1 Vatnseldflaug (10 stig)

Í þessu dæmi skoðum við vatnseldflaug. Hægt er að búa til einfalda heimagerða vatnseldflaug með því að taka 2 L gosflösku og fylla hana að hluta með vatni.
Lofti er dælt inn í flöskuna í gegnum stútinn þar til þrýstingurinn inni í henni verður nægur til að stúturinn losni þannig að vatnið þrýstist snögglega út, og samkvæmt þriðja lögmáli Newtons skýst eldflaugin upp. Markmið okkar í þessu dæmi verður að meta hversu hátt vatnseldflaugin kemst.

Uppstillingin sem að við höfum í huga er 2 L vatnsflaska með massa $m_{\text{flaska}} = 45\,\text{g}$ ásamt 1 L af vatni. Hæð gosflöskunnar er $L = 31{,}5\,\text{cm}$ og geisli hennar er $R = 4{,}5\,\text{cm}$. Stúturinn er með geisla $r = 1{,}4\,\text{cm}$. Þegar flaskan losnar frá stútnum er upphafsþrýstingurinn inni í flöskunni $P_0 = 5P_a$ þar sem $P_a = 1\,\text{atm} = 101{,}3\,\text{kPa}$. Eðlismassi vatns er $\rho_v = 1000\,\text{kg/m}^3$ og eðlismassi lofts er $\rho_\ell = 1{,}225\,\text{kg/m}^3$.

- **(a)** **(0,5 stig)** Hvert er rúmmál flöskunnar, V_f, í einingunni m^3? Hvert er rúmmál loftsins, V_0, inni í flöskunni á augnablikinu þegar eldflaugin tekur á loft?
- **(b)** **(0,5 stig)** Hver er massi eldflaugarinnar, M_0, í upphafi og þegar allt vatnið hefur tæmst úr henni, M_f.
- **(c)** **(0,5 stig)** Gerum ráð fyrir að loftið inni í flöskunni fylgi jafnhitaferli en það þýðir að $T = \textit{fasti}$ í ferlinu. Notið gaslögmálið til að ákvarða þrýsting loftsins, P_f, inni í flöskunni á augnablikinu sem að öllu vatninu hefur verið þrýst út úr flöskunni.
- **(d)** **(1,5 stig)** Ákvarðið hraða vatnsins, u, út um stút flöskunnar sem fall af þrýsting inni í flöskunni, $P(t)$. Þið megið nota nálgunina $r \ll R$ og gera ráð fyrir að h sé svo lítið að áhrif þrýstings frá vökvasúlunni ($\rho_v gh$) eru hverfandi.
- **(e)** **(0,5 stig)** Hversu miklum massa tapar eldflaugin á tímaeiningu, $\frac{dM}{dt}$, sem fall af u, r og ρ_v.
- **(f)** **(0,5 stig)** Krafturinn sem knýr eldflaugina upp er gefinn með $T = u\frac{dM}{dt}$. Notið niðurstöðurnar í liðunum hér á undan til að sýna að til séu fastar α og β þannig að $T = \alpha P + \beta$.
- **(g)** **(1 stig)** Notið liðina hér á undan til að ákvarða u_f og T_f þegar vatnið hefur tæmst úr flöskunni.

Með gaslögmálinu má sýna að þrýstingurinn inni í flöskunni fylgir afleiðujöfnunni $\frac{dP}{dt} = -\frac{P^2 A}{P_0 V_0}\sqrt{\frac{2}{\rho}(P - P_a)}$, þar sem að A er þverskurðarflatarmál stútsins. Einungis er hægt að leysa þessa afleiðujöfnu með tölulegum aðferðum en samt er hægt að nota hana til að ákvarða heildartímann τ sem að líður frá því að vatnseldflaugin fer af stað og þar til að allt vatnið hefur tæmst úr flöskunni:

$$\tau = \frac{V_0}{A}\sqrt{\frac{\rho_v}{2P_a}}\left[\sqrt{-1 + \frac{P_0}{P_a}} - \frac{V_f}{V_0}\sqrt{-1 + \frac{P_0 V_0}{P_a V_f}} + \frac{P_0}{P_a}\arctan\left(\sqrt{-1 + \frac{P_0}{P_a}}\right) - \frac{P_0}{P_a}\arctan\left(\sqrt{-1 + \frac{P_0 V_0}{P_a V_f}}\right)\right].$$

