

Stærðfræðigreining 3

Dæmatími 4

Matthias Baldursson Harsen

Dæmi 17, 3.11.1, 3.11.2ab, 3.11.3, 3.11.4, 3.11.5abcd, 3.11.6a, 3.11.7, 3.11.8ab, 3.11.11, 3.11.12, 3.11.13.

Upprifjun: Rifjum upp Cauchy-formúluna fyrir einfalt skaut:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a), \quad \text{ef } a \in \Omega \text{ er einfalt skaut.}$$

Ef f er fágæð á öllu Ω (með engin skaut) þá gildir einfaldlega að:

$$\int_{\partial\Omega} f(z) dz = 0, \quad \text{ef } f \in \mathcal{O}(\Omega)$$

Hinsvegar, ef að við erum að tegra yfir fall með margfalt skaut í $a \in \Omega$ þá fáum við:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz = 2\pi i f'(a), \quad \text{ef } a \in \Omega \text{ er tvöfalt skaut.}$$

Almennt gildir að n -falt skaut má reikna með:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{(z-a)^n} dz = 2\pi i \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}, \quad \text{ef } a \in \Omega \text{ er } n\text{-falt skaut.}$$

Dæmi 3.11.1. Skoðum einfaldasta sýnidæmið. Látum $f(z) = 1$ og reiknið:

$$\int_{\partial S(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^n} dz = \int_{\partial S(a,r)} \frac{1}{(z-a)^n} dz, \quad \text{fyrir öll } n \in \mathbb{Z}.$$

Athugið að rithátturinn $\partial S(a,r)$ þýðir hringur með miðju í a og geisla r .

Lausn: Ef $n \leq 0$ þá er $k = -n \geq 0$ og þá erum við að tegra:

$$\int_{\partial S(a,r)} (z-a)^k dz = 0$$

samkvæmt Cauchy-setningunni því það er ekkert skaut og $f(z) = (z-a)^k$ er fágæð á $S(a,r)$. Ef $n = -1$ þá fæst samkvæmt Cauchy-formúlunni:

$$\int_{\partial S(a,r)} \frac{1}{(z-a)} dz = 2\pi i$$

Hinsvegar ef $n \geq 2$ þá er $(n-1)$ afleiðan $f^{(n-1)}(z) = 0$ þ.a. við fáum samkvæmt Cauchy-formúlunni að:

$$\int_{\partial S(a,r)} \frac{1}{(z-a)^n} dz = 2\pi i \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} = 0.$$

Ef að maður er ekki sáttur við þessa útleiðslu þá getum við líka stikað vegin með

$$z = \gamma(\theta) = a + re^{i\theta}, \quad \text{og þá} \quad dz = ire^{i\theta} d\theta$$

þannig að við fáum:

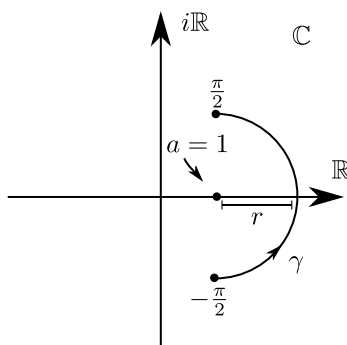
$$\int_{\partial S(a,r)} \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{ire^{i\theta}}{(re^{i\theta})^n} = \frac{i}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} d\theta e^{i(1-n)\theta} = \frac{i}{r^{n-1}} \left[\frac{1}{i(1-n)} e^{i(1-n)\theta} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

Dæmi 3.11.2. Reiknið vegheildin $\int_{\gamma} f(z) dz$ þar sem

- (a) $f(z) = \bar{z}$ og γ er hluti af hring með miðju í 1 og þegar farið er eftir hringboganum breytist hornið frá $-\frac{\pi}{2}$ til $\frac{\pi}{2}$.
- (b) $f(z) = z^2$ og γ er vegur sem stíkar beina línu frá 0 til 1 og þaðan hringboga með miðju í $1+i$ stystu leið í $2+i$.

