauninni frekar einföld kenning hvað stærðfræðina varðar og Einstein eyddi sjálfur miklu púðri í að setja kenninguna fram þannig að almúgamaðurinn gæti skilið hana. Hinsvegar eru niðurstöður hennar gjarnan í mótsögn við forhugmyndir fólks um það hvernig heimurinn virkar. Hún er líka gegnumsýrð af svokölluðum þversögnum (sem reynast síðan aldrei vera í mótsögn við kenninguna). Það sem vefst sér í lagi fyrir fólki er sú hugmynd að tími og rúm séu á sama tíma samtvinnuð og afstæð hugtök. Í takmörkuðu afstæðiskenningunni erum við helst að fjalla um tvö viðmiðunarkerfi S og S' sem eru á afstæðri hreyfingu með hraða v miðað við hvert annað.

Skilgreining 22.1. Sagt er að **viðmiðunarkerfi**, S, sé fjórvítt hnitakerfi ásamt lengdarkvarða og tímakvarða þar sem að punktarnir í hnitakerfinu eru af gerðinni (t, x, y, z).

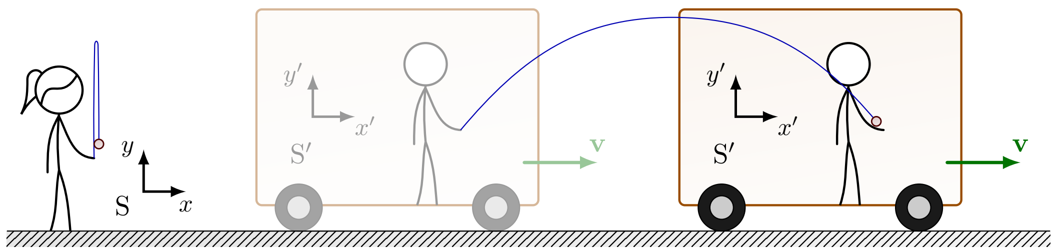
Atburður, A, er punktur í tímarúminu $A = (t_A, x_A, y_A, z_A)$.



Helsti hausverkurinn í takmörkuðu afstæðiskenningunni er að við munum vera með mörg viðmiðunarkerfi í gangi í einu. Það er vegna þess að fólk er svo sjálfhverft og skilgreinir alltaf viðmiðunarkerfið út frá því sem að það sér sjálft! Maður ætti þá að nefna að viðmiðunarkerfið er kyrrt miðað við sjálft sig og ferðast því einungis í jákvæða tímastefnu! Með öðrum orðum þá getum við alltaf litið á sem svo að við séum kyrr í miðju alheimsins en að veröldin snúist um okkur (margir gera þetta nú þegar í annarri merkingu). Við munum þá vera t.d. með viðmiðunarkerfi S þar sem að athugandi sér atburðinn A gerast í tímarúmspunktinum $A = (t, x, y, z)$. En annar athugandi í viðmiðunarkerfi S' mun sjá sama atburð gerast í $A' = (t', x', y', z')$. Reyndar munum við mestmegnis takmarka okkur við 1+1-vítt tímarúm þ.e. (t, x).

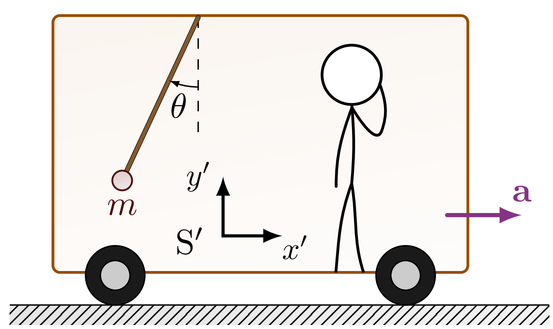
Skilgreining 22.2. Sagt er að **tregðukerfi** sé viðmiðunarkerfi þar sem tregðulögmál Newtons gildir.

Til þess að reyna að skilja tregðukerfin aðeins betur skulum við byrja á því að skoða myndina hér fyrir neðan:



Matti og Edda eru í boltaleik. Edda stendur kyrr á jörðinni í viðmiðunarkerfi S og kastar bolta upp í loftið. Matti stendur kyrr í viðmiðunarkerfi S' inni í strætó sem hreyfist með jöfnum hraða v í burtu frá Eddu. Bæði þessi viðmiðunarkerfi eru tregðukerfi[1]. Skoðum aðeins það sem að Edda sér (sem er það sem myndin sýnir). Edda sér boltann hennar ferðast upp og niður miðað við viðmiðunarkerfið hennar. Hinsvegar, þá sér hún boltann hans Matta ferðast eftir fleygboganum á myndinni því strætóbifreiðin ferðast áfram á meðan að boltinn er í loftinu. En hvað sér Matti í viðmiðunarkerfinu sínu, S'? Matti sér boltann sinn fara beint upp og niður (eins og Edda sá boltann sinn). Hann sér síðan boltann hennar Eddu ferðast í fleygboga til vinstri. Við myndum því segja eitthvað eins og að tregðukerfin S og S' eru á afstæðri hreyfingu miðað við hvert annað með hraða v. Séð frá Eddu í S þá er það Matti sem að ferðast í burtu frá henni með hraða v til hægri en séð frá Matta í S' þá er alveg eins hægt að segja að það sé Edda sem að ferðast í burtu frá Matta með hraða v til vinstri (eða $-v$ til hægri). Það er því ekki hægt að segja að annað sjónarhornið sé réttara heldur en hitt á meðan að tregðukerfin ferðast með afstæðum hraða miðað við hvert annað. Hinsvegar um leið og strætóbílstjórinn bremsar þá hættir viðmiðunarkerfið hans Matta að vera tregðukerfi og þá fyrst er hægt að færa rök fyrir því að það hafi verið Edda sem var kyrrstæð en ekki Matti!

Til þess að reyna að útskýra þetta aðeins betur skulum við líka skoða hvað gerist á myndinni hér fyrir neðan þegar að strætóbílstjórinn eykur hraðann sinn með því að stíga á bensíngjöfina (hann getur líka breytt hraðanum með því að bremsa harkalega). Þá fær strætóvagninn hröðun a til hægri (sem getur verið tímaháð).



Núna er viðmiðunarkerfi Matta, S', ekki lengur tregðukerfi því hann hefur enga útskýringu fyrir því hvers vegna pendúllinn sveigir til vinstri skyndilega. Hann verður því að álykta að hann sé í viðmiðunarkerfi sem finnur fyrir hröðun, það er að segja: hann er ekki í tregðukerfi.

[1]Tæknilega séð er viðmiðunarkerfi jarðarinnar ekki tregðukerfi því jörðin snýst um sjálfa sig sem veldur því að við sjáum sýndarkrafta eins og t.d. Coriolis-kraftinn. Við munum hinsvegar til einföldunar hunsa þau áhrif og segja að viðmiðunarkerfi athuganda á jörðinni sé svo gott sem tregðukerfi. Þar að auki er frekar erfitt að keyra strætó með jöfnum hraða svo það er líklegast bara tregðukerfi í stutta stund hverju sinni (viðmiðunarkerfi hættir að vera tregðukerfi ef að það verður fyrir hröðun).

22.2 Frumsendur afstæðiskenningarinnar

Lögmál 22.3. (Frumsendur afstæðiskenningarinnar)

(1) (Afstæðislögmálið) Lögmál eðlisfræðinnar eru eins í öllum tregðukerfum.

(2) (Ljóshraðalögmálið) Hraði ljóss í tómarúmi er sá sami í öllum tregðukerfum.

Tæknilega séð er ljóshraðalögmálið innifalið í afstæðislögmálinu en það er mikilvægt að taka það fram því áður fyrr héldu menn að ljósbylgjur bærust í miðli sem þeir kölluðu ljósvakan (e. *ether*). Til samanburðar við aðrar bylgjur er t.d. hljóðhraðinn háður hreyfingu hlustanda með tilliti til loftstins og er því ekki sá sami í öllum tregðukerfum. Það er því afar undarlegt að hraði ljóssins sé óháður tregðukerfinu!

Sagan segir að Einstein hafi (þegar hann var 16 ára) áttað sig á seinna lögmálinu með eftirfarandi hugartilraun:

Ímyndum okkur að við höldum á spegli í myrkri og að við ferðumst síðan með ljóshraða. Kveikjum síðan ljósin. Hvað sést þá í speglinum?

Ef hraði ljóssins væri ekki sá sami í öllum tregðukerfum þá myndi ekkert sjást í speglinum. Það er vegna þess að það sem að við sjáum í speglinum er okkar eigið endurvarp. Ljósið þarf að endurkastast af húðinni okkar og lenda síðan á speglinum og ferðast þaðan til baka í augun á okkur. En þessi hugartilraun sýnir að þetta væri í mótsögn við afstæðislögmálið því þar með væru lögmál eðlisfræðinnar ekki eins í öllum tregðukerfum. Þar með væri hægt að nota þessa niðurstöðu til þess að greina með hvaða hraða maður væri að ferðast.

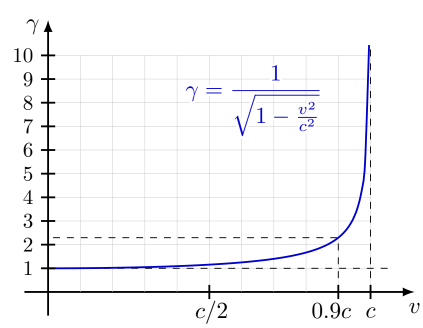
Í því sem eftir kemur þá mun það reynast okkur gagnlegt að hafa skilgreint eftirfarandi fall:

Skilgreining 22.4. Við skilgreinum **Lorentz-fallið** (líka kallað **gamma-fallið**) sem fallið:

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Það getur líka stundum verið þægilegt að tala um **beta-fallið**, $\beta = \frac{v}{c}$.

Það er gott að fá myndræna tilfinningu fyrir Lorentz-fallinu:



Lögmál 22.5. (Nokkrir eiginleikar Lorentz-fallsins)

(a) $\gamma(v) \geq 1$.

(b) $\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$

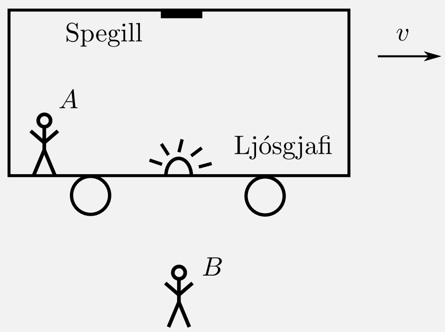
(c) $\gamma(v) \xrightarrow[v \to c]{} +\infty$.

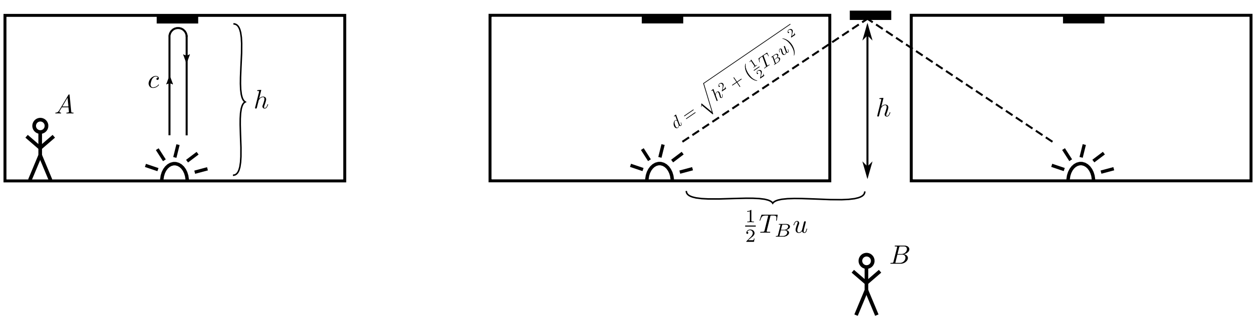
(d) $\gamma(v) \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2$.

22.3 Tímalenging

Lögmál 22.6. Lítum á lest sem ferðast með hraða v miðað við athuganda B. Látum A vera athuganda inni í lestinni. Látum ljósgjafa vera festann við gólf lestarinnar og látum spegil vera festan í lofti lestarinnar. Látum T_A tákna tímann sem að athuganda A sýnist það taka ljósið að endurkastast af speglinum og lenda aftur á ljósgjafanum. Látum T_B tákna tímann sem að athuganda B sýnist þetta sama ferli taka. Þá gildir að:

$$T_B = \gamma T_A.$$





Útleiðsla: Þá sýnist A heildarvegalengdin sem ljósið þarf að ferðast vera $2h$ svo tíminn sem það tekur ljósið að ferðast þessa vegalengd er:

$$T_A = \frac{2h}{c}.$$

Hinsvegar þá sýnist B ljósið þurfa að ferðast heildarvegalengdina:

$$2d = 2\sqrt{h^2 + \left(\frac{1}{2}T_B v\right)^2} \implies T_B = \frac{2d}{c} = \frac{2}{c}\sqrt{h^2 + \left(\frac{1}{2}T_B v\right)^2}$$

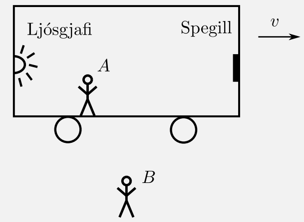
Við hefjum síðan í annað veldi og einangrum fyrir T_B. Við fáum þá að:

$$T_B^2 = \frac{4}{c^2}\left(h^2 + \left(\frac{1}{2}T_B v\right)^2\right) \implies \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)T_B^2 = \frac{4h^2}{c^2} \implies T_B = \frac{\frac{2h}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{T_A}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma T_A.$$

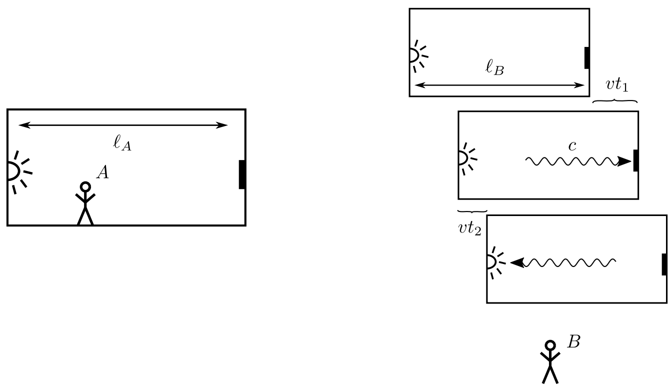
□

22.4 Lengdarstytting

Lögmál 22.8. Lítum á lest sem ferðast með hraða v miðað við athuganda B. Látum A vera athuganda inni í lestinni. Látum ljósgjafa vera festann við enda lestarinnar og látum spegil vera festan fremst í lestinni. Látum ℓ_A tákna lengdina sem að athuganda A sýnist lestin hafa og látum ℓ_B tákna lengdina sem að athuganda B sýnist lestin hafa. Þá gildir að:



$$\ell_B = \frac{\ell_A}{\gamma}.$$



Útleiðsla: Tíminn sem það tekur ljósið að ferðast frá ljósgjafanum og að speglinum og aftur til baka frá sjónarhorni A er gefinn með $T_A = \frac{2\ell_A}{c}$. Það sem athugandi B sér er hinsvegar örlítið flóknara því lestin hreyfist á sama tíma og ljósið. Látum því t_1 tákna tímann sem að líður frá því að ljósið yfirgefur ljósgjafan og þar til að ljósið skellur á speglinum. Vegalengdin sem að ljósið þarf að ferðast er þá $\ell_B + vt_1$ þannig að við fáum að:

$$t_1 = \frac{\ell_B + vt_1}{c} \implies \left(1 - \frac{v}{c}\right) t_1 = \frac{\ell_B}{c} \implies t_1 = \frac{\ell_B}{c - v}.$$

Látum síðan t_2 tákna tímann sem líður frá því að ljósið endurkastast af speglinum og þar til að það skellur aftur á ljósgjafanum. Þá höfum við að Látum t_1 vera tímann sem það tekur ljósið að berast að speglinum og t_2 vera tímann sem það tekur ljósið að berast til baka í enda lestarinnar séð frá B. Þá gildir að:

$$\ell + vt_1 = ct_1 \implies t_1 = \frac{\ell_B}{c - v}, \quad \ell - vt_2 = ct_2 \implies t_2 = \frac{\ell_B}{c + v}$$

$$t_B = t_1 + t_2 = \frac{\ell_B}{c - v} + \frac{\ell_B}{c + v} = \frac{2\ell_B c}{c^2 - v^2} = \frac{2\ell_B}{c}\gamma^2$$

En samkvæmt tímalengingu höfum við að $t_B = \gamma t_A$ svo:

$$\gamma t_A = t_B = \frac{2\ell_B}{c}\gamma^2 \implies t_A = \frac{2\ell_B}{c}\gamma$$

en við vitum þegar að:

$$t_A = \frac{2\ell_A}{c}$$

en þar með er:

$$\ell_A = \gamma \ell_B$$

□

22.5 Lorentz-ummyndanir

„You never really understand a person until you consider things from his point of view — until you climb into his skin and walk around in it.“

- Atticus Finch, To Kill a Mockingbird

Lorentz-ummyndanir leyfa okkur að sjá veröldina með augum annarra.

Lögmál 22.9. Látum S og S' vera tvö tregðukerfi sem hreyfast með hraða v miðað við hvert annað. Látum (x, t) vera atburð séð frá sjónarhorni athuganda í S. Þá sér athugandi í S' atburðin gerast í (x', t') þar sem:

$$x' = \gamma(x - vt), \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

Útleiðsla: Hugsum okkur að athugandi í viðmiðunarkerfinu S' haldi á stöng með eiginlengd x'. Athugandi í S' mun alltaf (fyrir öll t') sjá vinstri enda stangarinnar í 0 og hægri enda stangarinnar í x'. Hinsvegar lítur þetta öðruvísi út fyrir athuganda í S. Hann sér athugandann í S' fjarlægjast sig með hraða v svo að stöngin mun styttast útaf lengdarstyttingu. Hann mælir því lengd stangarinnar sem $\ell = x'/\gamma$. Honum sýnist þá hægri endi stangarinnar vera staddur í $x = vt + \ell = vt + x'/\gamma$ en þá fáum við með því að leysa fyrir x' að:

$$x' = \gamma\left(x - vt\right).$$

En vegna afstæðislögmálsins þá virka nákvæmlega sömu rök fyrir stöng af lengd x í S svo við ályktum að:

$$x = \gamma\left(x' + vt'\right).$$

En með því að einangra fyrir t' úr jöfnunni hér á undan þá fáum við að:

$$vt' = \frac{x}{\gamma} - x' = \frac{x}{\gamma} - \gamma\left(x - vt\right) = \gamma\left(\left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right)x + vt\right) = \gamma\left(vt - \frac{v^2}{c^2}x\right).$$

Sem gefur því að:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right).$$

Með því að nota afstæðislögmálið sjáum við þá að við höfum einnig að: $t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x\right)$.

□

22.6 Óbreyttna tímarúmsvegalengdin

Skilgreining 22.10. Við segjum að stærð sé **óbreytin** ef að hún er eins í öllum viðmiðunarkerfum.

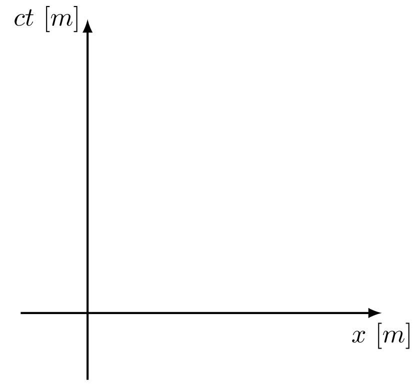
Lögmál 22.11. Tímarúmsvegalengdin $(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$ er óbreytin.

Útleiðsla: Við beitum Lorentz-ummyndun á stærðina. Höfum að:

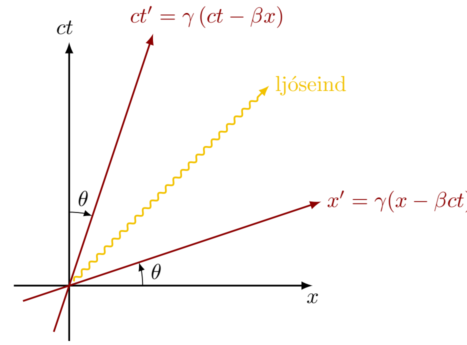
$$\begin{aligned}
(\Delta s')^2 &= (c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 \\
&= \gamma^2\left(c\Delta t - \frac{v}{c}\Delta x\right)^2 - \gamma^2\left(\Delta x - v\Delta t\right)^2 \\
&= \gamma^2(c^2 - v^2)(\Delta t)^2 - \gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(\Delta x)^2 \qquad \text{(því milliliðirnir styttast út)} \\
&= c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (\Delta s)^2.
\end{aligned}$$

Svo við ályktum að $(\Delta s)^2$ (og þar með Δs) er óbreytin stærð því hún er eins í öllum viðmiðunarkerfum. □

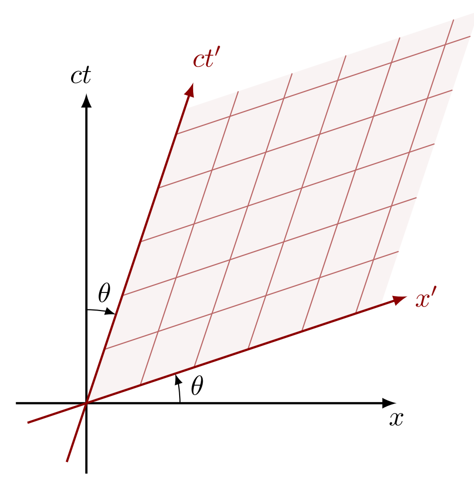
22.7 Tímarúmsmyndir



Það getur verið gott að teikna tímarúmsmyndir í takmörkuðu afstæðiskenningunni til þess að átta sig betur á því hvað er að gerast. Við skulum í þessari grein reyna að útskýra hvernig að maður teiknar slíkar myndir og upplýsingarnar sem er hægt að lesa af þeim. Við byrjum á því að teikna tvo ása eins og sést á grafinu hér til hægri. Ástæðan fyrir því að við setjum ct á lóðrétta ásinn í stað t er vegna þess að ct hefur sömu einingar og x (þ.e. m) svo þá hafa báðir ásanir sömu einingar. Það gerir líka rúmfræðina sem að við fáum út miklu fallegri að skala tímahnitið svona með c (þá er reyndar oftast þægilegast að velja einingarnar á ásunum sem ljósár í staðinn fyrir metra). Þetta graf lýsir því til dæmis hvernig að athugandi í viðmiðunarkerfinu S sér tímarúmið. En okkur langar til þess að bæta við hvernig athugandi í viðmiðunarkerfi S' sem hreyfist afstætt með hraða v miðað við S sér tímarúmið. Þá bætum við inn á grafið eins og sést hér til hægri.