- **(h)** **(1 stig)** Reiknið tölulegt gildi á tímanum τ.
- **(i)** **(3 stig)** Metið hraða eldflaugarinnar $v(\tau)$ þegar eldsneytið þrýtur.
- **(j)** **(1 stig)** Metið hver mesta hæð, $h_{\max}$, vatnseldflaugarinnar verður. Hunsið loftmótsstöðu.

Lausn á Vatnseldflaug

(a) Rúmmál flöskunnar er $V_f = 2\,\mathrm{L} = 2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$. Rúmmál loftsins er $V_0 = V_f - V_{\text{vatn}} = 1\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$.

(b) Massi eldflaugarinnar er þá $M_0 = m_f + \rho V_{\text{vatn}} = 1045\,\mathrm{g}$ í lokin er hann $M_f = m_f = 45\,\mathrm{g}$.

(c) Þá er $P_f V_f = P_0 V_0$ svo $P_f = \frac{P_0 V_0}{V_f} = \frac{1}{2} P_0 = \frac{5}{2} P_a$.

(d) Samkvæmt lögmáli Bernoulli er þá

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho_v v_1^2 + \rho_v g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho_v v_2^2 + \rho_v g h_2$$

en hér er $P_1 = P$ og $P_2 = P_a$, $h_1 = h$ og $v_2 = u$ og $h_2 = 0$. Hægt er að ákvarða v_1 sem fall af u með því að nota samfelldnilögmálið en það segir að flæðið sé varðveitt í þeim skilningi að

$$\pi R^2 v_1 = \pi r^2 u \implies v_1 = \left(\frac{r}{R}\right)^2 u$$

Við máttum gera ráð fyrir að bæði $r \ll R$ og að þrýstingurinn vegna þyngdarinnar skipti ekki máli en þá fæst

$$u = \sqrt{\frac{2}{\rho_v}(P - P_a)}\,.$$

Ef engar nálganir eru notaðar þá er samt hægt að reikna þetta og fá

$$u = \frac{\sqrt{\frac{2}{\rho_v}(P - P_a) - 2gh}}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}}$$

Framvegis styðjum við okkur við fyrra formið.

(e) Þá er $\frac{dM}{dt} = \rho_v A u$.

(f) Þar með er $T = u\frac{dM}{dt} = \rho_v A u^2 = 2A(P - P_a)$, svo $\alpha = 2A$ og $\beta = -2AP_a$.

(g) $u_f = \sqrt{\frac{2}{\rho_v}(P_f - P_a)} = \sqrt{\frac{3P_a}{\rho_v}} = 17{,}4\,\mathrm{m/s}$ og $T_f = \rho_v A u_f^2 = 187\,\mathrm{N}$.

(h) Tölulega gildið er $\tau = 74{,}8\,\mathrm{ms}$.

(i) Við athugum að $a(t) = \frac{T(t)}{M(t)} - g$ svo

$$v(\tau) = \int_0^\tau \left(\frac{T(t)}{M(t)} - g\right) dt \approx \left(\frac{T(\tau) + T(0)}{M(\tau) + M(0)} - g\right)\tau = 46{,}3\,\mathrm{m/s}.$$

Þetta er reyndar nokkuð fjarri réttu gildi, $v(\tau) = 61{,}7\,\mathrm{m/s}$.

(j) Þá er $h_f \approx \frac{1}{2} v(\tau)\tau = 1{,}7\,\mathrm{m}$ sem gefur því að $h_{max} = h_f + \frac{v(\tau)^2}{2g} = 111\,\mathrm{m}$.