Lausn:

- (a) Athugum fyrst að við höfum ekkert stofnfall fyrir $f(z) = \bar{z}$ svo við neyðumst til þess að stíka veginn. Teiknum upp mynd:



Látum því:

$$z = \gamma(\theta) = a + re^{i\theta}, \quad dz = ire^{i\theta} d\theta$$

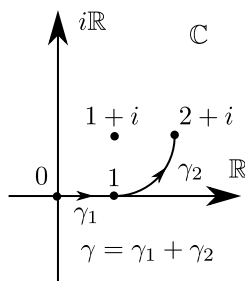
Athugum að þá er $\bar{z} = \overline{(a + re^{i\theta})} = \bar{a} + re^{-i\theta} = 1 + re^{-i\theta}$. Því fæst að:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta ire^{i\theta} (1 + re^{-i\theta}) = ir \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta (e^{i\theta} + r) = ir \left[\frac{1}{i} e^{i\theta} + r\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2ir + i\pi r^2.$$

- (b) Fallið $f(z) = z^2$ er heilt fagað fall og á sér stofnfall á $\mathbb{C}$ sem er gefið með $F(z) = \frac{1}{3}z^3$. Því er nóg að meta F í endapunktunum:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(2+i) - F(0) = \frac{1}{3}(2+i)^3 = \frac{2}{3} + i\frac{11}{3}.$$

Af varfærni er líka hægt að stíka veginn og reikna vegheildið eftir $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Teiknum því upp mynd:



Höfum þá að:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

Getum reiknað fyrra heildið með því að stika $z_1 = \gamma_1(t) = t$ fyrir $t \in [0, 1]$ þ.a. $dz = dt$ og því fæst:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Getum reiknað seinna heildið með því að stika $z_2 = \gamma_2(t) = (1+i) + e^{i\theta}$ þar sem $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ og $dz = ie^{i\theta} d\theta$. Því fæst:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} f(z)dz &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 ie^{i\theta} d\theta (1+i+e^{i\theta})^2 = i \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\theta (2ie^{i\theta} + 2(1+i)e^{2i\theta} + e^{3i\theta}) \\ &= i \left[2e^{i\theta} + \frac{1+i}{i} e^{2i\theta} + \frac{1}{3i} e^{3i\theta} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 \\ &= i \left(\left(2-i+1 + -\frac{i}{3} \right) - \left(-2i - (-i+1) + \frac{1}{3} \right) \right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{11}{3}i. \end{aligned}$$

Við ályktum því að:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i.$$

Dæmi 3.11.3. Látum $\alpha = a + ib$. Heildið $\int_0^t e^{\alpha\tau} d\tau$ og takið raunhlutann af útkomunni til að sýna að:

$$\int_0^t e^{a\tau} \cos(b\tau) d\tau = \frac{e^{at} (a \cos(bt) + b \sin(bt)) - a}{a^2 + b^2}$$

Hvaða heildi fæst ef að þverhlutinn er tekinn?

Lausn: Athugum fyrst að:

$$\int_0^t e^{\alpha\tau} d\tau = \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha\tau} \right]_0^t = \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1)$$

Við ætlum einfaldlega að taka raunhlutann af báðum hliðum jöfnunnar. Vinstri hliðina má umrita með því að athuga að:

$$e^{\alpha\tau} = e^{(a+ib)\tau} = e^{a\tau} e^{ib\tau} = e^{a\tau} (\cos(b\tau) + i \sin(b\tau)) = \underbrace{e^{a\tau} \cos(b\tau)}_{\operatorname{Re} e^{\alpha\tau}} + i \underbrace{e^{a\tau} \sin(b\tau)}_{\operatorname{Im} e^{\alpha\tau}}.$$

Þar með er:

$$\int_0^t e^{\alpha\tau} d\tau = \underbrace{\int_0^t e^{a\tau} \cos(b\tau) dt}_{\operatorname{Re} \left(\int_0^t e^{\alpha\tau} d\tau \right)} + i \underbrace{\int_0^t e^{a\tau} \sin(b\tau) dt}_{\operatorname{Im} \left(\int_0^t e^{\alpha\tau} d\tau \right)}$$

Við getum líka umritað hægri hlið jöfnunnar:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1) &= \frac{1}{a+ib} (e^{\alpha t} - 1) = \frac{a-ib}{a^2+b^2} (e^{at} \cos(bt) + i e^{at} \sin(bt) - 1) \\ &= \underbrace{\frac{1}{a^2+b^2} (a e^{at} \cos(bt) + b e^{at} \sin(bt) - a)}_{\operatorname{Re} \left(\frac{1}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1) \right)} + i \underbrace{\frac{1}{a^2+b^2} (a e^{at} \sin(bt) - b e^{at} \cos(bt) + b)}_{\operatorname{Im} \left(\frac{1}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1) \right)} \end{aligned}$$