Hornið sem að S' myndar miðað við S er þá $\theta = \arctan(\beta)$ þar sem $\beta = \frac{v}{c}$ og v er afstæði hraðinn milli viðmiðunarkerfanna. Við sjáum þá að þegar að $v = c$ þá verður $\theta = \arctan\left(\frac{c}{c}\right) = \arctan(1) = 45°$ sem samsvarar því sem að maður myndi sjá ef að maður væri að ferðast á ljóshraða (þá fellur tímarúmið saman í eina vídd - ljóseind upplifir þannig fjórvíða tímarúmið eins og eina vídd). Ef að við bætum við ásunum fyrir hvort hnitakerfi um sig þá getum við líka áttað okkur betur á því hvernig að upplifun athugendanna í hvoru viðmiðunarkerfi um sig breytist. Í viðmiðunarkerfinu S' þá munu tveir atburðir gerast á sama tíma ef að þeir liggja á sömu línu samsíða x' ásnum. Eins munu tveir atburðir gerast á sama stað ef að þeir liggja samsíða ct' ásnum. Þess vegna verður hnitakerfi athugandans í S' svona tígullaga séð frá S. Þetta tígulhnitakerfi hefur verið teiknað á myndina hér til hægri.

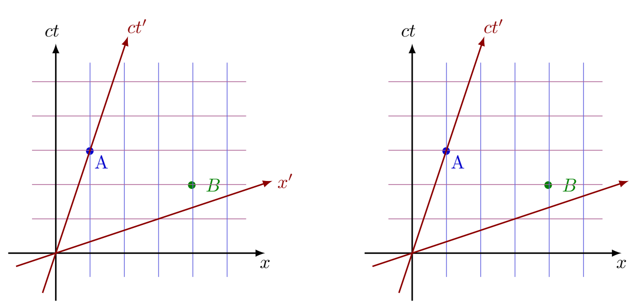


Skoðum núna tvo atburði A og B. Við ætlum að reyna að skoða þá í báðum viðmiðunarkerfunum S og S'. Til þess að gera þetta sýnidæmi áþreifanlegt skulum við láta viðmiðunarkerfin ferðast með hraða $v = \frac{1}{3}c$ miðað við hvert annað. Þá er $\beta = \frac{1}{3}$ og $\gamma = 1{,}06$ svo $\theta = \arctan(\beta) = \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = 18{,}4°$. Látum tímarúmshnitin á atburðunum í S vera $A = (3, 1)\,\text{ly}$ og $B = (2, 4)\,\text{ly}$. Með Lorentz-ummyndun sjáum við að þá er:

$$ct'_A = \gamma(ct_A - \beta x_A) = 1{,}06 \cdot \left(3 - \frac{1}{3} \cdot 1\right) = 2{,}83\,\text{ly}.$$

$$x'_A = \gamma(x_A - \beta ct_A) = 1{,}06 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \cdot 3\right) = 0\,\text{ly}.$$

Þannig að $A' = (2{,}83; 0)\,\text{ly}$. Eins fáum við að $B' = (0{,}71; 3{,}53)\,\text{ly}$ séð með augum athugandans í S'.



Skoðum síðan tímarúmsvegalengdina á milli punktanna A og B í viðmiðunarkerfunum tveimur. Í S höfum við að tímarúmsvegalengdin á milli atburðanna er:

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (ct_B - ct_A)^2 - (x_B - x_A)^2 = (2-3)^2 - (4-1)^2 = -8{,}0\,\mathrm{ly}.$$

En athugandi í S' mælir vegalengdina sem:

$$(\Delta s')^2 = (c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = (ct'_B - ct'_A)^2 - (x'_B - x'_A)^2 = (0.71-2.83)^2 - (3.53-0)^2 = -8{,}0\,\mathrm{ly}.$$

Við sjáum semsagt að athugendurnir mæla sömu tímarúmsvegalengdina á milli atburðanna A og B þó að þeir séu ósammála um lengdina á milli atburðanna og tímann sem líður á milli atburðanna! Við segjum þá að tímarúmsvegalengdin sé óbreytin stærð því allir athugendur eru sammála um tímarúmsvegalengdina á milli tveggja atburða óháð viðmiðunarkerfinu þeirra. Með öðrum orðum þá er stærð óbreytin ef að hún helst óbreytt undir Lorentz-ummyndunum. Í þessu sýnidæmi þá fengum við reyndar að tímarúmsvegalengdin á milli atburðanna A og B var neikvæð! Má það bara? Svarið er já, það má og það hefur ákveðna merkingu sem að við skulum núna fjalla um. Tímarúmsvegalengdin getur haft þrjú formerki (er núll formerki?)

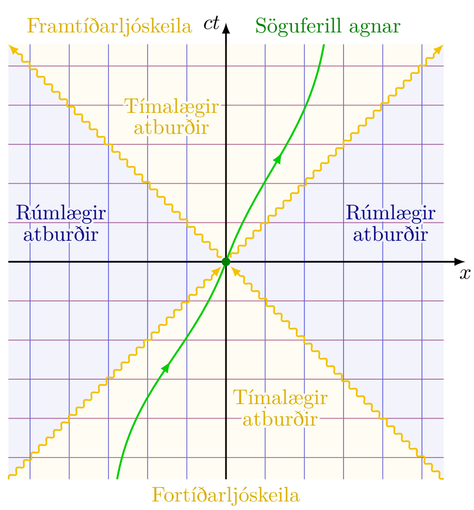
Skilgreining 22.12. Látum $A = (x_A, t_A)$ og $B = (x_B, t_B)$ vera tvo atburði séð frá augum athuganda í viðmiðunarkerfinu S. Við segjum að atburðirnir A og B séu:

(i) **Tímalægir** ef $(\Delta s)^2 > 0$.

(ii) **Rúmlægir** ef $(\Delta s)^2 < 0$.

(iii) **Ljóslægir** ef $(\Delta s)^2 = 0$.

Hvernig á maður samt að hugsa um þessi formerki? Jú, ef að A og B eru ljóslægir þ.e. ef $(\Delta s)^2 = 0$ þá er eina leiðin til þess að senda skilaboð á milli atburðanna með ljósboði. Hinsvegar ef við höfum tímalæga punkta þá er $(\Delta s)^2 > 0$ en það samsvarar því að það væri hægt að ferðast á milli punktanna með hraða $v < c$. Hinsvegar ef tveir punktar eru rúmlægir þá myndi það samsvara því að eina leiðin til þess að ferðast á milli punktanna sé ef að maður ferðast með hraða $v > c$ en það er ekki hægt! Þar sem að tímarúmsvegalengdin er óbreytin þá þýðir þetta að allir athugendur eru sammála um það hvort að tveir atburðir séu tímalægir, ljóslægir eða rúmlægir. Það er annað áhugavert sem að er hægt að nefna (ég ætla ekki að leiða það hér en ef þið hafið áhuga getið þið sent mér fyrirspurn um þetta). Það kemur í ljós að ef tveir atburðir eru tímalægir þá er til viðmiðunarkerfi S' þar sem að atburðirnir gerast á sama tíma. Hinsvegar ef þeir eru rúmlægir þá er til viðmiðunarkerfi S' þar sem að þeir gerast í sama rúmhniti. En það er hægt að gera hvorugt fyrir ljóslæga atburði. Allar þessar niðurstöður má sjá á eftirfarandi tímarúmsmynd:



22.8 Hraðasamlagning

Lögmál 22.13. Lítum á lest sem ferðast með hraða v miðað við kyrrstæðan athuganda B í viðmiðunarkerfi S. Látum A vera athuganda inni í lestinni í viðmiðunarkerfi S'. Nú kastar A bolta inni í lestinni með hraða u'. Þá sér athugandi B hraða boltans sem:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{vu'}{c^2}}$$

Útleiðsla: Athugum fyrst að í viðmiðunarkerfinu S' er staðsetning boltans $\Delta x' = u'\Delta t'$ þ.a. við fáum:

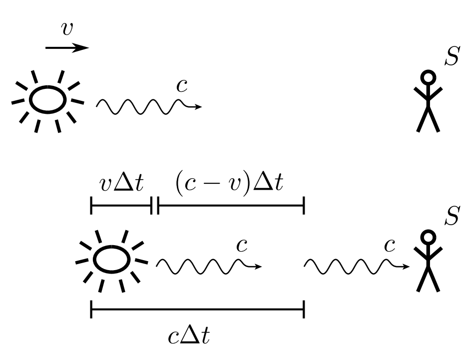
$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\gamma\left(\Delta x' + v\Delta t'\right)}{\gamma\left(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'\right)} = \frac{(u'+v)\Delta t'}{\left(1 + \frac{u'v}{c^2}\right)\Delta t'} = \frac{u'+v}{1+\frac{u'v}{c^2}}.$$

□

22.9 Dopplerhrif fyrir ljós

Lögmál 22.14. Lítum á ljósgjafa sem sendir frá sér ljós með tíðni f' í viðmiðunarkerfi ljósgjafans. Ef ljósgjafinn ferðast með hraða v í áttina að kyrrstæðum athuganda þá mun athugandinn greina tíðni ljósbylgjunnar sem:

$$f = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}f'$$



Útleiðsla: Ljósgjafinn sendir frá sér ljósbylgjur með tíðni f' svo í viðmiðunarkerfi ljósgjafans líður tími $\Delta t' = \frac{1}{f'}$ á milli þess sem að ljósgjafinn sendir frá sér ljósbygljur. En athugandi í kerfinu S mun sjá þetta sem lengri tíma (því tíminn í viðmiðunarkerfi ljósgjafans líður hægar því hann er á ferð) en þar með mun tíminn sem líður á milli ljósblossa vera $\Delta t = \gamma\Delta t'$ í viðmiðunarkerfi athugandans í S. En á þeim tíma hefur ljósgjafinn ferðast nær um vegalengd $v\Delta t$ en ljósið hefur ferðast vegalengd $c\Delta t$ svo tíminn sem líður á milli þess að athugandinn í S greinir ljósblossa er:

$$\Delta T = \frac{(c-v)\Delta t}{c} = (1-\beta)\,\gamma\Delta t' = \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\Delta t' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\Delta t'$$

En þar með ályktum við að tíðnin sem athugandi í S greinir er gefin með:

$$f = \frac{1}{\Delta T} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\frac{1}{\Delta t'} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}f'.$$

Sér í lagi sjáum við að $f > f'$ þegar að ljósgjafinn nálgast athugandann en $f < f'$ þegar hann fjarlægist. □

22.10 Skriðþungi, orka og kraftur

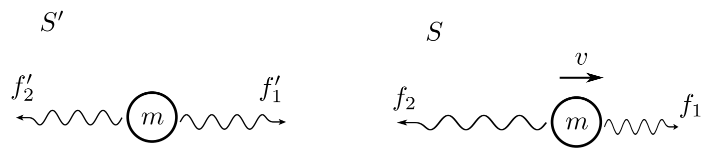
Skilgreining 22.15. **(Einstein, 1905)** Ljós með tíðni f og bylgjulengd λ hegðar sér eins og straumur agna sem við köllum **ljóseindir** þar sem hver ögn hefur orku og skriðþunga:

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda}, \qquad p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Þar sem $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$ er fasti sem nefnist fasti Plancks.

Lögmál 22.16. Lítum á ögn með massa m sem ferðast með hraða v (miðað við viðmiðunarkerfið S). Þá eru heildarorka og skriðþungi agnarinnar í viðmiðunarkerfinu S gefnar með:

$$E = \gamma m c^2, \qquad p = \gamma m v.$$



Útleiðsla: Látum S tákna viðmiðunarkerfi þar sem að hraði agnarinnar er m og hraði hennar v. Látum S' tákna viðmiðunarkerfi agnarinnar þar sem að ögnin er kyrr. Látum E_0 tákna orku eindarinnar í kyrrstöðukerfinu. Hugsum okkur nú að ögnin hrörni í tvær ljóseindir. Í kyrrstöðukerfinu þá mun önnur ljóseindin hafa tíðni f_1' en hin hafa tíðni f_2' en þar sem að skriðþungi kerfisins er varðveittur (miðað við kyrrstöðukerfið) er:

$$0 = p'_{\text{fyrir}} = p_1' - p_2' \implies p_1' = p_2' \implies \lambda_1' = \lambda_2'$$

Með öðrum orðum þá hafa ljóseindirnar sömu bylgjulengd og þar með sömu tíðni í kyrrstöðukerfinu S' (því þá er $f_1' = c/\lambda_1' = c/\lambda_2' = f_2'$). En þar með höfum við að:

$$E_0 = 2hf',$$

þar sem f' er tíðni ljóseindanna í kyrrstöðukerfinu. Skoðum næst hvað gerist í viðmiðunarkerfinu S þar sem að ögnin er á hreyfingu með hraða v. Látum E tákna orku hennar í þessu viðmiðunarkerfi og p tákna skriðþunga hennar. Hugsum okkur aftur að hún hrörni í tvær ljóseindir með tíðni f_1 og f_2. Athugandi í viðmiðunarkerfinu S mun greina Dopplerhrif frá ljósinu svo að:

$$f_1 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} f', \qquad f_2 = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} f'.$$

En þar með gildir að:

$$E = hf_1 + hf_2 = hf' \left(\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} + \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \right) = hf' \frac{(1+\beta) + (1-\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} = 2hf'\gamma = \gamma E_0.$$

Svo í viðmiðunarkerfinu þar sem að ögnin er á hreyfingu þá er hreyfiorka hennar:

$$K = E - E_0 = (\gamma - 1)\, E_0$$

En við vitum að fyrir $v \ll c$ þ.e. $\beta \ll 1$ ættum við að endurheimta gömlu góðu hreyfiorkuna okkar, $\frac{1}{2} m v^2$, þannig að:

$$K = (\gamma - 1)\, E_0 = \left(\left(1 - \beta^2\right)^{-1/2} - 1 \right) E_0 \overset{v \ll c}{\approx} \left(1 + \frac{\beta^2}{2} - 1 \right) E_0 = \frac{1}{2} E_0 \beta^2 \overset{!}{=} \frac{1}{2} m v^2$$

En þar með sjáum við að eina leiðin til þess að $K \approx \frac{1}{2}mv^2$ er ef að $E_0 = mc^2$. Snúum okkur síðan að skriðþunganum. Þá höfum við að:

$$p = \frac{h}{c}f_1 - \frac{h}{c}f_2 = \frac{hf'}{c}\left(\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\right) = \frac{hf'}{c}\frac{(1+\beta)-(1-\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2hf'}{c}\gamma\beta$$

En við vitum að fyrir $v \ll c$ þ.e. $\beta \ll 1$ ættum við að endurheimta gamla góða skriðþungann, mv, þannig að við athugum að:

$$p = \frac{2hf'}{c^2}v\left(1-\beta^2\right)^{-1/2} \overset{v \ll c}{\approx} \frac{2hf'v}{c^2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \overset{v \ll c}{\approx} \frac{2hf'v}{c^2} \overset{!}{=} mv$$

Svo við ályktum að $m = \frac{2hf'}{c^2}$. En þar með höfum við sýnt að $p = \gamma mv$.

$\square$

Þetta er hin fræga niðurstaða $E = mc^2$ sem er kennd við Einstein. En í gegnum árin hefur hún skolast svolítið til. Í dag ætti maður að skrifa $E = \gamma mc^2$ en á tímum Einsteins var talað um svokallaðan kyrrstöðu massa m_0 og massi hlutarins var þá $m(v) = \gamma m_0$. En það er frekar óheppilegt ef að massi hluta breytist eftir viðmiðunarkerfum. Það er þægilegra að tala um að hinn svokallaði kyrrstöðumassi sé massi hlutarins (annars þarf maður líka að fara að tala um svokallaðan þvermassa og langsmassa og massinn er þá mismikill í mismunandi stefnur sem er algjör hausverkur).

Skilgreining 22.17. Stærðin $E_0 = U = mc^2$ kallast **kyrrstöðuorka** massans m og er óbreytin stærð.

Skilgreining 22.18. Stærðin $K = (\gamma - 1)mc^2$ kallast **hreyfiorka** massans m.

Við sjáum þá sér í lagi að $K + U = K + E_0 = \gamma mc^2 = E$ er heildarorka massans m.

Lögmál 22.19. Látum E og p tákna heildarorku og skriðþunga eindar í viðmiðunarkerfinu S. Þá er stærðin $E^2 - (pc)^2$ óbreytin og sér í lagi gildir að:

$$E^2 - (pc)^2 = E_0^2 = (E')^2 - (p'c)^2$$

Þar sem E' og p' eru heildarorka og skriðþungi eindarinnar í viðmiðunarkerfinu S'.

Útleiðsla: Þetta er bara einföld algebruæfing. Athugum fyrst að $pc = \gamma mvc = \gamma\beta mc^2$. Fáum því að:

$$E^2 - (pc)^2 = \left(\gamma mc^2\right)^2 - (\gamma\beta mc^2)^2 = \gamma^2\left(1-\beta^2\right)(mc^2)^2 = (mc^2)^2 = E_0^2$$

Sem er óbreytin stærð svo þar með höfum við sýnt að $E^2 - (pc)^2$ sé einnig óbreytin.

$\square$

Mikilvægasta lögmál eðlisfræðinnar er kennt við stærðfræðinginn, Emmy Noether, og útskýrir tengslin á milli samhverfu og varðveislulögmálanna. Í klassískri eðlisfræði staðhæfir lögmál Noethers að orka er varðveitt ef að heildarorka kerfisins er óbreytt undir vörpuninni $t \to t + \Delta t$ (með öðrum orðum að það skipti ekki máli hvernig að við skilgreinum upphafstímann). Eins má sýna með lögmáli Noethers að skriðþungi kerfisins er varðveittur ef að heildarorka kerfisins er óbreytt undir vörpuninni $x \to x + \Delta x$ (með öðrum orðum ef að það skiptir ekki máli hvar við skilgreinum upphafspunktinn). Að lokum fáum við hverfiþungavarðveislu samkvæmt lögmálum Noethers ef að heildarorka kerfisins er óbreytin undir snúningum $\vec{r} \to \vec{r}'$ (með öðrum orðum að það skiptir ekki máli hvernig að við skilgreinum upphafshornið).

22.11 Nálganir

Í þessum undirkafla ætlum við að sýna að ef að við gerum þá nálgun að $v \ll c$ þá endurheimtum við gömlu góðu klassísku eðlisfræðina okkar. Þar með erum við að sýna að takmarkaða afstæðiskenningin inniheldur alla þá eðlisfræði sem að við þekkjum og gott betur! Í rauninni byggja allar nálganirnar í þessari undirgrein á uppáhalds nálgun eðlisfræðingsins:

$$(1+x)^n \approx 1+nx, \qquad \text{ef } |x| \ll 1.$$

Við byrjum á því að skoða lengdarstyttinguna:

$$\ell = \frac{\ell_0}{\gamma} = \ell_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \ell_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \underbrace{\approx}_{\frac{v^2}{c^2} \ll 1} \ell_0\left(1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = \ell_0 - \frac{1}{2}\ell_0\frac{v^2}{c^2}.$$

Svo í fyrstu Taylor-nálgun þá sjáum við að $\ell \approx \ell_0$ (ef $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$). Skoðum síðan næst tímalenginguna:

$$t = \gamma t_0 = \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = t_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx t_0\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = t_0 + \frac{1}{2}t_0\frac{v^2}{c^2}.$$

Svo við sjáum aftur í fyrstu nálgun að $t \approx t_0$ (ef $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$). Skoðum síðan Lorentz-ummyndanirnar:

$$x' = \gamma(x-vt) = (x-vt)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx (x-vt)\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) \approx x - vt.$$

Eins fæst fyrir tímann að:

$$t' = \gamma\left(t-\frac{v}{c^2}x\right) \approx \left(t-\frac{v}{c^2}x\right)\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) \approx t$$

Við sjáum því að við fáum $t' = t$ og $x' = x - vt$ sem að eru einmitt Galíleó-ummyndanirnar. Skoðum næst hraðasamlagninguna:

$$u' = \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}} = (u-v)\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)^{-1} \approx (u-v)\left(1+\frac{uv}{c^2}\right) \approx (u-v).$$

Fyrir Dopplerhrifin fáum við:

$$f = (1+\beta)^{1/2}(1-\beta)^{-1/2}f' \approx \left(1+\frac{\beta}{2}\right)\left(1+\frac{\beta}{2}\right)f' \approx f' + \beta f' = (1+\beta)f' = \left(1+\frac{v}{c}\right)f'$$

Sem er einmitt það sem að við myndum búast við í klassískri eðlisfræði. Loks er:

$$E = \gamma mc^2 \approx mc^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2.$$

og þá sér í lagi $K = (\gamma-1)mc^2 \approx \frac{1}{2}mv^2$ og loks höfum við að:

$$p = \gamma mv \approx mv\left(1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) \approx mv.$$

Við höfum semsagt sýnt að í öllum tilvikum endurheimtum við klassísku eðlisfræðina okkar.

22.12 Dæmi

Dæmatími 31: Afstæðiskenningin: Tímaþennsla

Ljóshraðinn, c, er sá sami í öllum tregðukerfum. Ef t_0 er tíminn og ℓ_0 er lengdin sem að athugandi mælir í lest sem ferðast með hraða v. Þá er tíminn og lengdin sem að kyrrstæður athugandi á brautarpallinum mælir:

$$t = \gamma t_0, \qquad \ell = \frac{\ell_0}{\gamma}, \qquad \text{þar sem} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

(36.13) Athugandi á jörðinni sér mýeind ferðast 60 km vegalengd í lofthjúp jarðar á 400 μs. Hvað tekur þetta langan tíma samkvæmt mýeindinni?

(36.15) Geimfari nokkur hefur verið sendur með geimflaug í áttina að Proxima Centauri, sem er sú stjarna sem er næst sólinni okkar. Hún er í 4,24 ljósára fjarlægð og geimflaugin ferðast með hraðanum $0,80c$. **(a)** Hversu langan tíma tekur ferðin samkvæmt jarðarbúum? **(b)** Hversu langan tíma tekur ferðin samkvæmt geimfaranum? **(c)** Þegar geimfarinn nær til Proxima Centauri sendir hann útvarpsboð til baka til jarðarinnar. Hversu löngu eftir að geimfarinn lagði af stað munu jarðarbúar heyra skilaboðin?

(36.16) Elon Musk hefur séð fram á það að hann muni ekki ná að sjá næstu þvergöngu Venusar árið 2117 þar eð hann verður ellidauður. En Elon Musk dettur það snilldarráð í hug að stökkva upp í SpaceX geimflaugina sína og fljúga með hraða v (miðað við viðmiðunarkerfi jarðarinnar) í áttina að nálægri fjarreikistjörnu og snúa þar við og koma síðan aftur til jarðarinnar. Hann ætlar að skipuleggja ferðina þannig að hann eldist sjálfur aðeins um 5 ár á meðan að athugendur á jörðinni eldast um 90 ár. **(a)** Hver þarf hraði geimflaugarinnar, v, að vera? **(b)** Hversu langt er til fjarreikistjörnunnar?

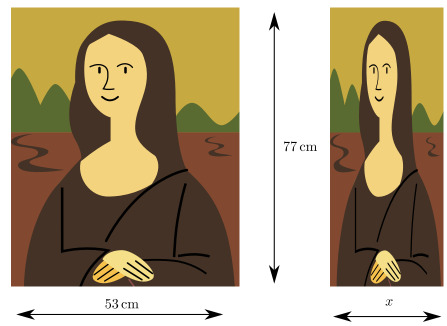
(36.19) Mark Cuban á lífstíðarflugpassa með American Airlines sem þýðir að hann býður stundum Dirk Nowitzki frítt flug heim til Berlínar frá Dallas. Flugvegalengdin er um það bil 8550 km og flugvélin ferðast með hraða 900 km/klst. Hversu mikið yngjast Cuban og Nowitzki miðað við fólkið í Dallas á því að fljúga svona fram og tilbaka? (*Ábending:* Þið gætuð þurft að nota nálgunina $(1+x)^n \approx 1+nx$).

(36.13) 350 μs. **(36.15)** 5,3 ár, 3,2 ár, 9,5 ár. **(36.16)** $0,998c$, 44,9 ly **(36.19)** 11,9 ns.

Dæmatími 32: Afstæðiskenningin: Lengdarstytting

Ljóshraðinn, c, er sá sami í öllum tregðukerfum. Ef t_0 er tíminn og ℓ_0 er lengdin sem að athugandi mælir í lest sem ferðast með hraða v. Þá er tíminn og lengdin sem að kyrrstæður athugandi á brautarpallinum mælir:

$$t = \gamma t_0, \qquad \ell = \frac{\ell_0}{\gamma}, \qquad \text{þar sem} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$



(36.20) Móna Lísa er frægt olíumálverk eftir Leonardo da Vinci sem er til sýnis á Louvre-safninu í París. Málverkið er aðeins 77 cm á hæð og 55 cm á breidd. Nýlega hafa frönsk stjórnvöld farið að bjóða geimferðamönnum að fljúga í gegnum safnið á ógnarhraða, $0,90c$, til þess að bera málverkið augum án þess að þurfa að bíða í röðinni með jarðarbúum. Hversu breitt sýnist þeim þá málverkið vera?

(36.23) Mýeind ferðast í gegnum lofthjúp jarðar með hraðanum $0,9997c$ miðað við athuganda á jörðinni. Frá athugandanum séð þá ferðast mýeindin 60 km vegalengd frá því að hún myndaðist og þar til að hún hrörnaði. **(a)** Hver er líftími mýeindarinnar séð frá sjónarhóli athugandans á jörðinni? **(b)** Hversu langa vegalengd finnst mýeindin eins og að hún hafi ferðast? **(c)** Hver er líftími mýeindarinnar frá hennar eigin sjónarhorni?

(36.21) Með hvaða hraða þarf stöng að ferðast til þess að hún líti út fyrir að vera helmingi styttri en hún er?

(36.25) Mannshár er um það bil 50 μm í þvermál. Gregor Clegane á 143 cm langt sverð. Hann þrumar sverðinu sínu í áttina að Oberyn Martell sem rétt nær að víkja undan sverðinu. Þegar að sverðið ferðast framhjá Oberyn sýnist honum sverðið ekki vera lengra heldur en mannshár. Hver var hraði sverðsins? (*Ábending:* Þið gætuð þurft að nota nálgunina $(1 + x)^n \approx 1 + nx$).

(36.20) 23 cm. **(36.23)** 200 μs, 1,5 km, 4,9 μs. **(36.21)** $0,866c$. **(36.25)** $0,9999999994c$.

Dæmatími 33: Afstæðiskenningin: Hraðasamlagning og Lorentz-ummyndanir

Ef að atburður gerist í tímarúmspunktinum (x, t) í viðmiðunarkerfinu S þá sér S' atburðin gerast í:

$$\Delta x' = \gamma\left(\Delta x - v\Delta t\right), \qquad \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right).$$

Ef að athugandi í S' kastar bolta með hraða u' þá sér athugandi í S boltan hafa hraða u þar sem:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}, \qquad \text{sem má líka snúa við með afstæðislögmálinu:} \qquad u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}.$$

(36.31) Matti Svifdal keyrir í DeLorean kagga með hraða $0,60c$ beint í áttina að klikkaða vísindamanninum Doksa sem ferðast beint í áttina að Matta í risastórri járnbrautalest með hraða $0,80c$. Með hvaða hraða sýnist Matta að Doksi nálgist hann?

(36.55) Hans Óli og förunautur hans Loðinbarði þjóta framhjá Naboo með hraðanum $0,80c$ á geimskutlunni sinni, Þúsaldarfálkanum (sem hefur raunverulega lengd 35 m). Logi Geimgengill flýgur í áttina að félögum sínum á X-vængnum, Rauðu fimmunni, með hraðanum $0,60c$. **(a)** Hversu langur sýnist Loga Þúsaldarfálkinn vera? **(b)** Nú nálgast Svarthöfði óðfluga hetjurnar í Þúsaldarfálkanum með hraðanum $0,90c$ svo Loðinbarði skýtur byssukúlu út um afurenda geimflaugarinnar með hraða $0,95c$ miðað við geimflaugina þeirra. Með hvaða hraða sér Svarthöfði byssukúluna nálgast sig?

(36.53.) Matti og Edda horfa á sprengistjörnuna Delta (D) springa í geimsjónaukanum hans Matta. Þau sjá líka fyrir tilviljun þrjú geimskip af geimverum flýja frá sólkerfi sprengistjörnunnar Delta í áttina að stjöruninni Epsilon (E). Geimskip geimveranna ferðast með hraða $v_1 = 0,30c$, $v_2 = 0,50c$ og $v_3 = 0,70c$ og stjarnan Epsilon er í 2 ljósára fjarlægð frá Delta (frá sjónarhóli Matta og Eddu). Einu ári síðar þá sjá Matti og Edda hinsvegar fyrirheitnu stjörnuna, Epsilon, springa í loft upp. Allir athugendurnir velja upphafspunkt tímarúmsins þannig að Delta springur í $(0, 0)$. **(a)** Hvenær springur sprengistjarnan Epsilon í viðmiðunarkerfum athugendanna í geimskipunum þremur? **(b)** Er einhver athugandi í viðmiðunarkerfi þar sem að sprengingarnar gerast á sama tíma? **(c)** Er einhver athugandi í viðmiðunarkerfi þar sem að Epsilon springur á undan Delta? **(d)** Eru sprengingarnar tímalægir ($(\Delta s)^2 > 0$), rúmlægir ($(\Delta s)^2 < 0$) eða ljóslægir atburðir ($(\Delta s)^2 = 0$)?

(36.74) Tvö geimskip hafa raunverulega lengd 1000 m (miðað við sitt eigið viðmiðunarkerfi). Anna, kapteininn á geimskipi A er að taka fram úr Baldri, kapteininum á geimskipi B. Anna flýgur skipinu sínu með hraða $0,80c$ en Baldur sniglast áfram á $0,60c$ (bæði er miðað við það sem áhorfandi á jörðinni sér). Hversu langan tíma finnst Baldri það taka Önnu að taka fram úr sér? Tímatakan hefst þegar að fremri endinn á geimskipi Önnu nemur við afturendan á geimskipi Baldurs og stöðvast þegar afturendinn á geimskipi Önnu yfirgefur framendan á geimskipi Baldurs.

(36.31) $0,95c$. **(36.55)** 10,9 m, $0,976c$. **(36.53)** $(t_1, x_1) = (0{,}42\,\text{ár}, 1{,}78\,\text{ly})$, $(t_2, x_2) = (0\,\text{ár}, 1{,}73\,\text{ly})$, $(t_3, x_3) = (-0{,}56\,\text{ár}, 1{,}82\,\text{ly})$. **(36.74)** $16{,}6\,\mu\text{s}$.

Dæmatími 34: Afstæðiskenningin: Orka og skriðþungi

Heildarorka, skriðþungi, kyrrstöðuorka og hreyfiorka einda eru gefnar með:

$$E = \gamma mc^2, \qquad p = \gamma mv, \qquad E_0 = mc^2, \qquad K = E - E_0 = (\gamma - 1)mc^2.$$

Sér í lagi gildir að:

$$E^2 - (pc)^2 = E_0^2$$

Ljóseindir hafa skammtaða orku sem er háð tíðni ljóssins: $E = hf = \frac{hc}{\lambda}$ þar sem $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$ er fasti sem kallast fasti Plancks. Ljóseindir eru massalausar svo sér í lagi gildir um þær að $E = pc$.

(36.39) **(a)** Við hvaða hraða er skriðþungi eindar tvisvar sinnum meiri heldur en klassíski skriðþunginn?

(b) Við hvaða hraða er heildarorka eindar tvisvar sinnum meiri heldur en kyrrstöðuorka hennar?

(c) Við hvaða hraða er hreyfiorka eindar tvisvar sinnum meiri heldur en kyrrstöðuorka hennar?

(37.26) Rafeindarvoltið (eV) er mælieining á orku sem er mikið notuð í kjarneðlis- og öreindafræði. Einingin er skilgreind sem sú orka sem að rafeind fær við það að vera hraðað yfir $1\,\mathrm{V}$ spennumun en þá gildir að: $1\,\mathrm{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$. **(a)** Hver er kyrrstöðurorka rafeindar í eV? En róteindar? **(b)** Hver er heildarorka rafeindar sem að ferðast með hraðanum $0,99c$? En róteindar? **(c)** Hver er hraði rafeindar sem að hefur heildarorku $2{,}0\,\mathrm{GeV}$? En róteindar?

(36.73) Rafeind ferðast með hraða $0,90c$ í áttina að jáeind sem hefur hraða $0,90c$ í gagnstæða stefnu. Í árekstrinum eyðast báðar eindirnar og orkan sem losnar í árekstrinum fer í að mynda tvær eins ljóseindir. Hver er bylgjulengd ljóseindanna?

(37.28) Í stóra sterkeindahraðalinum LHC (Large Hadron Collider) í Genf, Sviss eru róteindir með heildarorku $6{,}5\,\mathrm{TeV}$ látnar lenda í árekstri við hvor aðra. **(a)** Hver er hraði eindanna? **(b)** Í slíkum árekstrum myndast oft ótalmargar orkuríkar öreindir. Fræðilega séð (það er mjög ólíklegt) getur myndast ein gríðarlega orkurík öreind (slík öreind væri óstöðug og myndi fljótlega hrörna niður í aðrar öreindir) í árekstrinum. Hver væri massi eindarinnar?

(36.39) $v_a = 0,866c$, $v_b = 0,866c$, $v_c = 0,943c$. **(37.26)** $E_{0,e} = 0{,}511\,\mathrm{MeV}$, $E_{0,p} = 938{,}3\,\mathrm{MeV}$, $E_e = 3{,}62\,\mathrm{MeV}$, $E_p = 6652\,\mathrm{MeV}$, $v_e = 0,99999997c$, $v_p = 0,883c$. **(36.73)** $1{,}06\,\mathrm{pm}$. **(37.28)** $1{,}26 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}$.

Kafli 23

Ljós

„Það fyrsta sem Newton komst að raun um þegar hann hóf að athuga ljós var að hvítt ljós er blanda lita. Með glerstrendingi gat hann klofið hvítt ljós í ýmsa liti, en þegar hann sendi einlitt ljós - til dæmis rautt - gegnum annan þrístrending sá hann að ekki var hægt að kljúfa það frekar. Newton uppgötvaði því að hvítt ljós er blanda lita sem eru hreinir í þeim skilningi að engan þeirra er hægt að kljúfa í sundur. Newton taldi ljós samanstanda af eindum og hann hafði rétt fyrir sér (en rökin hans voru röng). Við vitum að ljós samanstendur af ögnum því það eru til næm tæki sem gefa frá sér smelli ef ljós skín á þau, og þótt ljósið dofni meir og meir eru smellirnir alltaf jafn háir, aðeins færri. Ljós er því ekki ósvipað regndropum. Hver dropi ljóss er kallaður ljóseind og ef ljósið er einlitt eru allir droparnir jafn stórir.“

- Richard P. Feynman, Ljósið, 1985

23.1 Lögmál Snells

Ljós ferðast alltaf með hraða $c = 3{,}00 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ óháð viðmiðunarkerfi. Hinsvegar, þá segir fólk stundum óheppilega að ljós ferðist „hægar“ í sumum efnum. En það er einfaldlega vegna þess að ljósið virðist ferðast hægar því að sameindir efnisins sem að ljósið ferðast í gegnum gleypa ljóseindirnar sem að lenda í árekstri við þær. Við það örvast sameindir efnisins upp í hærra orkustig, en sameindirnar vilja að eðlisfari vera í orkulægsta ástandinu sínu, grunnástandinu, svo að þær geisla aftur orkunni í burtu (jafn mikil orka svo að ljósið sem losnar aftur hefur sömu tíðni og upphaflega ljósið hafði). Við þetta virðist hægjast á ljósinu því hver svona árekstur tekur um það bil $1\,\mathrm{ns}$ (fer eftir því hversu þétt efnið er). Það sem meira er þá hefur þetta í för með sér að ljósgeislinn beygir við það að fara inn í önnur efni (hægt að sjá það með skriðþungavarðveislu á skilfletinum t.d.). Annað merkilegt, er eftirfarandi forsenda sem er gjarnan tileinkuð Fermat um eðli ljóssins:

Lögmál 23.1. (Lögmál Fermats) Ljósið ferðast ávallt þá leið milli tveggja punkta sem tekur stystan tíma að ferðast.

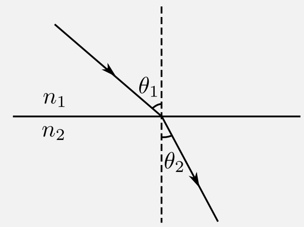
Skilgreining 23.2. Við táknum með n_{efni} brotstuðul efnis þar sem að ljóshraðinn er $c_{\mathrm{efni}} < c$. Brotstuðullinn er skilgreindur þannig að:

$$n_{\mathrm{efni}} = \frac{c}{c_{\mathrm{efni}}}$$

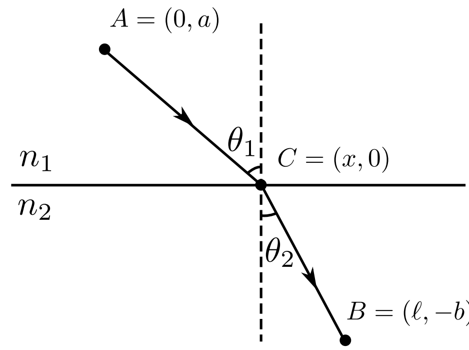
Takið sér í lagi eftir því að við höfum ávallt að $n_{\mathrm{efni}} \geq 1$ því $c_{\mathrm{efni}} \leq c$.

Lögmál 23.3. (Lögmál Snells) Látum ljós ferðast á milli tveggja efna þar sem að brotstuðlarnir eru n_1 og n_2. Látum θ_1 og θ_2 vera hornin sem að ljósgeislinn myndar við þverlana. Þá gildir að:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$



Útleiðsla 1: Látum ljósgeislan byrja í $A = (0, a)$ og enda í $B = (\ell, -b)$ eftir viðkomu í $C = (x, 0)$ á skilum efnanna. Við viljum lágmarka heildartímann sem það tekur ljósið að ferðast á milli A og C. Þar sem að ljósið ferðast með hraða c_1 í efni 1 en með hraða c_2 í efni 2 þá höfum við að heildartíminn sem það tekur ljósið að ferðast á milli A og C er gefinn með:



$$\tau(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(\ell - x)^2 + b^2}}{c_2}$$

En samkvæmt Fermat velur ljósið þá leið sem að lágmarkar ferðatímann:

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{x}{c_1\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{\ell - x}{c_2\sqrt{(\ell - x)^2 + b^2}} \overset{!}{=} 0.$$

En af skilgreiningunni á sínus sjáum við af rúmfræðinni á myndinni að:

$$\sin\theta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \qquad \text{og} \qquad \sin\theta_2 = \frac{\ell - x}{\sqrt{(\ell - x)^2 + b^2}}$$

svo við ályktum að útgildið gefur að:

$$\frac{d\tau}{dx} \overset{!}{=} 0 \implies \frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2}$$

Við margföldum að lokum í gegn með ljóshraðanum c og höfum því lögmál Snells:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2.$$

□

Það er reyndar til önnur útleiðsla á lögmáli Snells sem er kennd við Newton (og kannski líka smá Einstein). Hún er eftirfarandi:

Útleiðsla 2: Samkvæmt Einstein þá samanstendur ljós af litlum ögnum sem við köllum ljóseindir. Hver ljóseind hefur orku $E_\gamma = hf = \frac{hc}{\lambda}$ þar sem f er tíðni ljóssins og λ er bylgjulengd þess. Fyrir massalausar agnir (eins og ljósið) þá gildir að skriðþungi ljóssins er $p_\gamma = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c}$. Ef við ímmyndum okkur hvað gerist á skilfleti efnanna þá sjáum við fyrir okkur að það er enginn heildarkraftur í láréttu stefnuna svo að skriðþunginn í láréttu stefnuna er varðveittur. Hinsvegar er einhver kraftur í lóðréttu stefnuna á skilunum - við getum hugsað okkur að það sé vegna aðdráttarkraftsins frá sameindunum á sitt hvorri hliðinni. En skriðþungavarðveislan í láréttu stefnuna gefur strax lögmál Snells:

$$\frac{hf_1}{c_1}\sin\theta_1 = \frac{hf_2}{c_2}\sin\theta_2$$

þar sem að heildarorka ljóseindanna er varðveitt svo $hf_1 = hf_2$. Við margföldum loks í gegn með c og fáum:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2.$$

□

23.2 Alspeglun

Að lokum skulum við fjalla stuttlega um alspeglun. Skoðum aðeins lögmál Snells aftur:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \implies \sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1$$

Eina leiðin til þess að þessi jafna geti gengið er ef að stærðin:

$$\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1 \leq 1$$

Þá hefur jafnan alltaf lausn og θ_2 ákvarðast af því skilyrði - með öðrum orðum þá kemst geislinn út úr efninu. Hinsvegar ef

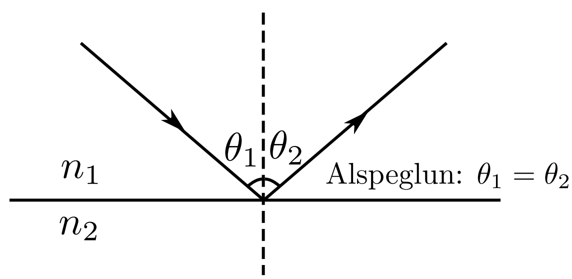
$$\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1 > 1$$

þá fáum við svokallaða **alspeglun**. Þá sleppur geislinn ekki út um hina hliðina. Við sjáum líka að þar sem að $\sin\theta_1 \leq 1$ þá er eina leiðin til þess að fá alspeglun ef:

$$\frac{n_1}{n_2} > 1 \implies n_1 > n_2.$$

Með öðrum orðum þá sjáum við að alspeglun getur einungis orðið þegar að ljós fer úr efni með hærri brotstuðul í efni með lægri brotstuðul þ.e.a.s. úr þéttara efni í ekki eins þétt efni (t.d. gler í loft eða gler í vatn).

Sér í lagi sjáum við að ef að það verður speglun þá er innfallshornið θ_1 jafnt útfallshorninu, θ_2, þ.e.



Með öðrum orðum þá vitum við að þegar að hlutir speglast af yfirborði þá er $\theta_1 = \theta_2$.

23.3 Upprifjun: Einföld sveifluhreyfing og bylgjusamliðun

Á þessu stigi málsins þá held ég að við þurfum að rifja upp aðeins úr 5. bekk. Til að byrja með skulum við rifja upp hvað einföld sveifluhreyfing er:

Skilgreining 23.4. Við segjum að hlutur sé á **einfaldri sveifluhreyfingu** með **sveiflutíðni** ω ef lýsa má staðsetningu hlutarins, $z(t)$, sem fall af tíma með jöfnu af gerðinni:

$$\ddot{z} = -\omega^2 z.$$

Eins og þið munið síðar læra þá er þetta óhliðruð 2. stigs diffurjafna með fastastuðlum sem hefur lausn:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi).$$

Til þess að sanna að eitthvað fall sé lausn á diffurjöfnu þá diffrar maður einfaldlega fallið og sýnir að það uppfylli diffurjöfnuna. En við athugum einmitt að:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi), \qquad \ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$$

Sem sýnir að $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ er fullkomin lausn á diffurjöfnunni. Almennt þarf 2 fasta (hér A og φ) til þess að ákvarða fullkomlega lausn á 2. stigs diffurjöfnu. Bylgjur eru síðan bara tvær einfaldar sveifluhreyfingar settar saman í eina hreyfingu, þ.e.a.s einföld sveifluhreyfing í tíma og rúmi. Bylgjujafnan er:

Skilgreining 23.5. Látum $\psi(x,t)$ lýsa fráviki hlutar frá jafnvægisstöðu sinni sem fall af staðsetningu, x og tíma, t. Við segjum að hluturinn sé á **bylgjuhreyfingu** með **bylgjuhraða** c ef frávikið uppfyllir **bylgjujöfnuna**:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Lausnir á bylgjujöfnunni eru þá föll af gerðinni:

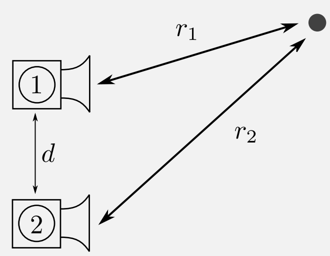
$$\psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \varphi), \qquad \text{þar sem} \qquad \omega = ck.$$

Sem við getum auðveldlega sannað með diffrun:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi(x,t), \qquad c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -c^2 k^2 \psi(x,t) = -\omega^2 \psi(x,t).$$

Ef við leggjum síðan saman tvær samfasa bylgjur frá sömu uppsprettu (það þýðir í stuttu máli að tíðnin er sú sama og þar með bylgjulengdin þar að auki sem að fasahornið er núll og þá höfum við:

Lögmál 23.6. Hugsum okkur að við höfum tvær samfasa bylgjuuppsprettur í fjarlægð d frá hvor annarri sem senda út eins bylgjur með útslag A, tíðni f og bylgjulengd λ. Skoðum einhvern punkt, P, sem er þannig að önnur uppsprettan er í fjarlægð r_1 frá punktinum og hin uppsprettan er í fjarlægð r_2 frá punktinum.