Með því að bera saman raunhluta og þverhluta þá ályktum við að:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \left(\int_0^t e^{a\tau} d\tau \right) &= \int_0^t e^{a\tau} \cos(b\tau) d\tau = \frac{e^{at} (a \cos(bt) + b \sin(bt)) - a}{a^2 + b^2} = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1) \right), \\ \operatorname{Im} \left(\int_0^t e^{a\tau} d\tau \right) &= \int_0^t e^{a\tau} \sin(b\tau) d\tau = \frac{e^{at} (a \sin(bt) - b \cos(bt)) + b}{a^2 + b^2} = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1) \right).\end{aligned}$$

Dæmi 3.11.4. Sýnið að ef $a, b \in \mathbb{R}$ þá gildir að:

$$\begin{aligned}\int \cosh(ax) \cos(bx) dx &= \frac{b \cosh(ax) \sin(bx) + a \sinh(ax) \cos(bx)}{a^2 + b^2} + C, \\ \int \sinh(ax) \sin(bx) dx &= \frac{a \cosh(ax) \sin(bx) - b \sinh(ax) \cos(bx)}{a^2 + b^2} + C,\end{aligned}$$

Lausn: Við notum niðurstöðuna úr dæmi 3.11.3 á undan. Athugum að:

$$\sinh(ax) = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}, \quad \cosh(ax) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}.$$

Við getum líka snúið þessu við með því að leggja jöfnurnar saman. Þannig fæst að:

$$e^{ax} = \sinh(ax) + \cosh(ax), \quad e^{-ax} = \cosh(ax) - \sinh(ax)$$

Við höfum þá að (hunsum fastann C í öllum reikningunum og bætum honum við í lokin):

$$\begin{aligned}\int \cosh(ax) \cos(bx) dx &= \frac{1}{2} \int e^{ax} \cos(bx) dx + \frac{1}{2} \int e^{-ax} \cos(bx) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{ax} (a \cos(bx) + b \sin(bx)) - a}{a^2 + b^2} + \frac{e^{-ax} (-a \cos(bx) + b \sin(bx)) + a}{a^2 + b^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{a^2 + b^2} \left(\left(\cosh(ax) + \sinh(ax) \right) \left(a \cos(bx) + b \sin(bx) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\cosh(ax) - \sinh(ax) \right) \left(-a \cos(bx) + b \sin(bx) \right) \right) \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} (b \cosh(ax) \sin(bx) + a \sinh(ax) \cos(bx)).\end{aligned}$$

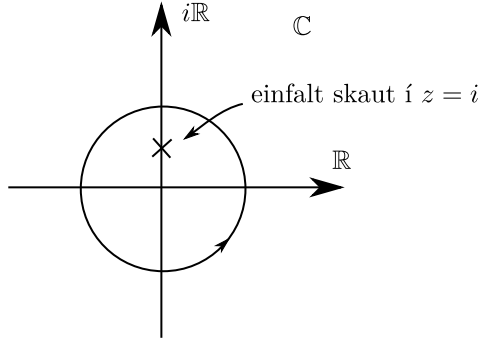
Hitt fæst sambærilega með því að nota þverhlutann.

Dæmi 3.11.5. Reiknið eftirfarandi heildi

$$(a) \int_{\partial S(0,2)} \frac{e^{z^2} \cos z}{z-i} dz, \quad (b) \int_{\partial S(1,2)} \frac{z}{z^2 - 5z + 4} dz, \quad (c) \int_{\partial S(i, \frac{1}{2})} \frac{\text{Log } z}{(z-i)^2} dz, \quad (d) \int_{\partial S(0,2)} \frac{z^2 + z + 1}{z^2 - 1} dz.$$

Lausn:

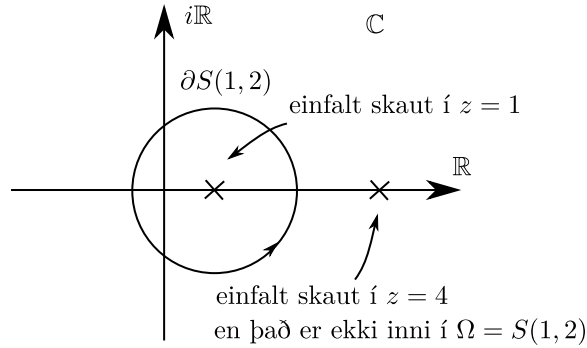
(a) Teiknum upp mynd:



Fallið hefur einfalt skaut í $z = i$ þ.a. Cauchy-formúlan fyrir einfalt skaut gefur með $f(z) = e^{z^2} \cos z$

$$\int_{\partial S(0,2)} \frac{e^{z^2} \cos z}{z-i} dz = 2\pi i f(i) = 2\pi i \left(e^{(i)^2} \cos(i) \right) = 2\pi i e^{-1} \left(\frac{e^{i^2} + e^{-i^2}}{2} \right) = \pi i \left(1 + \frac{1}{e^2} \right).$$

(b) Teiknum upp mynd:



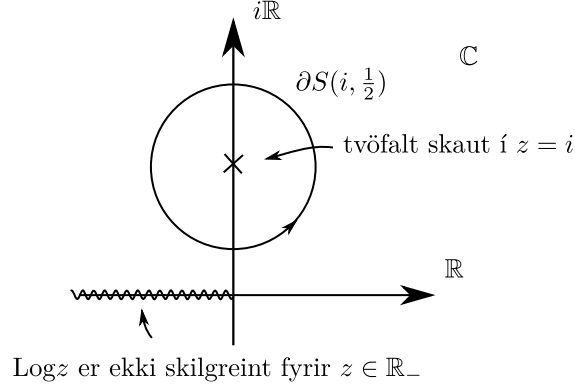
Við skulum fyrst athuga að með því að þátta nefnarann fæst:

$$\int_{\partial S(1,2)} \frac{z}{z^2 - 5z + 4} dz = \int_{\partial S(1,2)} \frac{z}{(z-1)(z-4)} dz$$

En þar með er $z = 1$ eina skautið sem liggur innan í $\Omega = S(1,2)$. Látum því $f(z) = \frac{z}{z-4} \in \mathcal{O}(\Omega)$ þ.a.

$$\int_{\partial S(1,2)} \frac{z}{z^2 - 5z + 4} dz = 2\pi f(1) = 2\pi i \frac{1}{1-4} = -\frac{2\pi i}{3}.$$

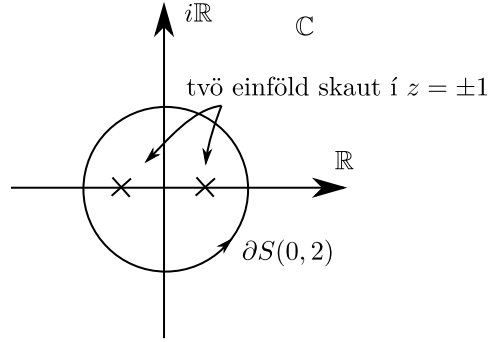
(c) Teiknum upp mynd:



Höfum tvöfalt skaut í $z = i$ þ.a. þar sem $f(z) = \text{Log } z$ þá athugum við að $f'(z) = \frac{1}{z}$ og því fæst að:

$$\int_{\partial S(i, \frac{1}{2})} \frac{\text{Log } z}{(z - i)^2} dz = 2\pi i \frac{f'(i)}{1!} = 2\pi i f'(i) = 2\pi i \left(\frac{1}{i} \right) = 2\pi.$$

(d) Teiknum upp mynd:



Höfum tvö skaut inni í $\Omega = S(0, 2)$ í $z = \pm 1$ þannig að við fáum:

$$\int_{\partial S(0, 2)} \frac{z^2 + z + 1}{z^2 - 1} dz = \int_{\partial S(0, 2)} \frac{z^2 + z + 1}{(z - 1)(z + 1)} dz = 2\pi i (f(1) + g(-1)) = 2\pi i \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) = 2\pi i.$$

þar sem að:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^2 + z + 1}{z + 1}, & \text{þ.a.} & & f(1) &= \frac{1^2 + 1 + 1}{1 + 1} = \frac{3}{2}, \\ g(z) &= \frac{z^2 + z + 1}{z - 1}, & \text{þ.a.} & & g(-1) &= \frac{(-1)^2 - 1 + 1}{-1 - 1} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dæmi 3.11.6. Látum $\gamma = \partial S(0, R)$ tákna hringinn með miðju í 0 og geisla R . Sýnið að:

$$(a) \quad \int_{\partial S(0, R)} \left| \frac{e^{iz}}{z} \right| |dz| \leq 2\pi e^R, \quad (b) \quad \int_{\partial S(0, R)} \left| \frac{\sinh(z)}{z^2} \right| |dz| \leq \frac{2\pi \cosh R}{R}$$