Þá er samliðunarbylgjan sem athugandi í punkti P greinir gefin með:

$$A\sin(kr_1 - \omega t) + A\sin(kr_2 - \omega t) = 2A\cos\left(\frac{1}{2}k\Delta r\right)\sin\left(\frac{1}{2}k(r_1 + r_2) - \omega t\right).$$

Sér í lagi þá mun athugandinn heyra fullkomlega styrkjandi/eyðandi bylgjusamliðun í punkti P ef:

$$\Delta r = \begin{cases} n\lambda & \text{(styrkjandi bylgjusamliðun)} \\ \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda & \text{(eyðandi bylgjusamliðun)} \end{cases}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Útleiðsla: Skoðum samliðunarbylgjuna í punktinum P en hún er gefin með:

$$\psi_{\mathrm{P}} = \psi_1 + \psi_2 = A\sin(kr_1 - \omega t) + A\sin(kr_2 - \omega t)$$

Með því að nota þáttunarreglur hornafalla:

$$\sin(s) + \sin(t) = 2\sin\left(\frac{s+t}{2}\right)\cos\left(\frac{s-t}{2}\right),$$

fæst að:

$$\begin{aligned}\psi &= A\sin(kr_1-\omega t)+A\sin(kr_2-\omega t)\\ &= 2A\sin\left(\frac{(kr_1-\omega t)+(kr_2-\omega t)}{2}\right)\cos\left(\frac{(kr_1-\omega t)-(kr_2-\omega t)}{2}\right)\\ &= 2A\cos\left(\frac{1}{2}k\Delta r\right)\sin\left(\frac{1}{2}k(r_1+r_2)-\omega t\right).\end{aligned}$$

Við sjáum að samliðunarbylgjan hegðar sér eins og bylgja með fast útslag $B = 2A\cos\left(\frac{1}{2}k\Delta r\right)$, tíðni f og bylgjulengd λ, sem rita mætti sem $\psi = B\sin(kr-\omega t)$ þar sem $r = \frac{r_1+r_2}{2}$ er meðalfjarlægðin frá hátölurunum. En þá fæst fullkomlega styrkjandi bylgjusamliðun $B = 2A$ ef:

$$\cos\left(\frac{1}{2}k\Delta r\right) = 1 \implies \frac{1}{2}k\Delta r = n\pi \implies \Delta r = \frac{2n\pi}{k} = n\lambda.$$

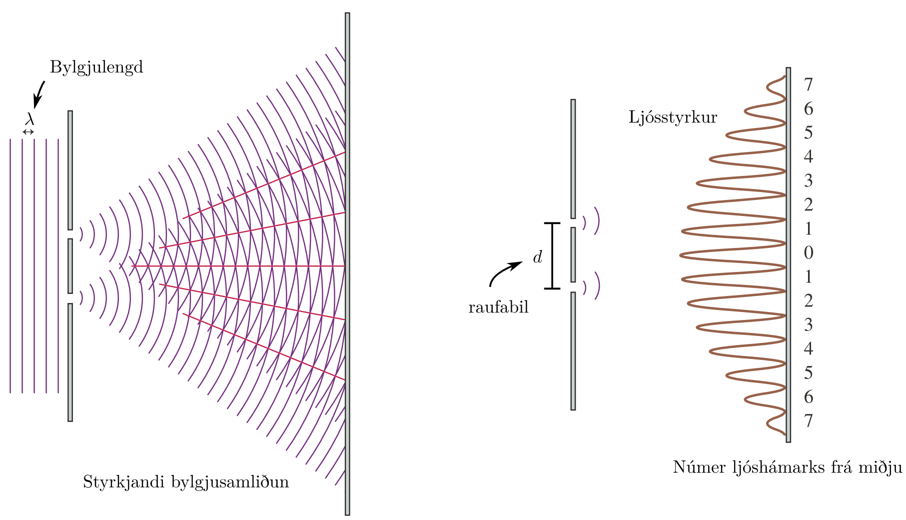
En fullkomlega eyðandi bylgjusamliðun $B = 0$ ef:

$$\cos\left(\frac{1}{2}k\Delta r\right) = 0 \implies \frac{1}{2}k\Delta r = \frac{\pi}{2}+n\pi = (2n+1)\frac{\pi}{2} \implies \Delta r = (2n+1)\frac{\pi}{k} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda.$$

Almennt segjum við að samliðun sé **styrkjandi** ef $B > A$ og **eyðandi** ef $B < A$. □

23.4 Tveggja raufa tilraun Youngs: Ljóssamliðun

Nú komum við að tveggja raufa tilraun Youngs sem var fyrst notuð til þess að sýna fram á bylgjueðli ljóss. Þá er leisigeisla með bygljulengd λ beint í gegnum tvær raufar eins og á myndinni hér fyrir neðan. Þá kemur fram styrkjandi bylgjusamliðun á skjá fyrir aftan raufarnar.



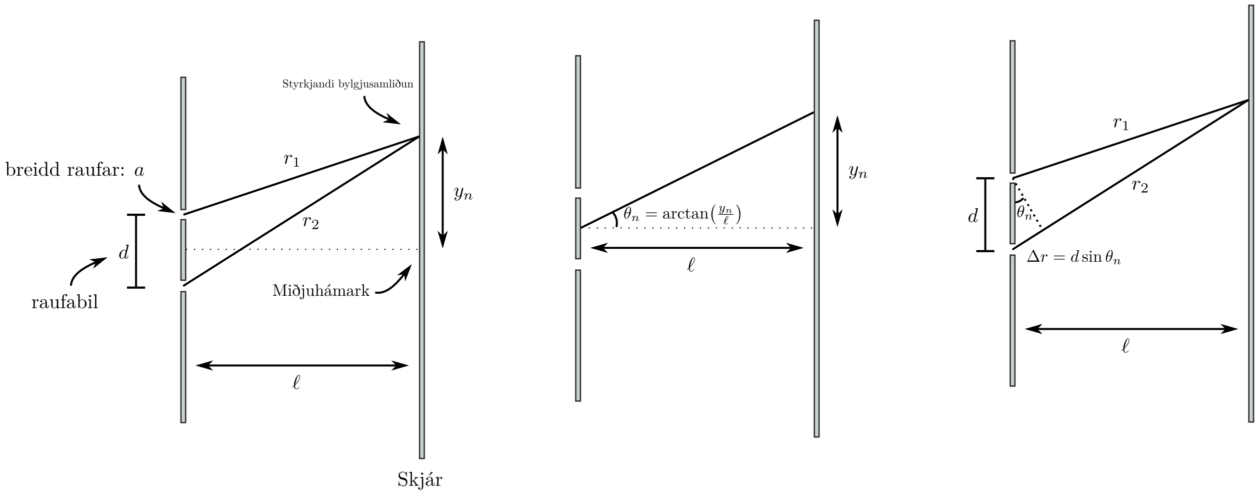
Lögmál 23.7. Þegar leisigeisla með bylgjulengd λ er beint í gegnum tvær raufar með raufabil d þá kemur fram styrkjandi samliðunarmynstur í fjarlægð ℓ fyrir aftan raufarnar. Ef y_n táknar staðsetningu björtu ljóshámarkanna þá gildir að:

$$d\sin\theta_n = n\lambda, \qquad y_n = \ell\tan\theta_n$$

Sér í lagi ef $\theta_n \ll 1$ þá gildir að bilið á milli ljósráka á skjánum er með góðri nálgun fast:

$$\Delta y = \frac{\lambda\ell}{d}$$

Útleiðsla 1: Til þess að bylgjusamliðunin sé styrkjandi í punkti á skjánum í fjarlægð y_n frá miðjunni þá þarf að muna heiltölumargfeldi af bylgjulengdum á vegalengdinni sem að geislarnir þurfa að ferðast frá hvorri rauf þannig að $\Delta r = n\lambda$. En við sjáum af eftirfarandi mynd:



Við ályktum þar með að

$$d\sin\theta_n = \Delta r = n\lambda$$

Þar að auki sem að rúmfræðilega staðsetning ljóshámarksins gefur okkur að:

$$y_n = \ell\tan\theta_n$$

Sér í lagi ber að nefna að ef $\theta_n \ll 1$ þá er $\sin\theta_n \approx \theta_n$ og $\tan\theta_n \approx \theta_n$ svo að fyrir lítil horn gildir að:

$$y_n = \ell\tan\theta_n \approx \ell\sin\theta_n = \frac{n\lambda\ell}{d} \implies \Delta y = y_{n+1} - y_n = \frac{\lambda\ell}{d}.$$

$\square$

Útleiðsla 2: Ef að manni finnst þetta vera frekar óformlegt (eins og mér) og maður er ekki sannfærður á þessum rökum (eins og ég) þá gæti maður vilja gera þetta aðeins formlegra. Athugum fyrst að:

$$\sin\theta_n = \frac{y_n}{\sqrt{\ell^2 + y_n^2}}.$$

Höfum síðan að mismunurinn á vegalengdinni sem að ljósið þarf að ferðast er:

$$n\lambda = \Delta r = r_2 - r_1 = \sqrt{\ell^2 + \left(y_n + \frac{d}{2}\right)^2} - \sqrt{\ell^2 + \left(y_n - \frac{d}{2}\right)^2}$$

Með því að margfalda með samokastærðinni sjáum við að:

$$n\lambda = \frac{\left(y_n + \frac{d}{2}\right)^2 - \left(y_n - \frac{d}{2}\right)^2}{\sqrt{\ell^2 + \left(y_n + \frac{d}{2}\right)^2} + \sqrt{\ell^2 + \left(y_n - \frac{d}{2}\right)^2}} = \frac{2y_n d}{\sqrt{\ell^2 + \left(y_n + \frac{d}{2}\right)^2} + \sqrt{\ell^2 + \left(y_n - \frac{d}{2}\right)^2}} \overset{y_n \gg \frac{d}{2}}{\approx} \frac{y_n d}{\sqrt{\ell^2 + y_n^2}} = d\sin\theta_n.$$

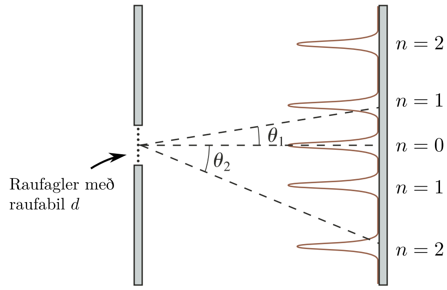
Sér í lagi sést í þessari nálgun að ef þar að auki við höfum að $\ell \gg y_n$ þá er þar að auki:

$$n\lambda \overset{y_n \gg \frac{d}{2}}{\approx} \frac{y_n d}{\sqrt{\ell^2 + y_n^2}} \overset{\ell \gg y_n}{\approx} \frac{y_n d}{\ell} \implies y_n = \frac{n\lambda\ell}{d}.$$

$\square$

23.5 Margar raufar

Helsti kosturinn við seinni útleiðsluna hér á undan er að þá sér maður að svo lengi sem að $y_n \gg \frac{d}{2}$ þá mun $d \sin\theta_n = n\lambda$ gilda. Þá sjáum við að ef við höfum ljósgreiðu með mörgum raufum þá munu raufabilin sem eru hlið við hlið alltaf gefa sömu niðurstöðu og fyrir tveggja raufa mynstrið. Fyrir margar raufar þá er raufabilið oftast minna svo það dreifist meira úr ljóshámörkunum á skjánum en það þýðir að seinni nálgunin $\ell \gg y_n$ gildir ekki. Þar með höfum við:

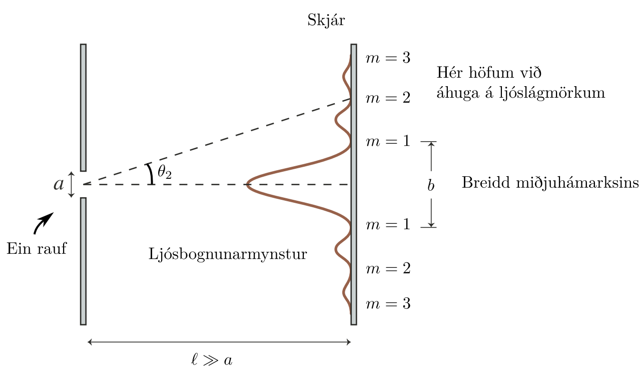


Lögmál 23.8. Þegar að leisigeisla með bylgjulengd λ er beint í gegnum ljósgreiðu með raufabil d þá kemur fram styrkjandi samliðunarmynstur á skjá í fjarlægð ℓ fyrir aftan raufaglerið. Ef y_n táknar staðsetningu björtu ljóshámarkanna þá gildir að:

$$d \sin\theta_n = n\lambda, \qquad y_n = \ell \tan\theta_n$$

23.6 Ein rauf: Ljósbognun

Ef við setjum fyrir aðra raufina þannig að leisigeislinn kemst bara út um aðra raufina þá fáum við svokallað ljósbognunarmynstur.



Þegar að leisigeisla með bylgjulengd λ er beint í gegnum eina rauf af stærð a þá kemur fram ljósbognunarmynstur á skjá í fjarlægð ℓ fyrir aftan. Ef y_n táknar staðsetningu dökku rákana (ljóslággildin) þá gildir að:

$$a \sin\theta_n = n\lambda, \qquad y_n = \ell \tan\theta_n$$

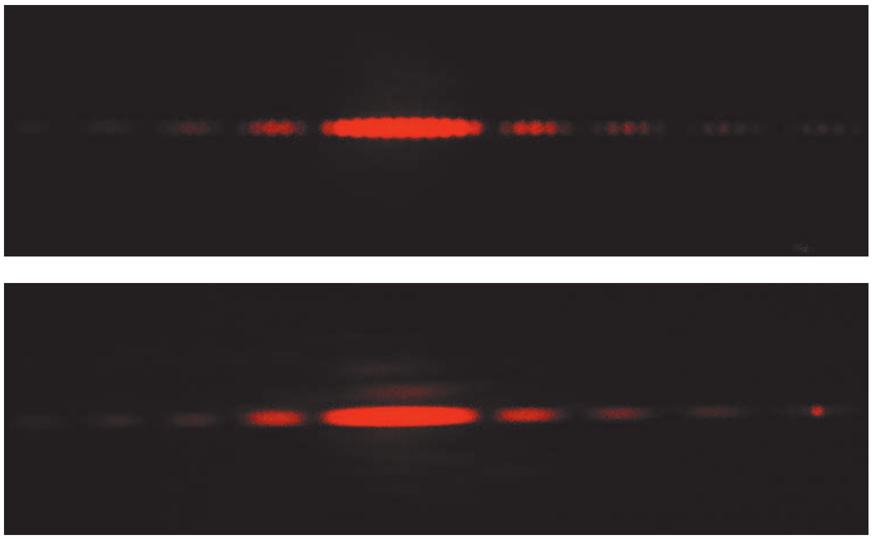
Að því gefnu að $\theta_1 \ll 1$ þá höfum við að breiddin á miðjuhámarkinu, b, er gefin með:

$$b = \frac{2\lambda\ell}{a}.$$

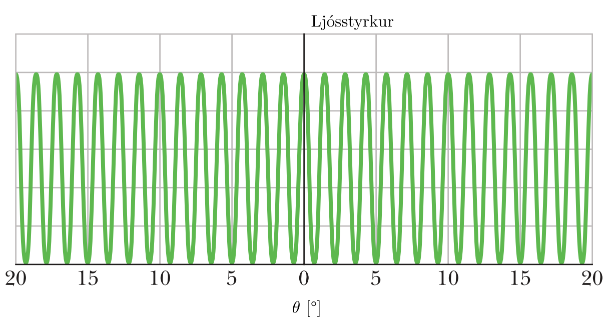
23.7 Bæði samliðunarmynstur og bognunarmynstur

Í flestum tilvikum þá fáum við hinsvegar fram bæði mynstrin í einu (því það er óhjákvæmilegt að ef við erum með margra raufagler að raufarnar hafi ekki einhverja þykkt a og eitthvað raufabil d). En hvernig lítur slíkt mynstur út? Það er í rauninni bara bæði mynstrin sett saman í eitt. Hér er til dæmis mynd til útskýringar:

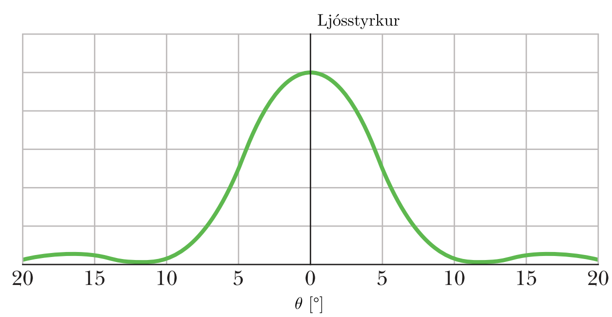
(a)
(b)



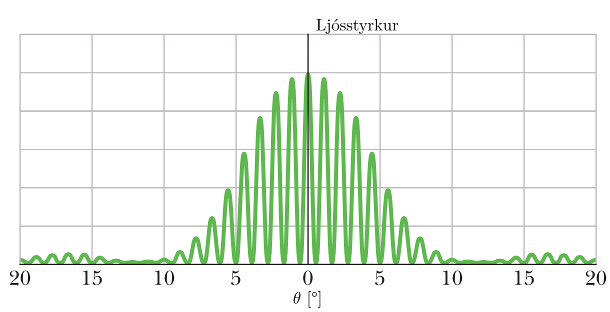
Á mynd (a) hér að ofan sést hefðbundið samliðunarmynstur fyrir tveggja raufa raufagler. En samliðunarmynstrið samanstendur í rauninni af tveimur mynstrum. Því á mynd (b) sést mynstrið sem fæst þegar að við lokum fyrir aðra raufina þannig að ljósið kemst bara í gegnum eina rauf. Þá sjáum við að dökku rákirnar koma útaf því hversu breið hver rauf er en ljóshámörkin inni í miðjuhámarkinu er vegna þess hversu langt er á milli ljóshámarkanna (sér í lagi gildir á þessum myndum að $\lambda < a < d$). Mynstrið sem kemur fram verður þá einhvern veginn svona:



(a) Tveggja raufa samliðunarmynstur sem ákvarðast af $d \sin \theta_n = n\lambda$



(b) Einnar raufar ljósbognunarmynstur þar sem lágmörkin ákvarðast af $a \sin \theta_m = m\lambda$



(c) Alvöru mynstrið sem kemur fram á skjánum er samsetning af bæði samliðunar- og ljósbognunarmynstrinu

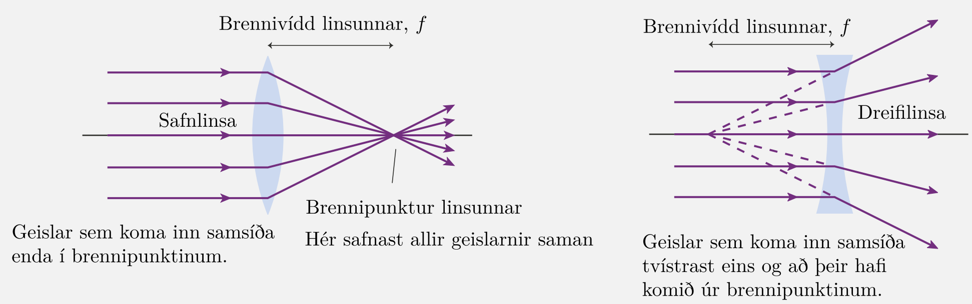
23.8 Linsur og geislagangsmyndir

Linsur eru algengar í daglegu lífi. Þær er að finna í sjónaukum, smásjám og myndavélum þar að auki sem að þær eru megingrundvöllurinn fyrir því hvernig að gleraugu og augnlinsur virka (sumir nota slíkt á hverjum degi!). Til að byrja með skulum við setja fram tvær helstu gerðir af linsum sem að fólk notar:

Skilgreining 23.9. Við segjum að linsa sé:

(i) **Safnlinsa** ef allir geislar sem ferðast samsíða í gegnum linsuna safnast saman í einum **brennipunkti** í fjarlægð f frá linsunni á ás linsunnar.

(ii) **Dreifilinsa** ef allir geislar sem ferðast samsíða í gegnum linsuna tvístrast burt frá ás linsunnar eins og að þeir hafi komið úr brennipunktinum í fjarlægð $-f$ frá linsunni.



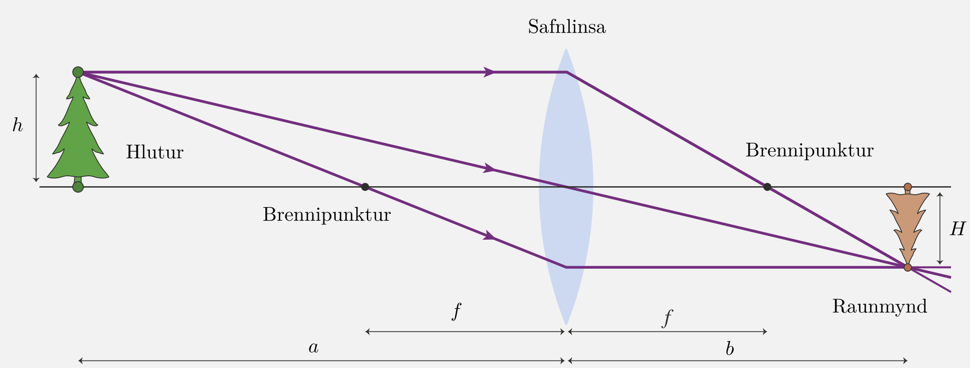
Talan f kallast **brennivídd** linsunnar. Safnlinsur hafa jákvæða brennivídd en dreifilinsur hafa neikvæða brennivídd.

Það ber að nefna að á hinni hlið linsunnar er alltaf alveg eins brennipunktur í sömu fjarlægð.

23.9 Safnlinsur: Raunveruleg mynd

Lögmál 23.10. Lítum á hlut með hæð h sem stendur í fjarlægð a frá safnlinsu með brennivídd f þar sem $a > f$. Þá kemur fram skörp, viðsnúin raunmynd í fjarlægð b hinum meginn við linsuna þar sem að hæð eftirmyndarinnar verður $H = \frac{b}{a}h$ þar að auki sem að við höfum **linsujöfnuna**:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$



Útleiðsla: Látum hæð hlutarins vera h og hæð eftirmyndarinnar vera H. Jafna línunnar sem að tengir saman punktana $(0,h)$ og $(f,0)$ er gefin með:

$$y-h=\left(\frac{h-0}{0-f}\right)(x-0), \qquad \text{þ.e.} \qquad y_1=h-\frac{h}{f}x$$

Hinsvegar, þá er jafna línunnar sem að liggur milli $(-a,h)$ og $(b,-H)$ gefin með:

$$y-h=\left(\frac{-H-h}{b-(-a)}\right)(x-(-a)), \qquad \text{þ.e.} \qquad y_2=h-\left(\frac{H+h}{a+b}\right)(x+a).$$

Við vitum að seinni línan fer í gegnum $(0,0)$. Athugum að skilyrðið $y_2(0)=0$ gefur því að:

$$y_2(0)=0 \implies h-\left(\frac{H+h}{a+b}\right)a=0 \implies h(a+b)=(H+h)a \implies hb=Ha \implies \frac{H}{h}=\frac{b}{a}.$$

Svo við ályktum að $\frac{b}{a}$ lýsir stækkun myndarinnar:

$$H=\frac{b}{a}h$$

Sér í lagi sjáum við að ef $b>a$ þá stækkar myhndin en ef $a>b$ þá minnkar myndin. Við viljum síðan að línurnar y_1 og y_2 skerist í $x=b$. Við höfum því að:

$$\begin{aligned} y_1(b)=y_2(b) &\implies h-\frac{h}{f}b=h-\frac{H+h}{a+b}(a+b)=-H \\ &\implies 1-\frac{b}{f}=-\frac{H}{h}=-\frac{b}{a} \\ &\implies \frac{1}{b}-\frac{1}{f}=-\frac{1}{a} \end{aligned}$$

Sem gefur því að lokum linsujöfnuna:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}.$$

□

23.10 Safnlinsur: Ímynduð mynd

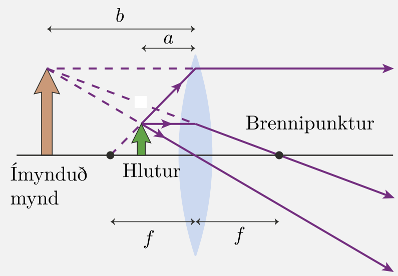
Við skulum líka skoða hvað gerist ef hluturinn okkar er fyrir innan brennipunktinn. Það er að segja ef að $a<f$. Eina leiðin til þess að linsujafnan:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$$

gangi upp með $a<f$, þ.e. $\frac{1}{a}>\frac{1}{f}$ er ef að b er neikvæð! En það samsvarar því að myndin kemur fram sömu meginn og hluturinn nema fyrir utan brennipunktinn, $b>f$. Við höfum semsagt:

Lögmál 23.11. Lítum á hlut með hæð h sem stendur í fjarlægð a frá safnlinsu með brennivídd f þar sem $a < f$. Þá kemur fram skörp, ímynduð mynd í fjarlægð $b < 0$ sömu meginn við linsuna þar sem að hæð eftirmyndarinnar verður $H = \left|\frac{b}{a}\right|h$ þar að auki sem að við höfum **linsujöfnuna**:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$



Útleiðsla: Þetta leiðir beint af útleiðslunni hér á undan nema maður ætti að benda á að hér er b neikvætt. □

Reyndar eitt sem er áhugavert er að við getum notað linsujöfnuna til að sýna að ímyndaða myndin sem kemur fram er alltaf stærri heldur en upphaflegi hluturinn. Athugum að linsujafnan gefur að:

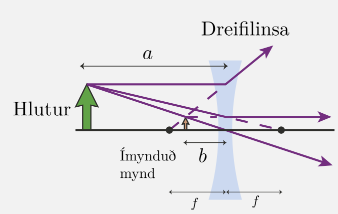
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \implies b = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{a}\right)^{-1} = \frac{af}{a-f} \implies \frac{b}{a} = -\frac{f}{f-a}$$

og þar sem að $f > f - a$ þá er $\left|\frac{b}{a}\right| > 1$ svo myndin stækkar alltaf.

23.11 Dreifilinsur

Að lokum skulum við fjalla stuttlega um dreifilinsur. Dreifilinsur eru áhugaverðar að því leitinu til að við fáum bara eitt tilvik (en ekki tvö eins og fyrir safnlinsuna. Fyrir dreifilinsur gildir líka linsujafnan nema núna er brennivídd linsunnar neikvæð $f < 0$ og við fáum alltaf ímyndaða mynd svo $b < 0$.

Lögmál 23.12. Lítum á hlut með hæð h sem stendur í fjarlægð a frá dreifilinsu með brennivídd $f < 0$. Þá kemur fram skörp, smækkuð, ímynduð mynd í fjarlægð $b < 0$ sömu meginn við linsuna þar sem að hæð eftirmyndarinnar verður $H = \left|\frac{b}{a}\right|h$ þar að auki sem að við höfum **linsujöfnuna**: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$.

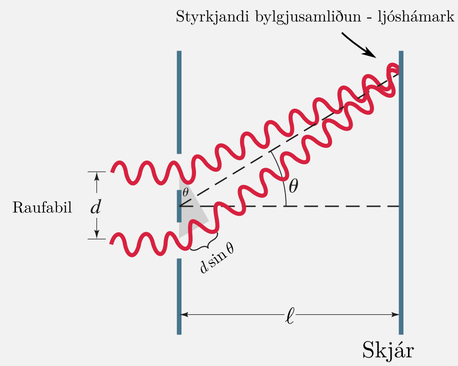


23.12 Dæmi

Dæmatími 39: Tveggja raufa tilraun Youngs

Þegar leisigeisla með bylgjulengd λ er skotið í gegnum tvær (eða fleiri) raufar þar sem að bilið á milli raufanna er d þá kemur fram samliðunarmynstur á skjá í fjarlægð ℓ fyrir aftan. Fyrir slík mynstur þá höfum við áhuga á **ljóshámörkum** en rúmfræðilega er staðsetning ljóshámarkanna, y_n, gefin með:

$$y_n = \ell \tan\theta_n$$



Til þess að fá styrkjandi bylgjusamliðun, þá þarf mismunurinn á vegalengdinni sem að ljósið ferðast frá raufunum að vera jafnt heiltölufjölda bylgjulengda sem gefur okkur:

$$d\sin\theta_n = n\lambda$$

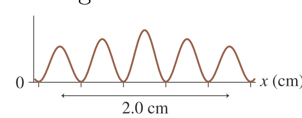
Fyrir lítil horn, $\theta \ll 1$, gildir að $\sin\theta \approx \theta$ og $\tan\theta \approx \theta$ svo $\tan\theta \approx \sin\theta$, en þá er:

$$y_n = \ell\tan\theta_n \approx \ell\sin\theta_n = \frac{n\lambda\ell}{d} \implies \Delta y = \frac{\lambda\ell}{d}.$$

(33.2) Leisigeisla með bylgjulengd 600 nm er beint í gegnum tvær raufar með raufabil 50 μm. Hvaða horn mun þriðja ljóshámarkið mynda miðað við upphaflegu stefnu leisigeislans?

(33.3) Leisigeisla með bylgjulengd 500 nm er beint í gegnum tvær raufar með óþekkt raufabil. Samliðunarmynstur sést fyrir aftan á skjá sem er í fjarlægð 50 cm frá raufaglerinu. Fjarlægðin á milli björtu ljósrákanna á skjánum er 2,5 mm. **(a)** Hvert er raufabil raufaglersins? **(b)** Hvert verður bilið á milli ljósrákanna á skjánum ef að leisigeisla með bylgjulengd 600 nm er beint í gegnum raufaglerið?

(33.37) Leisigeisla með óþekkta bylgjulengd er beint í gegnum tveggja raufa raufagler með raufabil 0,20 mm. Á myndinni hér til hægri sést samliðunarmynstrið sem kom fram á skjá, 2,0 m, fyrir aftan raufaglerið (grafið sýnir ljósstyrk sem fall af staðsetningu). Hver var bylgjulengd ljóssins?



(33.35) Leisigeisla með bylgjulengd 633 nm er beint í gegnum tveggja raufa raufagler með óþekkt raufabil. Samliðunarmynstur kemur fram á skjá 3,0 m fyrir aftan raufaglerið. Þréttán bjartar rákir sjást á skjánum fyrir aftan og heildarvegalengdin á milli ystu rákanna á skjánum er 52 mm. Hvert er raufabilið?

(33.2) 2,06°. **(32.3)** 100 μm, 3,0 mm. **(33.37)** 500 nm. **(32.35)** 438 μm.

Dæmatími 40: Ein rauf eða margar raufar?

Fyrir margar raufar þá gilda sömu jöfnur fyrir **ljóshámörkin** og í dæmakafla 39. Hinsvegar fyrir eina rauf af breidd a þá gilda sömu jöfnur og í dæmakafla 39 nema núna eru þær fyrir **ljóslágmörkin**:

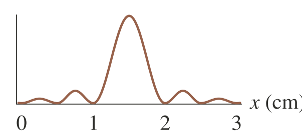
$$y_m = \ell \tan\theta_m, \qquad a\sin\theta_m = m\lambda.$$

(33.13) Vetni hefur tvær sýnilegar litrófslínur, annars vegar rauða (656 nm) og hinsvegar bláa (486 nm). Ljósinu frá vetnislampa er nú beint í gegnum raufagler sem hefur 500 raufar/mm og samliðunarmynstrið er skoðað á skjá 1,50 m fyrir aftan raufaglerið. **(a)** Hvert er raufabil raufaglersins? **(b)** Þar sem að bylgjulengdir vetnislampans eru tvær sjást tvö samliðunarmynstur á skjánum. Hversu langt er bilið á milli fyrstu ljóshámarkanna frá bláa og rauða ljósinu?

(33.46) Sprengju-Kata er að skoða litrófslínur frá óþekktri efnablöndu. Hún hitar efnablönduna upp þannig að hún byrjar að geisla frá sér ljósi sem að hún beinir síðan í gegnum raufagler og skoðar ljóshámörkin á skjá 15,0 cm fyrir aftan raufaglerið. Því miður týndi Katrín miðanum sem að segir til um raufabilið á raufaglerinu. Hinsvegar, þá er hún með aðra þekkta efnablöndu, sem að hún veit að geislar frá sér ljósi með bylgjulengd 461 nm. Þegar að hún beinir ljósinu í gegn frá þekktu efnablöndunni þá sér hún bjarta litrófslínu í 9,95 cm fjarlægð frá miðjunni. Hver er bylgjulengd ljóssins sem að óþekkta sýnið sendir frá sér ef að hún greinir litrófslínur þess í 12,15 cm fjarlægð frá miðjunni?

(33.16) Leisigeisla með bylgjulengd 633 nm er beint í gegnum eina rauf með óþekkta breidd. Ljósbognunarmynstrið er skoðað á skjá 1,5 m fyrir aftan raufina. Fjarlægðin á milli fyrsta og annars ljóslágmarksins er 4,75 mm. Hver er breidd raufarinnar?

(33.17) Leisigeisla með bylgjulengd 633 nm er beint í gegnum eina rauf með raufabil 0,15 mm. Á myndinni hér til hægri sést ljósbognunarmynstrið sem kom fram á skjá fyrir aftan raufaglerið (grafið sýnir ljósstyrk sem fall af staðsetningu). Hversu langt fyrir aftan raufina er skjárinn?



(33.13) 14,5 cm. **(33.46)** 525 nm. **(33.16)** 200 μm. **(32.17)** 1,18 m.

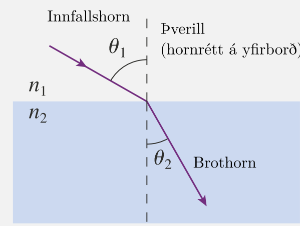
Dæmatími 41: Lögmál Snells

Ljós virðist ferðast hægar í mismunandi efnum heldur en í tómarúmi. Brotstuðull efnis er mælikvarði á hraða ljóss og er skilgreindur sem:

$$n_{\text{efni}} = \frac{c}{c_{\text{efni}}}$$

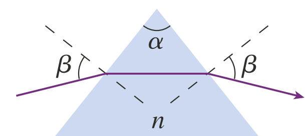
Lögmál Snells segir síðan að:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

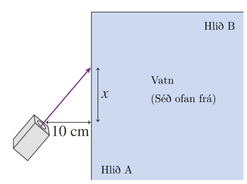


(34.10) Leisigeisla er beint inn í óþekktan vökva. Stefna geislans er þannig að leisigeislinn myndar 45° innfallshorn. Við tökum eftir því að brothornið er 30°. Hver er brotstuðullinn?

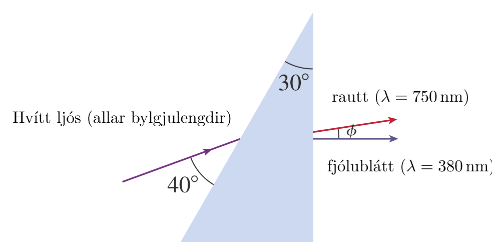
(34.58) Á myndinni hér til hægri má sjá prisma með topphorn α. Til er innfalshorn, β, sem er þannig að geislinn ferðast samhverft í gegnum prismað eins og sést á myndinni hér til hægri. **(a)** Ákvarðið hornið β sem fall af topphorninu, α og brotstuðlinum, n. **(b)** Slúbbertar í ónefndum bekk eru að skoða vikhornsmælingar á prisma með topphorn $\alpha = 60{,}0°$ og finna $\beta = 52{,}2°$. Hver er brotstuðull prismans?



(34.54) Á myndinni hér til hægri sést leisigeisli í 10 cm fjarlægð frá fiskabúri sem er fyllt með vatni (séð ofan frá). Brotstuðull vatns er $n_{\text{vatn}} = 1{,}33$. Leisigeislanum er til að byrja með beint að fiskabúrinu þannig að $x = 15\,\text{cm}$. **(a)** Hvert er innfallshorn leisigeislans í vatnið? **(b)** Hvert er brothornið? **(c)** Þegar að geislinn lendir á hlið B á myndinni, mun hann þá komast út úr fiskabúrinu eða endurkastast hann aftur inn í fiskabúrið? **(d)** Endurtakið alla reikningana, nema núna fyrir $x = 25\,\text{cm}$. **(e)** Hvert er minnsta gildið á x þannig að geislinn sleppi út um B?

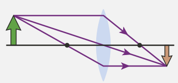


(35.41) „The Dark Side of The Moon“ eftir hljómsveitina Pink Floyd skartar einu frægasta plötuumslagi allra tíma. En á því má sjá svokallaða ljóstvístrun. Því ólíkt umfjölluninni okkar hingað til þá er brotstuðullinn reyndar háður bylgjulengd ljósins. Í þessu tiltekna dæmi getum við sagt að brotstuðullinn fyrir fjólublátt ljós er 2 % meiri heldur en brotstuðullinn fyrir rautt ljós. Á myndinni hér til hægri sést slík ljóstvístrun þar sem að regnbogi myndast eftir að hvítt ljós fellur inn í prismað. Fjólublái geislinn er hornréttur á yfirborð prismans. Hvaða horn, ϕ, er á milli rauða og fjólubláa ljóssins?

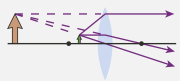


(34.10) 1,41. **(34.41)** $\beta = \arcsin\left(n \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$, $n = 1{,}58$. **(34.54)** 56,3°, 38,7°, kemst ekki út, 68,2°, 44,3°, kemst út, $x_{\min} = 18\,\text{cm}$. **(35.41)** 1,1°.

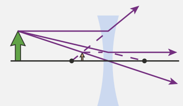
Dæmatími 42: Safnlinsur, (dreifilinsur) og geislagangsmyndir



Safnlinsa
Raunmynd



Safnlinsa
Ímynduð mynd

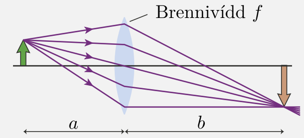


Dreifilinsa
Ímynduð mynd

Linsujafnan:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

Stækkun: $\frac{b}{a}$



(34.33) Hlutur sem er 2,0 cm hár er staddur í 30 cm fjarlægð frá safnlinsu sem hefur 20 cm brennivídd. Teiknið geislagangsmynd og ákvarðið bæði fjarlægð eftirmyndarinnar frá safnlinsunni og hæð hennar.

(34.35) Hlutur sem er 2,0 cm hár er staddur í 12 cm fjarlægð frá safnlinsu sem hefur 20 cm brennivídd. Teiknið geislagangsmynd og ákvarðið bæði fjarlægð eftirmyndarinnar frá safnlinsunni og hæð hennar.

(34.69) Ljósapera er stödd í 3,0 m fjarlægð frá vegg. Í hvaða fjarlægð, a, frá ljósaperunni ættum við að setja safnlinsu með brennivídd, f, til þess að myndin sem að kemur fram á veggnum er tvisvar sinnum stærri heldur en fyrirmynd perunnar? (Ákvarðið bæði a og f þannig að þetta gangi).

(34.73) Þegar safnlinsu er komið fyrir 10 cm fyrir framan hlut þá kemur fram upprétt, ímynduð mynd, sem er tvisvar sinnum stærri heldur en hluturinn sjálfur. Síðan færum við linsuna meðfram sama ás þar til að við sjáum viðsnúna raunmynd sem er tvisvar sinnum stærri heldur en hluturinn sjálfur. Um hversu langa vegalengd þurftum við að færa safnlinsuna?

(34.33) 60 cm, 4,0 cm. **(34.35)** 30 cm, 5,0 cm. **(34.69)** $a = 1{,}0$ m, $f = 67$ cm. **(34.73)** 20 cm.

Bónusdæmi (Krotov 4.2.) Augnlæknir nokkur ætlar að skoða augun í Matta nærsýna aðeins betur. Læknirinn stillir upp safnlinsu með 9,0 cm brennivídd í 36 cm fjarlægð frá auganu hans Matta og biður hann að um að horfa í gegn um linsuna (augnlæknirinn ætlar síðan að horfa hinum meginn frá á augun í Matta). Í hvaða fjarlægð ætti augnlæknirinn að vera til þess að sjá skarpa mynd af auganu hans Matta? Ef augun hans Matta hafa 24 mm þvermál, hversu stór sýnist augnlækninunum augun hans vera þegar að hann horfir í gegnum linsuna? Er þetta heppileg uppstilling? Hvað sér Matti augun á lækninum vera stór?

Svar: Læknirinn sér augun hans Matta vera 8 mm að þvermáli í 12 cm fjarlægð fyrir aftan safnlinsuna en Matti sér þvermálið á augum læknisins vera 72 mm. Þeir ættu kannski að skipta um sæti!

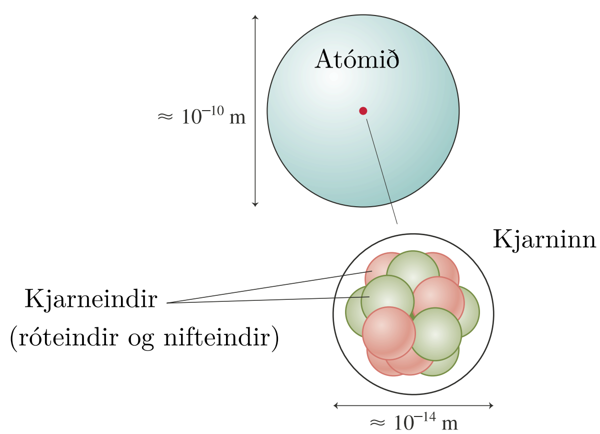
Kafli 24

Kjarneðlisfræði

24.1 Stærð kjarnans

Skilgreining 24.1. Lítum á frumefni X með massatölu A og sætistölu Z þar sem að mismunurinn á fjölda róteinda og nifteinda er k (hleðslan). Við táknum þá frumefnið með rithættinum:

$$^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{X}^{k}$$



Lögmál 24.2. Lítum á kjarna frumefnis sem hefur massatölu A og sætistölu $Z \geq 2$. Þá er geisli kjarnans gefin með:

$$r = r_0 A^{1/3}, \qquad \text{þar sem} \qquad r_0 = 1{,}2\,\text{fm}.$$

Útleiðsla: Eðlismassi kjarnans er fastur (róteindirnar og nifteindirnar pakka sér svo þétt saman að eðlismassinn helst óbreyttur). Kjarninn er þar með eins og ein stór kúla með sama eðlismassa og ein kjarneind. Ef við gerum þá nálgun að $m_n \approx m_p \approx u$ þá höfum við að:

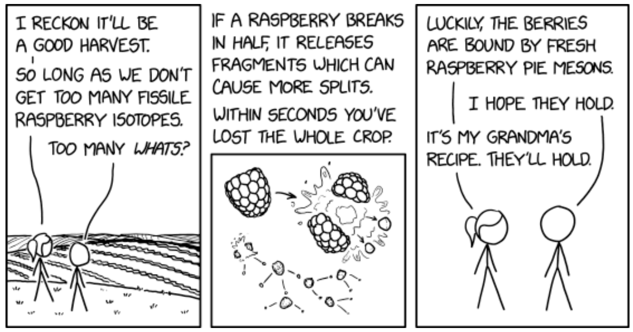
$$\rho_{\text{kjarni}} = \frac{m_n}{\frac{4\pi}{3} r_0^3}$$

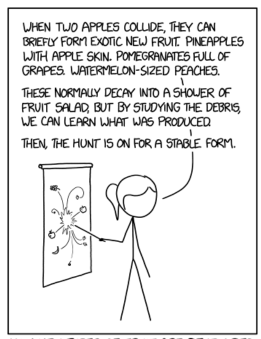
Þar sem að r_0 er geisli nifteindar. Þar sem að eðlismassi kjarnans helst óbreyttur þá ályktum við að:

$$\frac{Am_n}{\frac{4\pi}{3} r^3} = \rho_{\text{kjarni}} = \frac{m_n}{\frac{4\pi}{3} r_0^3} \implies r = Ar_0^3 \implies r = r_0 A^{1/3}.$$

$\square$

24.2 Geislavirkni





HOW NEW TYPES OF FRUIT ARE DEVELOPED

Skilgreining 24.3. Látum $N(t)$ tákna heildarfjölda frumeinda í sýni af geislavirku efni. Heildarfjöldi frumeinda hrörnar þá (yfir í önnur frumefni) samkvæmt hrörnunarhreyfingunni:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N,$$

þar sem λ er stuðull sem kallast hrönunarstuðull og táknar líkur þess að geislavirka efnið hrörni.

Lögmál 24.4. Lítum á sýni af geislavirku efni sem hefur hrörnunarstuðul λ. Í upphafi inniheldur sýnið N_0 frumeindir af geislavirka efninu. Þá er heildarfjöldi frumeinda eftir tímann, t, gefinn með:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Útleiðsla: Geislavirka efnið uppfyllir hrörnunarhreyfinguna:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \implies \frac{dN}{dt} + \lambda N = 0.$$

Margföldum síðan báðar hliðar með $e^{\lambda t}$ og pillum síðan afleiðuna af til að fá:

$$\frac{dN}{dt} e^{\lambda t} + \lambda e^{\lambda t} N = 0 \implies \frac{d}{dt}\left(N e^{\lambda t}\right) = 0 \implies N e^{\lambda t} = C \implies N(t) = C e^{-\lambda t}$$

Þar sem C er fasti sem að ákvarðast af upphafsskilirðinu $N(0) = N_0 = C$ svo við höfum sýnt að:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

$\square$

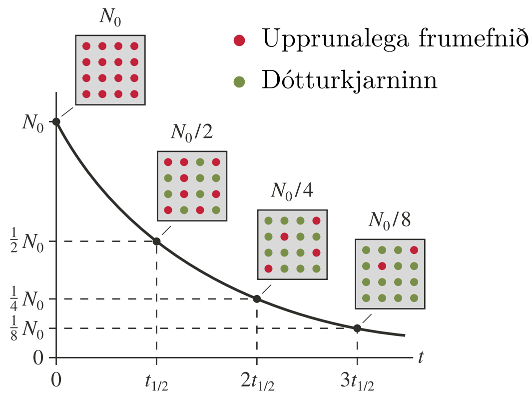
Lögmál 24.5. Helmingunartími geislavirka efnisins er þá gefinn með:

$$\tau = \frac{\ln(2)}{\lambda}.$$

Útleiðsla: Við höfum þá að:

$$N(\tau) = \frac{N_0}{2} \implies N_0 e^{-\lambda\tau} = \frac{N_0}{2} \implies e^{-\lambda\tau} = \frac{1}{2} \implies -\lambda\tau = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \implies \tau = \frac{\ln(2)}{\lambda}.$$

□



Mynd 24.1: Heildarfjöldi frumeinda af geislavirku efni hrörnar með tíma yfir í stöðugan dótturkjarna.