Lausn:

(a) Við athugum að:

$$\int_{\gamma} \left| \frac{e^{iz}}{z} \right| |dz| \leq L(\gamma) \cdot \max_{z \in \gamma} \left| \frac{e^{iz}}{z} \right| \leq 2\pi R \frac{\max_{z \in \gamma} |e^{iz}|}{\min_{z \in \gamma} |z|} = 2\pi R \frac{\max_{z \in \gamma} (e^{-\operatorname{Im} z})}{R} = 2\pi e^R.$$

Því fallið $e^{-\operatorname{Im}(z)}$ tekur hágildið sitt í $z = -iR \in \gamma$ og um alla punkta $z \in \gamma$ gildir að $|z| = |Re^{i\theta}| = R$.

Við getum auðveldlega metið þetta tegur með Cauchy-formúlunni fyrir einfalt skaut í $z = 0$ fyrir $f(z) = e^{iz}$ sem hefur $f(0) = e^0 = 1$. Fáum því að:

$$\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i.$$

(b) Með sama hætti athugum við að:

$$\int_{\gamma} \left| \frac{\sinh(z)}{z^2} \right| |dz| \leq L(\gamma) \max_{z \in \gamma} \left| \frac{\sinh(z)}{z^2} \right| \leq 2\pi R \frac{\max_{z \in \gamma} |\sinh(z)|}{\min_{z \in \gamma} |z|^2} \leq \frac{2\pi}{R} \max_{z \in \gamma} \left| \frac{e^z - e^{-z}}{2} \right|$$

Þar sem í síðasta skrefinu notuðum við að $|z| = R$ fyrir öll $z \in \gamma$ ásamt því að nota skilgreininguna á $\sinh(z)$. Með því að nota þríhyrningsójöfnuna fáum við því að:

$$\frac{2\pi}{R} \max_{z \in \gamma} \left| \frac{e^z - e^{-z}}{2} \right| \leq \frac{2\pi}{R} \max_{z \in \gamma} \frac{|e^z| + |e^{-z}|}{2} = \frac{2\pi}{R} \max_{z \in \gamma} \frac{e^{\operatorname{Re} z} + e^{-\operatorname{Re} z}}{2} = \frac{2\pi}{R} \max_{z \in \gamma} \cosh(\operatorname{Re}(z)) = \frac{2\pi}{R} \cosh(R).$$

Við getum líka metið þetta tegur með Cauchy-formúlunni fyrir tvöfalt skaut í $z = 0$ fyrir $f(z) = \sinh(z)$ með $f'(z) = \cosh(z)$ og $f'(0) = 1$ þannig að:

$$\int_{\gamma} \frac{\sinh(z)}{z^2} dz = 2\pi i f'(0) = 2\pi i.$$

Dæmi 3.11.7. Látum f vera samfelld í grennd um $\alpha \in \mathbb{C}$ sem uppfyllir:

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha)f(z) = A$$

Látum γ_r tákna hringbogann $\gamma_r(t) = \alpha + re^{it}$ fyrir $t \in [a, b]$. Sýnið að:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = iA(b - a).$$

Lausn: Látum $z = \gamma_r(t) = \alpha + re^{it}$ þ.a. $dz = ire^{it} dt$. Þar með höfum við að:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \int_a^b f(\alpha + re^{it}) ire^{it} dt &= i \int_a^b \left(\lim_{r \rightarrow 0} re^{it} f(\alpha + re^{it}) \right) dt \\ &= i \int_a^b \left(\lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha) f(z) \right) dt \\ &= i \int_a^b A dt = iA(b - a). \end{aligned}$$

Dæmi 3.11.8. Beitið Cauchy-formúlunni til að reikna:

$$(a) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1+a^2-2a\cos\theta}, \quad \text{fyrir } -1 < a < 1, \quad (b) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\theta}{5+4\sin\theta} d\theta$$

Lausn: Í báðum þessum dæmum erum við að heilda yfir hring svo það er tilvalið að beita Cauchy-formúlunni. Til þess athugum við að ef við stikum hringinn með $z = e^{i\theta}$ þá er $dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta$. Þar að auki er:

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2zi}, \\ \cos\theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}. \end{aligned}$$