Skilgreining 24.6. Við skilgreinum **geislavirkni**, $G(t)$, frá geislavirku efni með heildarfjölda frumeinda, $N(t)$, sem stærðina:

$$G(t) = -\frac{dN}{dt}.$$

Lögmál 24.7. Lítum á sýni af geislavirku efni sem hefur hrörnunarstuðul λ. Í upphafi inniheldur sýnið N_0 frumeindir af geislavirka efninu. Þá er geislavirkni frumefnisins gefin með:

$$G(t) = G_0 e^{-\lambda t}, \qquad G_0 = N_0 \lambda.$$

Útleiðsla: Við athugum að:

$$G(t) = -\frac{dN}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(N_0 e^{-\lambda t}\right) = N_0 \lambda e^{-\lambda t} = G_0 e^{-\lambda t}.$$

□

Það ber að nefna á þessum tímapunkti að stærðin sem að við mælum oftast (og er auðveldast að mæla) er G_0 (það er að segja geislavirknina frá geislavirku sýni einmitt þegar að mælingin er framkvæmd). Þessi stærð er það mikið notuð að hún hefur fengið sína eigin SI-einingu sem er kennd við franska eðlisfræðingin Henri Becquerel (sem hlaut Nóbelsverðlaunin í eðlisfræði árið 1903 ásamt hjónunum Marie og Pierre Curie). Hún er skilgreind þannig að:

$$[G_0] = \frac{\text{fjöldi frumeinda sem hrörnar}}{\text{s}} = \text{Bq}$$

En þið hafið eflaust heyrt um kjarnorkusprengjurnar Little Boy og Fat Man sem var varpað yfir japönsku stórborgnir Hiroshima og Nagasaki árið 1945. Þið hafið eflaust líka heyrt af ýmsum kjarnorkuslysum sem hafa orðið í gegnum árin eins og í Chernobyl í Úkraínu árið 1986 og í Fukushima í Japan árið 2011. Þið vitið þá eflaust líka að það getur verið gríðarlega skaðlegt fyrir manneskjur að verða fyrir of mikilli geislavirkni. Helstu læknisfræðilegu annmarkar sem að því fylgja eru aukin tíðni krabbameina. Við viljum því hafa einhvern læknisfræðilegan grundvöll[1] til þess að tala um skaðsemi geislavirkra efna. Ef þið hafið einhverntímann handleikið geislunarmæli (Geiger-mælir) þá vitið þið að hann mælir svokölluð sívert (Sv) en það er kennt við sænska heilbrigðiseðlisfræðinginn Rolf Maximilian Sievert. Reyndar mæla flestir geislunarmælar μSv/klst. Ástæðan fyrir þessu er sú að það skiptir okkur læknisfræðilega ekkert voðalega miklu máli hversu mikil geislavirknin er heldur hversu orkurík hún er (það er sú orka sem fer í að eyðileggja erfðaefnið okkar).

Skilgreining 24.8. Lítum á hlut sem hefur massa m og verður fyrir geislun með heildarorku ΔE. Við skilgreinum þá **geislunarálag** geislunarinnar sem stærðina:

$$H = \frac{w\Delta E}{m}$$

Þar sem w er svokallaður **geislunarstuðull** og ákvarðast af læknisfræðilegri skaðsemi geislunarinnar:

$$w_\alpha = 20, \qquad w_\beta = 1, \qquad w_\gamma = 1$$

Geislunarálag er mælt í mælieiningunni sívert $[H] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}} = \mathrm{Sv}$.

Það getur síðan verið fróðlegt að rýna í eftirfarandi töflu (sjá líka xkcd: https://xkcd.com/radiation/) til þess að átta sig betur á geislunarálaginu sem að fylgir mismunandi athöfnum:

50 nSv	Að sofa í sama rúmi og önnur manneskja
100 nSv	Borða banana (kalín)
250 nSv	Að fara í gegnum öryggishlið á flugvelli
1 μSv	Liggja í sólbaði í einn dag
6 μSv	Dagsferð til Pripyat með viðkomu hjá Chernobyl kjarnaofninum
10 μSv	Röntgenmyndir af tönnum í tannlæknaheimsókn
20 μSv	Flugferð frá Íslandi til Danmerkur.
1 mSv	Árleg bakgrunnsgeislun á Íslandi
2 mSv	Heilasneiðmynd (CT scan)
6 mSv	Árlegt geislunarálag flugáhafnarmeðlima
50 mSv	Hámarksgeislun á ári fyrir geislunarstarfsfólk
1 Sv	Geislaveiki (getur verið banvænt)
8 Sv	Banaskammtur

Tafla 24.1: Skammtastærðir af geislunarálagi

24.3 Kjarnaorka og stöðugleiki frumefna

Skilgreining 24.9. Við skilgreinum frumeindamassann, u, þannig að kolefnissamsætan ^{12}C hafi massann 12u en það þýðir að:

$$1\,\mathrm{u} = 1{,}6605 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}.$$

[1] Í læknisfræðilegum skilningi getur eftirfarandi vefsíða verið fróðleg: https://gr.is/liffraedileg-ahrif-jonandi-geislunar/

Eind	Tákn	Massi (u)	Massi ($\frac{\text{MeV}}{\text{c}^2}$)	Massi (kg)
Rafeind	e	$0,00055$	0,511	$9{,}109 \cdot 10^{-31}$ kg
Róteind	p	$1,00728$	938,3	$1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg
Nifteind	n	$1,00866$	939,6	$1{,}675 \cdot 10^{-27}$ kg
Alpha-ögn	α	$4,002602$	3728	$6{,}64 \cdot 10^{-27}$ kg

Tafla 24.2: Massi helstu öreindanna. Frumeindamassinn er $1\,\text{u} = 1{,}6605 \cdot 10^{-27}\,\text{kg} = 931{,}49\,\frac{\text{MeV}}{\text{c}^2}$.

Hér erum við að sjálfsögðu þá að tala um kyrrstöðumassa eindanna en þá samkvæmt Einstein vitum við að það er alveg eins hægt að tala um tilheyrandi kyrrstöðuorku (margföldum bara með c^2 til að fá $E_0 = m_0 c^2$). Þar sem að það er erfitt að vinna með stærðir af stærðargráðunni 10^{-27} þá vilja öreindafræðingar miklu frekar vinna með eininguna MeV/c^2 í þeim einingum þá verða massarnir:

$$E_u = \text{uc}^2 = 931{,}49\,\text{MeV}.$$

Þannig að stundum skrifum við:

$$1\text{u} = 1{,}6605 \cdot 10^{-27}\,\text{kg} = 931{,}49\,\text{MeV/c}^2.$$

Skilgreining 24.10. Lítum á efnahvarf af gerðinni:

$$\text{X} \rightarrow \text{Y} + \text{Z}$$

Þá er **kjarnaorkan**, ΔE, sem að losnar í þessu hvarfi er gefin með:

$$\Delta E = \Delta m c^2 = (m_X - m_Y - m_Z)\, c^2$$

24.4 Mismunandi gerðir af jónandi geislun (α, β og γ geislun)

Í þessari undirgrein ætlum við að kynna til sögunnar alla þá geislun sem að getur losnað í kjarnahvörfum.

24.4.1 α-geislun

Ef að frumeindakjarninn er of stór til þess að sterki kjarnakrafturinn geti haldið kjarnanum saman þá mun kjarninn ekki vera stöðugur. Það verða því einhverjar líkur (skammtafræði) á því að α-ögn losni til þess að mynda stöðugri dótturkjarna. Í stuttu máli er α-geislunin afleiðing af því hvað gerist þegar að sterki kjarnakrafturinn er ekki nógu sterkur.

Skilgreining 24.11. α-geislun einkennist af eftirfarandi hrörnunarhvarfi:

$$^{\text{A}}_{\text{Z}}\text{X} \xrightarrow{\alpha} {}^{\text{A}-4}_{\text{Z}-2}\text{Y} + {}^{4}_{2}\alpha^{+2}$$

Í rauninni er α-ögnin bara rafeindalaus helíumkjarni $^4_2\text{He}^{+2}$.

Kjarnaorkan sem að losnar við α-geislun fer nánast öll í hreyfiorku α-agnarinnar (sérstaklega ef upprunalega frumefnið, X, er með mjög háa sætistölu, Z). Við höfum þá að:

$$K_\alpha \approx \Delta E = (m_X - m_Y - m_\alpha)\, c^2$$

Mismunandi efni hafa síðan mismunandi líkur á því hversu líklegt er að frumefnið X geisli frá sér α-ögn. Eina leiðin til þess að útskýra almennilega hvað það er nákvæmlega sem að ákvarðar helmingunartíma frumefnanna er með því að nota skammtafræði og þá sér í lagi að skoða líkur þess að α-agnirnar smjúgi í gegn um Coulomb-þröskuldinn.

24.4.2 β-geislun

Í stuttu máli þá verður β-geislun þegar að veiki kjarnakrafturinn er ekki nógu sterkur til þess að halda kjarnanum saman. Í löngu máli er þetta hinsvegar algjör hausverkur til þess að setja sig inn í.

Skilgreining 24.12. Það eru til tvær gerðir af β-geislun:

(i) $\boldsymbol{\beta^-}$ geislun: $\quad {}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{X} \xrightarrow{\beta^-} {}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z+1}}\mathrm{Y} + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_e$

(ii) $\boldsymbol{\beta^+}$ geislun: $\quad {}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{X} \xrightarrow{\beta^+} {}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z-1}}\mathrm{Y} + \mathrm{e}^+ + \nu_e$

Það kemur í ljós að β^- geislun er mun algengari heldur en β^+ geislun. Í β^- geislun þá breytist ein nifteind í eina róteind og eina rafeind (og andeind tilheyrandi fiseindar rafeindarinnar). Hinsvegar í β^+ geislun þá breytist ein róteind í eina nifteind og eina jáeind (og eina tilheyrandi fiseind rafeindarinnar). Það væri því alveg eins hægt að setja þetta fram með eftirfarandi hætti:

β-geislun einkennist af eftirfarandi tveimur kjarnahvörfum:

$$\mathrm{n} \xrightarrow{\beta^-} \mathrm{p}^+ + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_e, \qquad \mathrm{p}^+ \xrightarrow{\beta^+} \mathrm{n} + \mathrm{e}^+ + \nu_e$$

Kjarnaorkan sem að losnar í β-geislun fer nánast öll í hreyfiorku β-eindarinnar (sem er rafeindin sem að losnar) er því gefin með:

$$K_\beta \approx \Delta E = (m_X - m_Y)\, c^2$$

Tæknilega séð er til ein geislun í viðbót vegna veika kjarnakraftsins sem að kallast rafeindarhremming (táknað með EC sem er skammstöfun fyrir Electron Capture) og einkennis af eftirfarandi kjarnahvarfi:

$${}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{X}^+ + \mathrm{e}^- \xrightarrow{\mathrm{EC}} {}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z-1}}\mathrm{Y} + \nu_e \quad \text{þ.e.} \quad \mathrm{p}^+ + \mathrm{e}^- \xrightarrow{\mathrm{EC}} \mathrm{n} + \nu_e$$

24.4.3 Gamma-geislun

Er einfaldasta geislunin til þess að útskýra. Þetta gerist þegar að frumefni í örvuðu ástandi geisla frá sér ljóseindum og fara niður á lægra orkustig:

Skilgreining 24.13. γ-geislun einkennis af eftirfarandi hrönunarhvarfi:

$${}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{X} \xrightarrow{\gamma} {}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{X} + \gamma$$

Í rauninni er γ-eindin bara ljóseind.

Kjarnaorkan sem að losnar fer þá (nánast öll) í ljóseindina sem að fær þá orku

$$\Delta E_{\text{atóm}} = E_{\text{ljóseind}} = hf$$

þar sem f er tíðni ljóseindarinnar sem myndaðist og $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$ er fasti Plancks.

24.5 Dæmi

Dæmatími 35: Kjarna- og öreindafræði: Kjarninn

Frumeindarmassi frumefna er táknaður með A. Sætistala frumefna er táknuð með Z. Heildarfjöldi róteinda í kjarnanum er þá Z og heildarfjöldi nifteinda er $A - Z$. Mismunurinn á fjölda róteinda og nifteinda er táknaður með k (ef k er jákvæð eru fleiri róteindir heldur en rafeindir, en ef k er neikvæð eru fleiri rafeindir heldur en róteindir). Fyrir frumefnið X er þetta gefið til kynna með því að skrifa:

$$^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{X}^{k}$$

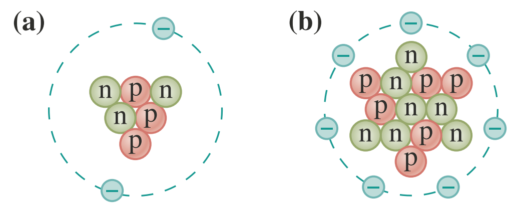
Hægt er að ákvarða geisla kjarnans, r, út frá frumeindarmassanum samkvæmt:

$$r = r_0 A^{1/3}, \qquad \text{þar sem} \qquad r_0 = 1{,}2\,\mathrm{fm}.$$

Ef A er frumeindamassinn þá er massi frumeindarinnar $m = Au$ þar sem $u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$.

(37.19) Hversu margar rafeindir, róteindir og nifteindir eru í eftirfarandi frumefnum:
(a) $^{10}_{5}\mathrm{B}^{0}$ **(b)** $^{13}_{7}\mathrm{N}^{+}$ **(c)** $^{17}_{8}\mathrm{O}^{+++}$ **(d)** $^{132}_{54}\mathrm{Xe}^{0}$

(37.21) Skrifið niður frumefnin á myndunum hér fyrir neðan á forminu: $^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{X}^{k}$.



(37.23) Ákvarðið massa, geisla og eðlismassa kjarnans í eftirfarandi frumefnum: **(a)** $^{7}_{3}\mathrm{Li}$ **(b)** $^{207}_{82}\mathrm{Pb}$

(37.25) Skoðum gullsamsætuna $^{197}_{79}\mathrm{Au}$. **(a)** Hversu margar rafeindir, róteindir og nifteindir eru í samsætunni? **(b)** Hver er geisli kjarnans? **(c)** Hver er eðlismassi kjarnans? **(d)** Eðlismassi gulls er $11.400\,\mathrm{kg/m^3}$. Hversu mörgum sinnum eðlismeiri er kjarninn?

(37.21) $^{6}_{3}\mathrm{Li}^{+}$, $^{13}_{6}\mathrm{C}^{-}$ **(37.23)** $m_{\mathrm{Li}} = 1{,}2 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}$, $r_{\mathrm{Li}} = 2{,}3\,\mathrm{fm}$, $\rho_{\mathrm{Li}} = 2{,}3 \cdot 10^{17}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, $m_{\mathrm{Pb}} = 3{,}4 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{kg}$, $r_{\mathrm{Pb}} = 7{,}1\,\mathrm{fm}$, $\rho_{\mathrm{Pb}} = 2{,}3 \cdot 10^{17}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, **(37.25)** $(n, p, e) = (118, 79, 79)$, $r_{\mathrm{Au}} = 7{,}0\,\mathrm{fm}$, $\rho_{\mathrm{Au}} = 2{,}7 \cdot 10^{17}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, $2{,}4 \cdot 10^{13}$ sinnum eðlisþéttari.

Dæmatími 36: Kjarna- og öreindafræði: Tvístrun

Stöðuorka rafkraftsins er $U_k = \frac{kq_1q_2}{r}$. Ef krafturinn er aðdráttarkraftur þá er formerkið á stöðuorkunni neikvætt en ef krafturinn er fráhrindikraftur er formerkið á stöðuorkunni jákvætt. Í flestum tvístrunardæmum er hægt að hunsa áhrif afstæðiskenningarinnar. Reyndar á Rutherford sjálfur að hafa sagt um afstæðiskenninguna: *"Oh, that stuff. We never bother with that in our work."*

(37.43) Skrautleg leið til þess að segja ${}^{4}_{2}\mathrm{He}^{+2}$ er að kalla það α-ögn (sagnfræðileg ástæða). Nú er α-ögn með orku 6,24 MeV skotið beint í áttina að kjarna óþekkts frumefnis, ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$. α-ögnin kemst næst í 6,00 fm fjarlægð frá kjarna frumefnisins áður en að hún tvístrast og snýr við. Hvert er frumefnið?

(37.44) Yfir hvaða spennumun þarf að hraða α-eind (${}^{4}_{2}\mathrm{He}^{+2}$) úr kyrrstöðu þannig að hún rétt nær að snerta yfirborð kolefniskjarnans ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ sem hefur þvermál 5,50 fm?

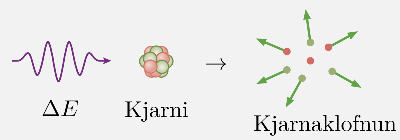
(37.45) Hver þarf hraði róteindar að vera til þess að hún rétt nái að snerta yfirborð súrefniskjarnans ${}^{16}_{8}\mathrm{O}$?

(37.46) Í öreindahröðlum er róteindum skotið beint inn í kjarna massamikilla frumefna í von um að hefja kjarnahvörf. Í einni tiltekinni tilraun í stóra sterkeindahraðlinum (LHC) í CERN er róteindum skotið inn í blýkjarna (${}^{207}_{82}\mathrm{Pb}$). Til þess að kljúfa blýkjarnann þá þarf róteindin að hafa (að minnsta kosti) hreyfiorku 20 MeV þegar að hún kemur að yfirborði blýkjarnans. Hver þarf hraði róteindanna að vera í upphafi til þess að ná fram þessum kjarnahvörfum?

(37.43) ${}^{27}_{13}\mathrm{Al}$. **(37.44)** 1,6 MV. **(37.45)** 0,09c. **(37.46)** 0,27c.

Dæmatími 37: Kjarna- og öreindafræði: Bindiorka og kjarnorka

Kjarnanum er haldið saman af sterka kjarnakraftinum. Ef að við viljum kljúfa kjarnann og þar með leysa úr læðingi kjarnaorkuna þá þurfum við að bæta við orku:



$$\Delta E = \Delta m c^2$$

Kjarnasamruni er síðan ferlið þegar að við setjum kjarneindirnar aftur í kjarnann (þá losnar orka).

Það eru síðan helst þrjár gerðir af geislavirkni sem að gefa frá sér orkuríka geislun:

- α-geislun: ${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \xrightarrow{\alpha} {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y} + {}^{4}_{2}\alpha^{+2}$
- β^--geislun: ${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \xrightarrow{\beta^-} {}^{\ \ A}_{Z+1}\mathrm{Y} + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_e$
- γ-geislun: ${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \xrightarrow{\gamma} {}^{A}_{Z}\mathrm{X} + \gamma$
- β^+-geislun: ${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \xrightarrow{\beta^+} {}^{\ \ A}_{Z-1}\mathrm{Y} + \mathrm{e}^+ + \nu_e$

Ath. Í þessum dæmakafla gætuð þið þurft að nota efnafræðilegu upplýsingarnar í viðhenginu.

(42.25) Ákvarðið óþekktu samsæturnar, ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$, í eftirfarandi efnahvörum:

(a) $\mathrm{X} \longrightarrow {}^{224}_{88}\mathrm{Ra} + {}^{4}_{2}\alpha$ **(b)** $\mathrm{X} \longrightarrow {}^{207}_{82}\mathrm{Pb} + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_e$ **(c)** $\mathrm{X} \longrightarrow {}^{40}_{19}\mathrm{K} + \mathrm{e}^+ + \nu_e$ **(d)** $\mathrm{X} \longrightarrow {}^{60}_{28}\mathrm{Ni} + \gamma$

(e) ${}^{230}_{90}\mathrm{Th} \longrightarrow \mathrm{X} + {}^{4}_{2}\alpha$ **(f)** ${}^{35}_{16}\mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{X} + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_e$ **(g)** ${}^{24}_{11}\mathrm{Na} \longrightarrow {}^{24}_{12}\mathrm{Mg} + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_e \longrightarrow \mathrm{X}^+\gamma$.

(42.29) Hver er heildarorkan (í MeV) sem að losnar við það að eftirfarandi samsætur hrörna: **(a)** ${}^{233}_{92}U$ **(b)** ${}^{14}_{12}C$.

(42.64) Það tók menn mjög langan tíma að átta sig á tilvist nifteindarinnar (James Chadwick „uppgötvaði" nifteindina árið 1932 meira en 20 árum eftir að Rutherford uppgötvaði róteindina og kjarnann). Ástæðan fyrir þessu var sú að β^- hrörnun blekkti menn. Í β^- hrörnun eru það rafeindir sem að losna úr kjarnanum svo að ályktunin sem að menn drógu frá því var að þá hlyti rafeindin að hafa verið þar inni í kjarnanum allann tímann! Við getum litið á sem svo að β^- hrörnun samanstandi af efnahvarfinu: $n \to p^+ + e^-$ (massi andnifteindarinnar er svo lítill að við getum hunsað hann). **(a)** Hver er heildarorkan sem að losnar í β^--hrörnun? **(b)** Með því að skoða „áreksturinn" með skriðþunga- og orkuvarðveislu samkvæmt takmörkuðu afstæðiskenningunni er hægt að sýna að 99,9 % af orkunni sem að losnar í efnahvarfinu fer í hreyfiorku rafeindarinnar. Hver verður þá hraði rafeindarinnar sem losnar?

(42.51) Englendingurinn Engilbert elskar að fá sér engiferte með engri mjólk. Engilbert er meðvitaður um loftlagsbreytingar og er alltaf að reyna að minnka kolefnissporið sitt. Honum hefur dottið það snilldarráð í hug að hita teið sitt með geislavirku samsætunni radíum, ${}^{223}_{88}\mathrm{Ra}$ sem að hrörnar samkvæmt efnahvarfinu ${}^{223}_{88}\mathrm{Ra} \xrightarrow{\alpha} {}^{219}_{86}\mathrm{Rn} + {}^{4}_{2}\alpha^{2+}$. Hann tekur því 100 mL af vatni við 18 °C (eðlisvarmi vatns er 4190 $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg.K}}$). Engilbert hendir síðan radíummola ofan í vatnið í vel einangruðu íláti. Hver þarf massi radíummolans að vera til þess að orkan sem að losnar við hrönunina nái að hita vatnið upp að suðu?

(42.29) 4,91 MeV, 0,156 MeV **(42.64)** 0,773 MeV, $v_e = 0,917c$, $v_p = 0,00128c$. **(42.51)** 15,8 μg.

Dæmatími 38: Kjarna- og öreindafræði: Geislavirkni

Geislavirk efni eru óstöðug og hrörna yfir í stöðugri efni. Það er háð geislavirka efninu hversu líkleg sú hrörnun er. Breytingin í heildarfjölda einda, N, fylgir þá hrörnunarhreyfingu:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \implies N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

Þar sem λ er stuðull sem kallast hrönunarstuðull og táknar líkur þess að geislavirka efnið hrörni. Við segjum þá að geislavirknin frá þessu sýni sé gefin með:

$$G(t) = -\frac{dN}{dt} = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = G_0 e^{-\lambda t}.$$

Geislavirkni hefur eininguna $[G] = \mathrm{Bq}$ (Henri Becquerel til heiðurs). Líffræðilegt geislunarálag hlutar með massa m sem verður fyrir geislun með orku ΔE er skilgreint sem:

$$H = \frac{w\Delta E}{m}$$

Þar sem að w er svokallaður geislunarstuðull og er háður geisluninni ($w_\alpha = 20$, $w_\gamma = 1$ og $w_\beta = 1$). Geislunarálag er mælt í einingunni $[H] = \mathrm{Sv}$ (sænska heilbrigðiseðlisfræðingnum Rolf Maximilian Sievert til heiðurs).