(a) Fáum þar með að:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1+a^2-2a\cos\theta} = \int_{\partial S(0,1)} \frac{\frac{dz}{iz}}{1+a^2-2a\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)} = \frac{1}{i} \int_{\partial S(0,1)} \frac{dz}{(1+a^2)z - a(z^2+1)} = \frac{i}{a} \int_{\partial S(0,1)} \frac{dz}{z^2 - \left(\frac{1}{a} + a\right)z + 1}.$$

Athugum að ræturnar eru í:

$$w = \frac{\frac{1}{a} + a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{a} + a\right)^2 - 4}}{2} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{a} + a\right) \pm \left(\frac{1}{a} - a\right) \right) = \begin{cases} \frac{1}{a} \\ a \end{cases}$$

En þar sem $-1 < a < 1$ þá liggur $w = \frac{1}{a}$ fyrir utan einingarringinn. Því fæst samkvæmt Cauchy-formúlunni að:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1+a^2-2a\cos\theta} = \frac{i}{a} \int_{\partial S(0,1)} \frac{dz}{(z-a)(z-\frac{1}{a})} = \frac{i}{a} \cdot 2\pi i f(a) = -\frac{2\pi}{a} \frac{1}{a-\frac{1}{a}} = \frac{2\pi}{1-a^2}.$$

(b) Fáum þá að:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\theta}{5+4\sin\theta} d\theta = \int_{\partial S(0,1)} \frac{\left(\frac{z^2-1}{2zi}\right)^2}{5+4\left(\frac{z^2-1}{2zi}\right)} \frac{dz}{iz} = -\frac{1}{2} \int_{\partial S(0,1)} \frac{(z^2-1)^2}{z^2(10iz+4z^2-4)} dz = -\frac{1}{8} \int_{\partial S(0,1)} \frac{(z^2-1)^2}{z^2(z+2i)(z+\frac{1}{2}i)} dz$$

Höfum þar með tvöfalt skaut í $z = 0$ og einfalt skaut í $z = -\frac{1}{2}i$. Því verður:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\theta}{5+4\sin\theta} d\theta = -\frac{1}{8} \cdot 2\pi i \left(f'(0) + g\left(-\frac{1}{2}i\right) \right) = -\frac{\pi i}{4} \left(-\frac{5}{2}i + \frac{25i}{6} \right) = \frac{5\pi}{12}.$$

þar sem að:

$$g(z) = \frac{(z^2-1)^2}{z^2(z+2i)}, \quad \text{þannig að} \quad g\left(-\frac{1}{2}i\right) = \frac{\left(\left(-\frac{i}{2}\right)^2 - 1\right)^2}{\left(-\frac{i}{2}\right)^2 \left(-\frac{i}{2} + 2i\right)} = \frac{\frac{25}{16}}{-\frac{1}{4} \cdot \frac{3i}{2}} = \frac{25i}{6}.$$

$$f(z) = \frac{(z^2-1)^2}{(z+2i)(z+\frac{1}{2}i)} = \frac{(z^2-1)^2}{z^2 + \frac{5}{2}iz - 1},$$

En við þurfum að meta afleiðuna:

$$f'(z) = \frac{2(z^2 - 1)2z(z^2 + \frac{5}{2}iz - 1) - (2z + \frac{5}{2}i)(z^2 - 1)^2}{(z + 2i)^2(z + \frac{1}{2}i)^2}, \quad \text{þ.a.} \quad f'(0) = \frac{0 - \frac{5}{2}i}{(-4)(-\frac{1}{4})} = -\frac{5}{2}i.$$

Það er líka til einfaldari leið til þess að reikna svona afleiður. Athugum að:

$$\ln(f(z)) = 2 \ln(z^2 - 1) - \ln(z + 2i) - \ln\left(z + \frac{1}{2}i\right)$$

Diffurum báðar hliðar:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{4z}{z^2 - 1} - \frac{1}{z + 2i} - \frac{1}{z + \frac{1}{2}i}$$

Færum síðan yfir og fáum:

$$f'(z) = f(z) \left(\frac{4z}{z^2 - 1} - \frac{1}{z + 2i} - \frac{1}{z + \frac{1}{2}i} \right)$$

Athugum að $f(0) = -1$ þannig að við fáum auðveldlega að:

$$f'(0) = -1 \left(0 - \frac{1}{2i} - \frac{2}{i} \right) = -\frac{5}{2}i.$$

Dæmi 3.11.11. Látum $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ þ.a. $|f(z)| \leq A + B|z|^C$ þar sem $A, B, C \geq 0$. Sýnið að f sé margliða af stigi $\leq C$.