(42.18) Geislavirka samsætan baríum, $^{131}_{56}\mathrm{Ba}$, hefur helmingunartíma upp á 12 daga. Marie Curie skoðar hrörnun á 250 μg sýni yfir nokkra daga. Hver er massi sýnisins eftir **(a)** 1 dag **(b)** 10 daga **(c)** 100 daga

(42.23) Helmingunartími geislavirku samsætunnar $^{60}_{27}\mathrm{Co}$ er 5,27 ár. Irène Joliot-Curie mælir $3{,}50 \cdot 10^9$ Bq geislavirkni frá tilteknu kóbaltsýni. Hver er massi sýnisins?

(42.49) Lítill slúbbert í ónefndum bekk sullar niður lausn af geislavirka efninu sesín, $^{137}_{55}\mathrm{Cs}$, í efnafræðitíma hjá Má. Þetta þýðir því miður að það þarf að loka skólanum og bíða eftir því að geislavirknin frá sýninu lækki niður í gildi sem að geislavarnir ríkisins telja sómasamlegt fyrir stofnun af þessari stærð. Starfsmaður frá geislavörnum ríkisins mælir $2{,}0 \cdot 10^{10}$ Bq geislavirkni í efnafræðistofunni skömmu eftir slysið. Hann veit að sesín hrörnar með β^- hrörnun og að helmingunartími þess er 30 ár. Hann ályktar því að geislavirknin megi mest vera $9{,}25 \cdot 10^8$ Bq. Hversu lengi þarf að loka Menntaskólanum?

(42.58) Plútóníum samsætan $^{239}_{94}\mathrm{Pu}$ hefur helmingunartíma $\tau_{\mathrm{Pu}} = 2{,}412 \cdot 10^4$ ár og hrörnar með α-geislun. Hreyfiorka α-agnanna sem að losna í kjarnahvarfinu er 5,2 MeV. Í þessu dæmi ætlum við að skoða líffræðilegu hættuna sem að því fylgir að anda að sér litlu rykkorni af plútóníumi með þvermál 1 μm. Eðlismassi plútóníums er $\rho_{\mathrm{Pu}} = 19.800\,\mathrm{kg/m^3}$.

(a) Hversu margar Plútóníum frumeindir eru í einu rykkorni?

(b) Hver er geislavirkni (Bq) rykkornsins í upphafi?

(c) Hér er geislavirknin ekki mikil og hreyfiorka α-agnana er heldur ekki mikil þar að auki sem að drægni þeirra er ekki nema 50 μm. Hinsvegar þá munu allar α-agnirnar sem að losna ná að skemma lungnavefi líkamans því plútóníum rykkornið er fast í lungunum. Lungnavefirnir hafa um það bil sama eðlismassa og vatn, þ.e. $\rho_{\mathrm{lungu}} = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$. Hversu mikið er geislunarálgið á einu ári?

(42.18) 236 μg, 140 μg, 0,78 μg. **(42.23)** 83,6 μg. **(42.49)** 133,5 ár. **(42.58)** $2{,}61 \cdot 10^{10}$ atóm, 23,7 mBq, 191 $\frac{\mathrm{MSv}}{\text{ári}} \gg 1 \frac{\mathrm{mSv}}{\text{ári}}$

Kafli 25

Inngangur að skammtafræði

„There is nothing new to be discovered in physics now. All that remains is more and more precise measurement.“

- William Thomson (Lord Kelvin), 1900

„The task is not so much to see what no one has yet seen; but to think what nobody has yet thought, about that which everybody sees.“

- Erwin Schrödinger, 1925

25.1 Sögulegur inngangur

Árið 1905 hefur stundum verið kallað *Annus Mirabilis* eða ár undrana því það ár birti Einstein fjórar greinar (tæknilega séð þrjár því fjórða greinin er framhald af þriðju greininni) sem hver er talin marka nýtt upphaf að ólíkum greinum eðlisfræðinnar. Flestir kannast ágætlega við þriðju og fjórðu greinarnar sem fjalla um takmörkuðu afstæðiskenninguna. Færri kannast við aðra greinina um Brown-hreyfingu en það var fyrsta raunverulega röksemdarfærslan fyrir tilvist atóma (þannig var fyrst hægt að mæla stærð þeirra með skipulögðum hætti!). Einstein gaf síðan út almennu afstæðiskenninguna árið 1915 sem útskýrir hvernig að þyngdarkrafturinn virkar (þyngdarlögmál Newtons er nálgun!). Einstein hlaut síðan nóbelsverðlaunin árið 1921, en það er frekar athyglisvert í sögunni, að það var ekki fyrir verk hans á afstæðiskenningunni sem hann er frægastur fyrir í dag heldur var það fyrir fyrstu greinina sem að hann skrifaði árið 1905 um svokallaða ljósröfunartilraun. Í tilkynningu nóbelsnefndarinnar segir nefnilega:

For his services to Theoretical Physics, and especially for his discovery of the law of the photoelectric effect.

En það var fyrsta greinin sem hann birti árið 1905. Hún fjallaði um þessa svokölluðu ljósröfunartilraun. Þessi grein er af mörgum talin marka upphafið að skammtafræði en það er frekar írónískt því Einstein eyddi stórum hluta ævinnar í að reyna að færa rök gegn skammtafræðinni (sbr. samræður hans við Niels Bohr). Á þessum tímapunkti er kannski allt í lagi að útskýra hvers vegna Einstein var svo mótfallinn skammtafræðinni. Hann á að hafa sagt um skammtafræðina (sem stjórnast af líkum eins og teningakast):

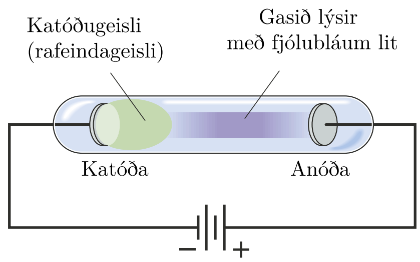
„God does not play dice with the universe.“

- Albert Einstein, 1926

En helsta ástæðan fyrir því að Einstein var mótfallinn skammtafræðinni var vegna þess að það kemur í ljós að skammtafræðin og almenna afstæðiskenningin eru ekki samrýmanlegar kenningar í þeirri merkingu að það er hægt að sýna fram á að aðeins önnur af þessum tveimur kenningum geti staðist - þær eru semsagt í mótsögn við hvor aðra! Einstein veðjaði auðvitað á að það væri almenna afstæðiskenningin sem að réði ríkjum og að skammtafræðin þyrfti að víkja fyrir betri kenningu. Ein frægasta grein allra tíma er einmitt svokölluð EPR-þversögn (Einstein–Podolsky–Rosen) en í þeirri grein færði Einstein að því er honum virtist óhrekjanleg rök fyrir því að skammtafræðin væri í mótsögn við sjálfa sig. Þetta er reyndar kveikjan afar merkilegum heimspekilgum samræðum og bréfaskrifum sem að danski eðlisfræðingurinn Niels Bohr og Albert Einstein áttu árin 1920-1930 um eðli skammtafræðinnar. Albert Einstein vildi meina að undirliggjandi gæti heimurinn ekki stjórnast af líkum - þetta væri bara galli í kenningunni - okkur vantaði bara nákvæmari lýsingu á heiminum til þess að við gætum útskýrt hvaðan þessar líkur kæmu. Hinsvegar vildu fylgismenn Bohrs meina að það væri aldrei hægt að ákvarða neina nánari lýsingu - efnisheimurinn er handahófskenndur og stjórnast af líkum á dýpsta plani tilverunnar. EPR-þversögnin sem að átti að vera helsti þyrnirinn í augum fylgismanna Niels Bohrs varð þvert á móti helsta vígi þeirra! Árið 1982 birti franski eðlisfræðingurinn Alain Aspect tilraunastaðfestingu á þessari svokölluðu þversögn og sýndi að það væru ekki til neinar huldar breytistærðir eins og Einstein hafði spáð fyrir um!

25.2 Glerpíputilraun Faradays

Til að skilja ljósröfunartilraunina almennilega verðum við að fara aftur til Michael Faradays (já! Það er maðurinn á bak við hið alræmda spanlögmál)[1] En Faraday hafði í kringum árið 1820 verið að skoða eftirfarandi uppstillingu:



Inni í glerpípunni hafði hann komið fyrir gasi (hér neon) og plötum í plötuþétti. Ef að spennumunurinn var nógu mikill á milli platna plötuþéttisins þá kom fram annar grænn geisli inni í glerpípunni sem að hann kallaði katóðugeisla (í dag vitum við að katóðugeislar eru ekkert annað heldur en rafeindageislar). Skoðum þetta aðeins nánar inni í hylkinu. Þegar rafeindirnar rekast á gassameindirnar þá fá sameindirnar orku og örvast upp í hærra orkuástand. En atóm vilja að eðlisfari vera í lægsta orkuástandi sínu, þ.e. grunnástandinu, svo að atómin reyna að losa sig við orkuna en við það þá geislar atómið frá sér ljóseind með tilheyrandi orku, þ.e. við höfum að:

$$E_\gamma = \Delta E_{\text{atóm}}$$

Það sem meira er: Liturinn á ljósinu sem að gasið gefur frá sér er breytilegur eftir því hvaða efni við erum með inni í glerpípunni. Öfugt þá er hægt að sjá hvaða efni er í hylkinu bara út frá því að litur kemur frá efninu. Sýnilega litrófið samanstendur af ljósi með bylgjulengd:

$$\lambda_{\text{sýnilegt}} \in [400; 750]\,\text{nm}.$$

En þar sem að $c = \lambda f$ þá samsvarar það eftirfarandi tíðnum:

$$f_{\text{sýnilegt}} = \frac{c}{\lambda_{\text{sýnilegt}}} \in [400; 750]\,\text{THz}.$$

(sem er afar skondin tilviljun!). Hvert efni hefur þá einskonar kennitölu sem kallast litróf frumefnisins og samanstendur af þeim sýnilegu bylgjulengdum sem að efnið getur gefið frá sér. Fyrir vetni höfum við t.d. að:

$$\lambda_{\text{H}} \in \left\{ \underbrace{410{,}1}_{\text{fjólublár}}\;;\; \underbrace{434{,}0}_{\text{dökkblár}}\;;\; \underbrace{486{,}1}_{\text{sægrænn}}\;;\underbrace{656{,}2}_{\text{rauður}} \right\}\text{nm}.$$

[1]Reyndar var Michael Faraday afar ofarlega í huga Albert Einstein þegar hann skrifaði greinar sínar árið 1905. Til dæmis hefst greinin hans um afstæðiskenninguna á því að dásama störf Faradays.

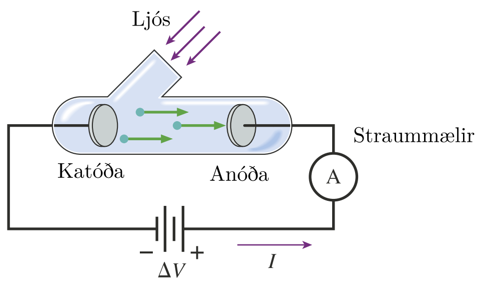
en fyrir kvikasilfur er t.d.

$$\lambda_{\text{Hg}} \in \left\{ \underbrace{404{,}7}_{\text{fjólublár}};\ \underbrace{407{,}8}_{\text{ljós fjólublár}};\ \underbrace{435{,}8}_{\text{dökkblár}};\underbrace{546{,}1}_{\text{grænn}};\underbrace{577{,}0}_{\text{gulur}};\ \underbrace{579{,}1}_{\text{appelsínugulur}} \right\} \text{nm}.$$

Á þessum tímapunkti förum við að sjá ummerki um skömmtun! Litrófslínurnar geta bara komið í ákveðnum gildum en ekki með hvaða gildi sem er! Þetta er fyrsta vísbendingin um skömmtun á orku atómanna! Þetta minnir á grunnhleðsluna, e, en allar hleðslur, Q, þurfa að vera heiltölumargfeldi af e, þ.e. til er $N \in \mathbb{Z}$ þannig að $Q = Ne$.

25.3 Ljósröfunartilraunin og útskýring Einsteins

Árið 1886 prufaði Heinrich Hertz að breyta glerpíputilrauninni örlítið þannig að:



Það sem að hann komst að var að ljóseindirnar gátu búið til straum í rásinni en það ætti ekki að vera neinn straumur í rásinni þegar að þéttirinn er fullhlaðinn! Hvernig væri hugsanlega hægt að útskýra það? Það sem meira var, það var bara fyrir ákveðnar bylgjulengdir á ljósi sem að þetta var hægt! Ef að bylgjulengdin var of há þá var ekki hægt að fá straum í rásina sama hversu mikill ljósstyrkurinn var en um leið og bylgjulengdin varð nógu lág (og þar með hækkaði orka ljóseindanna í ljósinu) þá var hægt að fá straum í rásina. Hertz skráði niður athuganir sýnar:

(1) Ljósröfunarstraumurinn í rásinni er í beinu hlutfalli við ljósstyrkinn.

(2) Straumurinn í rásinni byrjar um leið ($< 1\,\text{ns}$) og kveikt er á ljósinu.

(3) Ljósröfunarstraumurinn kemur einungis fram ef tíðni ljóssins er $f > f_0$ eða $\lambda < \lambda_0$ þar sem f_0 kallast **þröskuldstíðni málmsins** og er háð efninu sem að plötuþéttirinn samanstendur af.

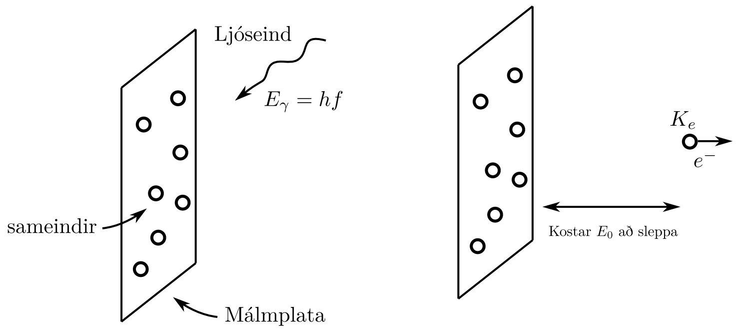
(4) Ef að rafhlöðunni er snúið við og ljósinu beint að jákvæðu plötu plötuþéttisins þá hættir straumurinn í rásinni þegar að spennumunurinn í rásinni verður $V_\text{þ}$, þar sem að $V_\text{þ}$ kallast **þröskuldsspenan**. Gildið á $V_\text{þ}$ er breytilegt eftir efnum og óháð ljósstyrknum. Með öðrum orðum, sama hversu sterkt ljósið er þá endar spennumunurinn í rásinni alltaf í $V_\text{þ}$.

Einstein hlaut nóbelsverðlaunin árið 1921 fyrir að útskýra þessa ljósröfunartilraun. Einstein lagði til að orka ljóss væri skömmtuð. Hann kallaði slíkan orskuskammt ljóseindir. Hann staðhæfði að:

$$E_\gamma = hf$$

þar sem að $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\text{Js}$ er fasti Plancks.[2] Þá gat Einstein útskýrt ljósröfunina með eftirfarandi hætti:

[2]Fastinn, h, heitir eftir þýska eðlisfræðingnum Max Planck sem notaði hann fyrst árið 1900 til að útskýra svarthlutsgeislun (sem útskýrir djúpstæð tengsl milli litrófslína og hitastigs). En Planck notaði tilgátuna hans Einsteins án þess að átta sig á því!



Til þess að osa rafeind frá yfirborðinu á málminum þá þarf örvaða rafeindin (sem gleypir ljóseindina) að fá nógu mikla orku til þess að yfirvinna alla rafsegulkraftana sem að halda henni í málmplötunni. Því er til minnsta orka; svokallað vinnufall mámlsins (sem er breytilegt fyrir mismunandi málma), E_0, þannig að:

$$E_\gamma = E_0 + K_e \quad \text{þ.e.} \quad K_e = E_\gamma - E_0 = hf - hf_0 = h(f - f_0).$$

þar sem að K_e táknar hreyfiorku rafeindarinnar sem að losnar. En þá nær rafeindin bara að lenda á neikvæðu plötu plötuéttisins ef að hún hefur nægilega orku til að yfirvinna rafsviðið (sem er að reyna að stöðva hana) sem gefur því að þröskuldsspennan verður

$$eV_{\text{þ}} = K_e = hf - E_0.$$

25.4 Efnisbylgjur de Broglie

Samkvæmt afstæðiskenningu Einsteins er orku-skriðþunga jafnan:

$$E^2 = E_0^2 + (pc)^2$$

þar sem að E táknar heildarorku eindarinnar, E_0 táknar kyrrstöðuorku eindarinnar og p táknar skriðþunga eindarinnar. Ljóseindir eru massalausar og fyrir þær gildir að $E_0 = 0$ en þar með höfum við að:

$$E_\gamma = p_\gamma c \implies p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{\frac{hc}{\lambda}}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Með öðrum orðum þá höfum við almennt að skriðþungi ljóseindar er gefinn með:

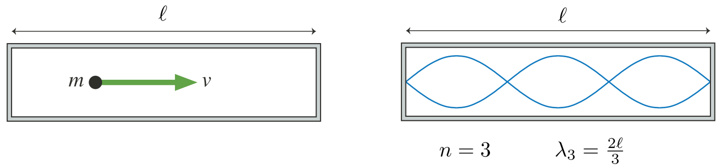
$$p_\gamma = \frac{h}{\lambda}.$$

En árið 1924 í doktorsritgerðinni sinni þá staðhæfði Louis de Broglie (borið fram du broj) að sama jafn gildir líka fyrir efnisagnir. Þ.e. til er svokölluð de Broglie bylgjulengd fyrir allar efnisagnir sem er gefin með:

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p}.}$$

Þar sem að $p = mv$ eða $p = \gamma mv$ (eftir því hvort á betur við) er skriðþungi efniseindarinnar.

Hann notaði þetta til þess að útskýra mörg skammtafræðileg fyrirbæri (hann hlaut nóbelsverðlaunin árið 1929 fyrir störf sín með efnisbylgjur). En sér í lagi notaði hann þetta til þess að útskýra kjarnann og atómið. Hann ímyndaði sér nefnilega að kjarninn væri eins og kassi og að kjarneindirnar gætu einungis hegðað sér eins og staðbylgjur á streng inni í kassanum (með lokuðu jaðarskilyrði því kassinn er lokaður).



Hryefiorka agnanna í kassanum er

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}.$$

Þar að auki sem að samkvæmt bylgjuagnaforsendu de Broglie er $\lambda = \frac{p}{h}$ svo:

$$K = \frac{\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2}{2m} = \frac{h^2}{2m}\frac{1}{\lambda^2}$$

En staðbylgjur uppfylla þá að $\lambda = \frac{2\ell}{n}$ þar sem $n \in \mathbb{Z}_+$ svo

$$E_n = K_n = \frac{h^2 n^2}{8m\ell^2}$$

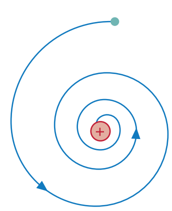
er heildarorka agnanna í kassanum. Við sjáum þá sér í lagi að orkan er skömmtuð.

25.5 Klassískur líftími atómsins (*)

Árið 1913 settu Daninn Niels Bohr og Ernest Rutherford fram nýtt atómlíkan. Hugmyndir þeirra byggðu ofan á plánetulíkani Rutherfords af atóminu frá árinu 1911 (í rauninni er lítill munur á líkönunum). Einstein hafði árið 1905 lagt til að ljós samanstæði af litlum ögnum sem hann kallaði ljóseindir (*light quanta*). Bein þýðing væri hugsanlega ljósskammtar. Samkvæmt Einstein var orka ljóseindar skömmtuð og gefin með $E_\gamma = hf$ og skriðþungi ljóseindar ákvarðast af $E^2 = \underbrace{E_0^2}_{=0} + (pc)^2$ þ.a. $E_\gamma = p_\gamma c$ fyrir ljós (hér höfum við notað að ljóseindir eru massalausar). Helsti gallinn við atómlíkan Rutherfords var að það var bersýnileg mótsögn í því. Samkvæmt klassískri eðlisfræði mun ögn með hleðslu q sem verður fyrir hröðun geisla frá sér orku (tapar orku) með afli:

$$P_L = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}, \qquad \text{(Larmor jafnan)}$$

En það þýðir að rafeindin sem er á hringhreyfingu um róteindina ætti að tapa orku og spírala inn að kjarnanum:



Þannig getum við metið líftíma atómsins. Það er að segja við getum metið hversu langur tími líður þar til að rafeindin hefur spíralað inn í kjarnann. Við athugum þá að kraftajafnan gefur:

$$m_e\frac{v^2}{r} = \frac{ke^2}{r^2} \implies \frac{v^2}{r} = \frac{ke^2}{m_e r^2}$$

þ.a.

$$P = -\frac{dE}{dt} = \frac{e^2 \left(\right)^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{k^2 e^6}{4\pi\epsilon_0 m_e^2 c^3}\frac{1}{r^4}$$

En við athugum líka að:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{ke^2}{r} = -\frac{ke^2}{2r}$$

Þannig að við höfum samkvæmt keðjureglunni að:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dr}\left(-\frac{ke^2}{2r}\right)\cdot\frac{dr}{dt} = \frac{ke^2}{2r^2}\frac{dr}{dt}.$$

En þar með höfum við sýnt að:

$$P_L = -\frac{dE}{dt} = -\frac{ke^2}{2r^2}\cdot\frac{dr}{dt} = \frac{k^2e^6}{4\pi\epsilon_0 m_e^2 c^3}\cdot\frac{1}{r^4}$$

þ.a.

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{ke^4}{2\pi\epsilon_0 m_e^2 c^3}\cdot\frac{1}{r^2}$$

Sem við leysum með tegrun:

$$-\int_a^b r^2 dr = \int_0^\tau \frac{ke^4}{2\pi\epsilon_0 m_e^2 c^3}dt \implies \left[\frac{1}{3}r^3\right]_a^b = \left[\frac{ke^4}{2\pi\epsilon_0 m_e^2 c^3}t\right]_0^\tau \implies \frac{a^3-b^3}{3} = \frac{ke^4}{2\pi\epsilon_0 m_e^2 c^3}\tau$$

Svo líftimi atómsins er:

$$\tau = \frac{2}{3}\cdot\frac{\pi\epsilon_0 m_e^2 c^3}{ke^4}\left(a^3-b^3\right) = 10\,\mathrm{ps}$$

Þar sem við höfum notað $a = 0{,}529\,\text{Å}$ og $b = 1{,}2\,\mathrm{fm}$. Þetta er bersýnileg mótsögn því annars hefðu öll atómin sem að við samanstöndum úr hrörnað nú þegar og við værum því ekki til!

25.6 Bohr-líkanið

En danski eðlisfræðingurinn (og nóbelsverðlaunahafi 1922) reyndi að lagfæra þetta gallaða atómlíkan árið 1913 með eftirfarandi þremur forsendum:

Frumsendur að atómlíkani Bohrs

(i) Rafeindin er á stöðugri hringhreyfingu umhveris kjarnan án þess þó að geisla frá sér orku. Þessar brautir eru skammtaðar í þeirri merkingu að rafeindin getur einungis verið í ákveðinni fjarlægð frá róteindinni (en ekki hvaða fjarlægð sem er).

(ii) Þessar stöðugu brautir eru þær brautir þar sem að hverfiþungi rafeindarinnar á sporbraut hennar um kjarnan er skammtaður þannig að:

$$L = n\hbar$$

Þar sem $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}05\cdot 10^{-34}$ Js er fasti sem nefnist smækkaður Plancks-fasti (eða há-slá).

(iii) Rafeindir geta einungis stokkið á milli leyfilegra brautargeisla með því annað hvort að taka við eða geisla frá sér rafsegulgeislun (ljóseind) með orku $\Delta E_{\text{atóm}} = E_\gamma = hf$.

Þessi skammtatilgáta hófst með Planck og Einstein árið 1905. En Einstein hafði haft þá tilgátu að líta mætti á sem svo að ljós samanstæði af svokölluðum ljóseindum þar sem að hver ljóseind hefði orku $E = hf$ þar sem $h =$ var Plancks-fastinn og f var tíðni ljóssins.
Samkvæmt atómlíkani Bohrs þá gildir því að:

$$ma = m\frac{v^2}{r} = \frac{ke^2}{r^2} \implies v = \sqrt{\frac{ke^2}{mr}}$$

En þar með höfum við að þar sem að hverfiþungi agnarinnar er heiltölumargfeldi af smækkaða Plancks-fastanum að:

$$mvr = n\hbar \implies m\sqrt{\frac{ke^2}{mr}}r = n\hbar \implies mke^2r = n^2\hbar^2 \implies r_n = \frac{\hbar^2 n^2}{mke^2} = a_B n^2.$$

Þar sem $a_0 = r_1 = 0{,}529\,\text{Å}$ er svokallaður Bohr-geisli og táknar minnstu leyfilegu brautarvegalengdina sem að rafeindin getur haft. En þá sjáum við að brautarhraði rafeindarinnar á n-tu braut er gefinn með:

$$v_n = \sqrt{\frac{ke^2}{mr_n}} = \sqrt{\frac{ke^2}{ma_B}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{v_1}{n}$$

þar sem $v_1 = 2{,}19 \cdot 10^6\,\text{m/s}$ er brautarhraði rafeindarinnar á innsta hveli. Heildarorka rafeindarinnar á n-tu braut er þá gefin með:

$$E_n = \frac{1}{2}m_e v_n^2 - \frac{ke^2}{r_n} = \frac{1}{2}m_e\frac{ke^2}{m_e r_n} - \frac{ke^2}{r} = -\frac{1}{2}\frac{ke^2}{r_n} = -\frac{E_1}{n^2}$$

Þar sem $E_1 = 13{,}6\,\text{eV}$ er heildarorka rafeindarinnar á innsta hveli (takið eftir því að heildarorka rafeindarinnar er alltaf neikvæð og því ytra sem að rafeindin fer því nær kemst heildarorkan núlli). En þar með ályktum við að orkan sem að rafeindin geislar frá sér við það að fara á milli orkuhvela er gefin með:

$$\frac{hc}{\lambda} = hf = \Delta E = E_m - E_n = -\frac{E_1}{m^2} + \frac{E_1}{n^2} = -E_1\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

En þar með ályktum við að gleypnilínur vetnisatómsins verða greinilegar við eftirfarandi bylgjulengdir:

$$\lambda = \frac{-\frac{hc}{E_1}}{\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\lambda_0}{\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)}$$

Þannig tókst Bohr að spá fyrir gleipnilínurófi vetnisatómsins. En þegar að Bohr reyndi að framkvæma sömu reikninga fyrir helín atómið þá voru niðurstöðurnar hans algjörlega í mótsögn við mælingar. Hann hafði því gert eitthvað rétt en samt svo vitlaust!

25.7 Óendanlegur mættisbrunnur

Lítum á eind með massa m og hraða v sem að ferðast inni í kassa með lengd ℓ. Samkvæmt de Broglie hefur eindin einhverja bylgjulengd:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}.$$

En við höfum áður lært að staðbylgjur með lokuð jaðarskilyrði uppfylla:

$$\lambda_n = \frac{2\ell}{n}$$

Með því að setja þessar tvær hugmyndir saman þá ályktum við að:

$$\frac{2\ell}{n} = \frac{h}{mv_n} \implies v_n = \frac{hn}{2m\ell}$$

Heildarorka eindarinnar inni í kassanum er einungis vegna hreyfiorku hennar svo að við höfum því að:

$$E_n = \frac{1}{2}mv_n^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{hn}{2m\ell}\right)^2 = \frac{h^2n^2}{8m\ell^2}.$$

Tilheyrandi bylgjuföll verða þá:

$$\psi_n(x) = A\sin(k_nx) = A\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_n}\right) = A\sin\left(\frac{\pi nx}{\ell}\right)$$

Við tengjum við bylgjufallið svokallaðan líkindaþéttleika:

$$\rho_n(x) = |\psi_n(x)|^2 = A^2\sin^2\left(\frac{\pi nx}{\ell}\right)$$

Líkindaþéttleikinn lýsir líkunum á því að finna ögnina inni á einhverju bili með eftirfarandi hætti:

$$\mathbb{P}_{[a,b]} = \int_a^b \rho(x)dx$$

Heildarlíkurnar á því að finna ögnina inni í kassanum verða því að vera 1 þannig að við höfum að:

$$1 = \mathbb{P}_{[0,\ell]} = \int_0^\ell A^2\sin^2\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx = A^2\int_0^\ell \frac{1-\cos\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right)}{2}dx = \frac{A^2}{2}\left[x - \frac{\ell}{2\pi n}\sin\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right)\right]_0^\ell = \frac{A^2\ell}{2}$$

Svo við ályktum að:

$$A = \sqrt{\frac{2}{\ell}}.$$

Við höfum þar með að bylgjuföllin verða:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\sin\left(\frac{2\pi nx}{\ell}\right), \qquad \text{og líkindaþéttleikinn verður} \qquad \rho_n(x) = \frac{2}{\ell}\sin^2\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right).$$

Við getum þá svarað spurningum eins og:

- Hverjar eru líkurnar á því að finna ögn í skammtaástandi n milli $\frac{\ell}{4}$ og $\frac{\ell}{2}$?

Lausn: Höfum þá:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[\frac{\ell}{4},\frac{\ell}{2}]} &= \int_{\ell/4}^{\ell/2}\rho_n(x) = \frac{2}{\ell}\int_{\ell/4}^{\ell/2}\sin^2\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx = \frac{1}{2\ell}\int_{\ell/4}^{\ell/2}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi nx}{\ell}\right)\right)dx \\
&= \frac{1}{2\ell}\left[x - \frac{\ell}{2\pi n}\sin\left(\frac{2\pi nx}{\ell}\right)\right]_{\ell/4}^{\ell/2} \\
&= \frac{1}{2\ell}\left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{4} - \frac{\ell}{2\pi n}\sin(n\pi) + \frac{\ell}{2\pi n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi n}(-1)^{n+1}\right).
\end{aligned}$$

25.8 Dæmi

Dæmatími 43: Inngangur að skammtafræði: Ljóseindir og ljósröfun

Árið 1905 setti Einstein fram tilgátu um eðli ljóssins sem markaði tímamót í sögu eðlisfræðinnar. Hann staðhæfði að ljós samanstæði af litlum orkuskömmtum sem hann kallaði ljóseindir með orku:

$$E_\gamma = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

Hann notaði þetta til þess að útskýra eina helstu ráðgátu þess tíma, nefnilega ljósröfun rafeinda úr málmi, en rafeindirnar losna með hreyfiorku:

$$K_e = E_\gamma - E_0 = hf - E_0.$$

Þar sem E_0 er lágmarksorkan sem þarf til þess að losa rafeindina úr málminum (stundum kallað vinnufall málmsins). Þetta er stundum sett fram í tengslum við svokallaða stöðvunarspennu eða þröskuldsspennu, $V_þ$, en það er spennan sem þarf til þess að stöðva aftur rafeindina sem losnar þannig $K_e = eV_þ$.

(38.7) **(a)** Hver er bylgjulengd ljóseindar sem hefur orku 1,5 eV? Er þetta í sýnilega litrófinu?
(b) Ljóseind hefur bylgjulengd 550 nm. Hver er orka ljóseindarinnar?
(c) Útvarpsstöðin FM957 sendir út rafsegulbylgjur með tíðni 95,7 MHz. Hver er orka ljóseindanna?
(d) Gammageislar hafa bylgjulengd sem er minni en 100 pm. Hver er minnsta orka ljóseindanna?

(38.12) Færustu eðlisfræðingar sögunnar hafa fórnað heilsunni til þess að uppgötva leyndardóma alheimsins. Frægasta dæmið er að finna hjá Marie Curie sem handlék geislavirk efni á hverjum degi í rannsóknum sínum. Annað gott dæmi er að finna hjá Isaac Newton sem missti sjónina í heila viku eftir að hafa verið að gera rannsóknir á sólarljósi. Matti er að reyna að feta í fótspor þessara goðsagna. Hann tekur ólöglegan 500 mW rauðan leisi með bylgjulengd 650 nm og beinir honum inn í augun á sér í von um að verða frækinn eðlisfræðingur. Hversu margar ljóseindir sendir leisirinn frá sér á hverri sekúndu?

(38.38) Eldflugur eru ekki flugur heldur bjöllur af ættinni Lampyridae. Aftast á afturbol bjallanna eru kirtlar sem framleiða ljós með efnahvörfum. Eldflugurnar gefa frá sér ljós með bylgjulengd 550 nm með 1,2 mW afli í um það bil 100 ms. **(a)** Hversu margar ljóseindir losna frá bjöllunni í slíkum blossa? **(b)** Rannsóknir á mannsauganu hafa leitt í ljós að það þarf ekki nema 10 ljóseindir til þess að fólk geti greint það sem dauft ljós. Mannsaugað hefur þvermál 25 mm. Hversu langt í burtu getur maður staðið frá eldflugu en samt greint ljós frá henni?

(38.41) Kalín hefur vinnufall 2,30 eV og gull hefur vinnufall 5,10 eV.

(a) Hver er minnsta tíðni ljóss sem þarf til þess að losa rafeindir frá málmunum tveimur?
(b) Hver er þá mesta bylgjulengdin sem þarf til þess að losa rafeindir frá málmunum tveimur?
(c) Hver verður hraði ljósröfuðu rafeindanna ef ljósi með bylgjulengd 220 nm er beint að málmunum?
(d) Hvaða þröskuldsspennu þarf þá til þess að stöðva rafeindirnar?

(38.7) 827 nm, 2,3 eV, 396 neV, 12,4 keV. **(38.12)** $1{,}6 \cdot 10^{18}$ ljóseindir/sek.
(38.38) $3{,}3 \cdot 10^{14}$ ljóseindir/blossa, 35,8 km **(38.41)** Kalín: 556 THz, 540 nm, $1{,}1 \cdot 10^6$ m/s, 3,34 V.

Dæmatími 44: Inngangur að skammtafræði: de Broglie bylgjulengdin

Samkvæmt forsendu Einsteins höfðu ljóseindir orku $E_\gamma = hf$ og þar sem að ljóseindir eru massalausar og hafa þar með enga kyrrstöðuorku þá gefur orku-skriðþungajafnan $E^2 = E_0^2 + (pc)^2$ að skriðþungi ljóseinda er:

$$p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda} \implies \lambda = \frac{h}{p_\gamma}.$$

Tilgáta Louis de Broglie var síðan eins og hjá nemanda á eðlisfræðideild sem að leitar í offorsi að jöfnu til að nota á jöfnublaðinu án skilnings. Hann staðhæfði að þetta sama myndi gilda fyrir efnisagnir, þ.e.a.s. að almennt er til einhver de Broglie bylgjulengd fyrir allt efni sem er gefin með:

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

Það kemur síðan í ljós að efnisagnir sýna líka sömu bylgjueiginleika og ljós! (pun intended)

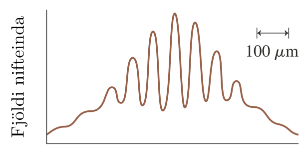
(38.16) **(a)** Hver er de Broglie bylgjulengd hafnarbolta með massa 200 g sem ferðast með hraða 30 m/s?

(b) Hver er de Broglie bylgjulengd rafeindar sem ferðast með hraða $2{,}19 \cdot 10^6$ m/s?

(c) Hver er hraði rafeindar sem hefur de Broglie bylgjulengd 0,20 nm?

(38.47) Samkvæmt de Broglie þá sýna efnisagnir sömu bylgjueiginleika og ljós. Það þýðir að við ættum að geta beint rafeindageisla í gegnum tveggja raufa ljósgreiðu og fengið fram samliðunarmynstur á skjá beint fyrir aftan. Í tiltekinni tilraun var rafeindum með hreyfiorku 50 keV beint í gegnum raufagler með raufabil 1,0 μm. Hversu langt var á milli björtu ljósrákanna á skjá 1,0 m fyrir aftan?

(38.49) Nifteindum með mjög lítinn hraða var beint í gegnum tveggja raufa raufagler með raufabil 0,10 mm og samliðunarmynstrið var skoðað á skjá 3,5 m fyrir aftan. Samliðunarmynstrið sem kom fram á skjánum má sjá á myndinni hér til hægri. Hver var hraði nifteindanna?



(38.48) Róteindum með hraða $0{,}99c$ er beint í gegnum eina 4 nm breiða rauf og bognunarmynstrið er skoðað á skjá 50 mm fyrir aftan raufina. Hver verður breiddin á hámarkinu í miðjunni?

(38.16) $1{,}1 \cdot 10^{-34}$ m, 0,33 nm, $3{,}6 \cdot 10^6$ m/s. **(38.47)** 5,4 μm. **(38.49)** 209 m/s **(38.48)** 4,7 nm.

Dæmatími 45: Inngangur að skammtafræði: Bohr-líkanið

Árið 1913 setti Niels Bohr fram tilgátu um að hverfiþungi rafeinda væri skammtaður, $L = n\hbar$. Það hefur í för með sér að brautargeislar rafeinda verða skammtaðir og fyrir vetnisatómið er:

$$r_n = a_{\scriptscriptstyle B} n^2, \qquad v_n = \frac{v_1}{n}, \qquad E_n = \frac{E_1}{n^2}$$

Þar sem að $a_{\scriptscriptstyle B} = a_1 = 0{,}529\,\text{Å}$ er Bohr-geislinn, $v_1 = \alpha c = 2{,}19 \cdot 10^6\,\text{m/s}$ ($\alpha = \frac{1}{137}$ er fíngerðarfastinn) og $E_1 = -13{,}6\,\text{eV}$ er grunnástand vetnisatómsins. Atómið gleypir eða geislar frá sér ljósi við það að rafeindir fara á milli brautargeisla. Við það losnar/gleypist ljóseind með orku $E_\gamma = \Delta E_{\text{atóm}}$. Fyrir stökk á milli orkuástanda n og m verður bylgjulengd ljóseindarinnar að vera (gildir bara fyrir vetni):

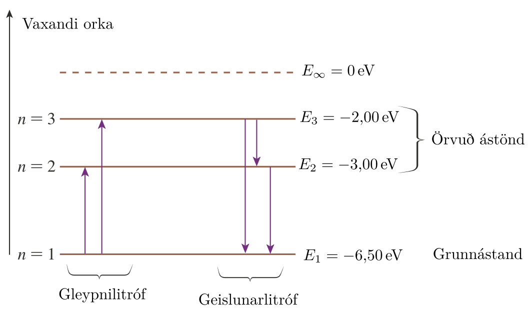
$$\lambda_{nm} = \frac{\lambda_0}{\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)}, \qquad \text{þar sem að} \quad \lambda_0 = 91{,}18\,\text{nm}.$$

(38.31) Skoðum vetnisatómið, ${}^1_1\text{H}$.

- **(a)** Hver er brautargeisli rafeindar sem hefur hraða $7{,}3 \cdot 10^5\,\text{m/s}$? Hver er skammtatala hennar?
- **(b)** Hver er brautargeisli rafeindar sem hefur heildarorku $-0{,}378\,\text{eV}$? Hver er skammtatala hennar?
- **(c)** Hver þyrfti skammtatala rafeindar að vera til þess að geisli brautarinnar væri $4\,\mu\text{m}$?

(38.56) Á myndinni hér til hægri má sjá orkumynd sem sýnir þrjú lægstu orkuástöndin fyrir óþekkt frumefni sem er ekki vetni.

- **(a)** Hver er minnsta orkan sem þarf til þess að örva atómið?
- **(b)** Hvaða bylgjulengdir koma fyrir í gleypnilitrófi atómsins?
- **(c)** Hvaða bylgjulengdir koma fyrir í geislunarlitrófi atómsins?



(38.59) Sýnilega litrófið sem að mannsaugað getur greint samanstendur af ljósi með bylgjulengd $\lambda \in [400; 750]\,\text{nm}$. Geislunarlitróf vetnis samanstendur af öllum þeim bylgjulengdum sem vetni getur geislað frá sér við það fara niður um orkuástand. Ákvarðið bylgjulengdirnar í sýnilega hluta geislunarlitrófs vetnis.

(38.62) Helstu orsökin fyrir því að ljós ferðast hægar í mismunandi efnum er sú að við það að ljóseindir lenda í árekstri við atóm í grunnástandi sínu þá örvast atómið upp í hærra orkustig. Skoðum vetnisatóm sem gleypir ljóseind og örvast upp í $n = 2$ ástand. Atóm vilja hinsvegar að eðlisfari vera í orkulægsta ástandi sínu, grunnástandinu, $n = 1$, og tíminn sem líður þar til að rafeindin geislar aftur frá sér ljóseind er að meðaltali $1{,}6\,\text{ns}$ (þetta er líkindaferli). Hversu marga snúninga snýst örvaða rafeindin umhverfis kjarnann á þessum tíma?

(38.31) $r_a = 4{,}8\,\text{Å}$, $n_a = 3$, $r_b = 1{,}9\,\text{nm}$, $n_b = 6$, $n_c = 275$. **(38.56)** $3{,}5\,\text{eV}$, $\lambda_b \in \{355\,\text{nm}, 276\,\text{nm}\}$, $\lambda_c \in \{355\,\text{nm}, 276\,\text{nm}, 1241\,\text{nm}\}$. **(38.59)** $\lambda_H \in \{656{,}5\,\text{nm}, 486{,}3\,\text{nm}, 434{,}2\,\text{nm}, 410{,}3\,\text{nm}\}$. **(38.62)** $1{,}05 \cdot 10^7$ snúningar.

Dæmatími 46: Inngangur að skammtafræði: Óendanlegur mættisbrunnur

Skoðum ögn með massa m sem hefur hraða v inni í kassa með lengd ℓ. Vegna bylgjueiginleika efnisagna þá verður de Broglie bylgjulengdin $\lambda = \frac{h}{p}$. En þessu má líka við staðbylgju með lokuð jaðarskilirði svo bylgjulengdirnar verða skammtaðar, $\lambda_n = \frac{2\ell}{n}$, en það gefur að heildarorkan verður:

$$E_n = \frac{1}{2}mv_n^2 = \frac{h^2n^2}{8m\ell^2}.$$

Bylgjuföllin eru síðan gefin með:

$$\psi_n(x) = A\sin(k_n x),$$

þar sem að

$$k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{n\pi}{\ell}, \qquad \text{og stöðlunarfastinn er} \qquad A = \sqrt{\frac{2}{\ell}}.$$

Líkurnar á því að finna ögnina á bilinu $[a, b] \subseteq [0, \ell]$ eru gefnar með:

$$\mathbb{P}_{[a,b]} = \int_a^b |\psi(x)|^2 dx$$

(38.51) Mýeindin er öreind sem svipar til rafeindarinnar. Mýeindin hefur sömu hleðslu og rafeindin en er 207 sinnum massameiri. Hugsum okkur að við náum að fanga mýeind í flugnagildru af lengd 70 pm. Eftir að við föngum mýeindina er hún í skammtaástandi $n = 3$ en fellur skömmu síðar niður í grunnástandið og geislar við það frá sér ljóseind. Hver er bylgjulengd ljóseindarinnar?

(38.22) Einfalt líkan af atómkjarnanum segir að kjarneindirnar séu bundnar í kassa með sömu lengd og þvermál atómkjarnans. Í einhverjum skilningi er hægt að segja að stöðugasta frumefnið sé járn, $^{56}_{26}\mathrm{Fe}$.

- **(a)** Hver er orka kjarneindanna í grunnástandinu inni í járnkjarnanum?
- **(b)** Frumeindamassi járns er $m_{\mathrm{Fe}} = 55,934940u$. Bindiorka kjarnans er skilgreind sem stærðin:

  $$\Delta E_B = -\left(m_{\mathrm{Fe}} - Zm_p - Zm_e - (A - Z)m_n\right)c^2$$

  Með $m_p = 1,00728u$, $m_e = 0,00055u$, $m_n = 1,00866u$ og $u = 1{,}6605 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 931{,}49\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c}^2}$. Hver er bindiorka járnkjarnans? Hver er bindiorkan per kjarneind ($\Delta E_B/A$) í járnkjarnanum? Er þetta meira eða minna heldur en svarið í **(a)**-lið?

(40.27) Vatnsdropi með geisla 1,0 μm rúllar með hraða 1,0 μm/s inni í núningslausum kassa af lengd 20 μm.

- **(a)** Hver er skammtatala vatnsdropans?
- **(b)** Ef skammtatala kerfis er mjög há þá er yfirleitt í lagi að lýsa kerfinu með klassískum aðferðum. Er það í lagi hér?
- **(c)** Hverjar eru líkurnar á því að finna ögnina í 2 μm fjarlægð frá öðrum hvorum endanum?

(40.33) Skoðum ögn með massa m í óendanlegum mættisbrunni af lengd ℓ.

- **(a)** Hverjar eru líkurnar á því að finna ögn í grunnástandinu inni á bilinu $[0, \frac{\ell}{4}]$?
- **(b)** Hverjar eru líkurnar á því að finna ögn í $n = 2$ skammtaástandinu inni á bilinu $[0, \frac{\ell}{4}]$?
- **(c)** Hverjar eru líkurnar á því að finna ögn í grunnástandinu inni á bilinu $[\frac{\ell}{4}, \frac{\ell}{4} + b]$ þar sem að $b = \frac{\ell}{100}$?

(38.51) 418 nm. **(38.22)** 2,4 MeV, 492,2 MeV, 8,8 MeV. **(40.27)** $n = 2{,}53 \cdot 10^8$, Já, 0,20. **(40.33)** 0,091, 0, 33, 0, 01.