Lausn: Þar sem að $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ má rita það sem veldaröð (t.d. með miðju í 0) sem er þá gefin með:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

En stuðlar veldaraðarinnar ákvarðast ótvírætt af afleiðum fallsins f í miðpunkti veldaraðarinnar. Nefnilega:

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k k! z^k \implies f^{(n)}(0) = a_n n! \implies a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Því einunigs fyrsti liðurinn lifir af þegar við metum í miðpunkti veldaraðarinnar í $z = 0$. En við getum þar með borið þetta saman við Cauchy-formúluna fyrir afleiður:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi.$$

Verkefnið er því jafngilt því að sýna að $|a_n| = 0$ fyrir öll $n > \lfloor C \rfloor$. Látum því γ tákna hring með geisla r og miðju í 0 til þess að stika ferilinn okkar og fáum:

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} L(\gamma) \max_{\xi \in \gamma} \left| \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{r^n} \max_{\xi \in \gamma} |A + B|\xi|^C| \leq \frac{1}{r^n} (A + Br^C) = \frac{A}{r^n} + \frac{B}{r^{n-C}} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

Ef $n > C$. Þar með er síðasti liður veldaraðarinnar $a_{\lfloor C \rfloor}$ og þar með er f margliða af stigi $\lfloor C \rfloor \leq C$.

Dæmi 3.11.12. Látum $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ vera fall sem uppfyllir $|f(z)| \leq Me^{c|z|}$, fyrir öll $z \in \mathbb{C}$. Sýnið að $|f'(z)| \leq ceMe^{c|z|}$.

Lausn: Látum $\gamma(t) = z + re^{it}$ stika $\partial S(z, r)$. Fáum samkvæmt Cauchy-formúlunni fyrir afleiður að:

$$|f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S(z, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial S(z, r)} \left| \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} \right| |d\xi| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \max_{\xi \in \gamma} \left| \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} \right| = r \frac{\max_{\xi \in \gamma} |f(\xi)|}{\min_{\xi \in \gamma} |(\xi - z)^2|}$$

En með þessari stikun fæst því að $\xi - z = re^{i\theta}$ og því er $|(\xi - z)^2| = r^2$ fyrir öll $z \in \gamma$ (og þar með lágildi). Notum síðan fyrir efri hlutann forsenduna sem var gefin í dæminu $|f(\xi)| \leq Me^{c|\xi|}$ og höfum þar með sýnt:

$$|f'(z)| \leq r \frac{\max_{\xi \in \gamma} |Me^{c|\xi|}|}{r^2} = \frac{M}{r} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} e^{c|z + re^{i\theta}|} \leq \frac{M}{r} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} e^{c|z| + c|re^{i\theta}|} = \frac{M}{r} e^{c|z|} e^{cr}$$

Þessi niðurstaða gildir fyrir alla geisla $r > 0$. Besta matið fæst því með því að lágmarka stærðina með tilliti til r . Þannig við athugum að ef

$$h(r) = \frac{1}{r} e^{cr}, \quad \text{þá er afleiðan} \quad h'(r) = -\frac{1}{r^2} e^{cr} + \frac{c}{r} e^{cr} = 0 \implies r = \frac{1}{c}$$

Þannig að $r = \frac{1}{c}$ mun gefa okkur besta (minnsta) matið. En þar er eimitt:

$$|f'(z)| \leq ceMe^{c|z|}.$$

Dæmi 3.11.13. Látum $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ vera heilt fágað fall. Gerum ráð fyrir að $\operatorname{Re} f(z) \leq M$ fyrir öll $z \in \mathbb{C}$. Notið setningu Liouville til að sýna að þá sé f fastafall.

Sönnun: Rifjum upp setningu Liouville:

(Setning Liouville) Látum $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ og gerum ráð fyrir að f sé takmarkað. Þá er f fasti.

Okkur nægir því að sýna að f sé takmarkað. Samkvæmt forsendu er $\operatorname{Re} f(z) \leq M$. Þurfum hinsvegar að sýna að $|f(z)| \leq K$ fyrir eitthvað K . Athugum því að $f(z) = \operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z)$ en við höfum enga leið hér til þess að meta $\operatorname{Im} f(z)$. Skoðum því í staðinn fallið $e^{f(z)} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Athugum að það uppfyllir setningu Liouville því:

$$\left| e^{f(z)} \right| = \left| e^{\operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z)} \right| = e^{\operatorname{Re} f(z)} \leq e^M = K$$

En þar með er fallið $e^{f(z)}$ fastafall samkvæmt setningu Liouville! En þar með er $f(z)$ einnig fastafall.

Dæmi 17 Fourier-ummyndun fallsins $f(x)$ er táknud með $\hat{f}(k)$ og er skilgreind þannig að:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

Sýnið að ef $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ þá sé $\hat{f}(k) = e^{-\frac{k^2}{2}}$.

Lausn: Einfalda leiðin er að fylla í ferninginn. Athugum að:

$$f(x) e^{-ikx} = e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-ikx} = e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2ikx)} = e^{-\frac{1}{2}((x+ik)^2 + k^2)} = e^{-\frac{1}{2}k^2} e^{-\frac{1}{2}(x+ik)^2}.$$

Því fæst einfaldlega að:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+ik)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = e^{-\frac{1}{2}k^2}.$$

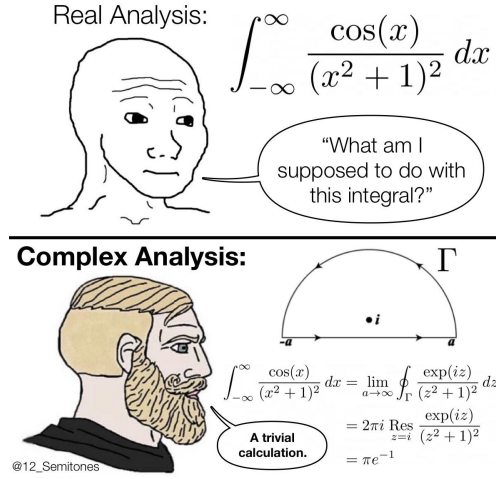
Þar sem að í næst síðustu línunni notuðum við innsetninguna $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + ik)$, $dy = \frac{1}{\sqrt{2}}dx$ og í síðustu línunni notuðum við að jöfnu Kelvins:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Lord Kelvin á að hafa mælt eftirfarandi fleygu orð við nemendur sína um þessa jöfnu:

“A mathematician is one to whom that is as obvious as that twice two makes four is to you.”

Ég sá þetta jarm og hélt að það yrði betra að taka það heldur en réttthyrninginn í dæmi 17.



Bónusdæmi: Sýnið að:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{e}.$$

Lausn: Þetta er aðeins erfiðara heldur en það sem að ég sýndi í dæmatímanum. En hugmyndin er sú sama. Það er kannski mikilvægt að benda fyrst á villuna sem ég gerði í dæmatímanum en við getum ekki notað:

$$\frac{\cos(x)}{(x^2+1)^2} \rightarrow \frac{\cos(z)}{(z^2+1)^2}$$

Því það mun springa á kraganum þegar við látum $r \rightarrow \infty$ fyrir hálfhringinn. Til að lagfæra þetta þá notar fólk í staðinn að:

$$e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{ix-y} = e^{-y} e^{ix} = e^{-y} (\cos(x) + i \sin(x)) = e^{-y} \cos(x) + i e^{-y} \sin(x)$$

Þannig að þegar $y = 0$ á rauntalnaásnum þá getum við skipt út e^{iz} með $\cos(x)$. Sjáum síðan af þverhlutanum að við getum skipt út $-ie^{iz}$ fyrir $\sin(x)$. Af þessu sést líka hvers vegna við veljum efra hálfplanið, því þar er $e^{-y} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0$. Það er líka hægt að nota neðra hálfplanið en þá myndum við vilja skipta út fyrir e^{-iz} .

Þetta útskýrir líka hvers vegna það er slæmt að velja $\cos(z)$ því þá höfum við bæði e^{-iz} og e^{iz} á sama tíma því $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ þ.a. þetta springur bæði í efra hálfplaninu þegar þverhlutinn $y \rightarrow +\infty$ og í neðra hálfplaninu þegar $y \rightarrow -\infty$. Að þessari ónaðsýnlegu langloku lokinni þá athugum við að:

$$\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} dz = \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{(z+i)^2(z-i)^2} dz = 2\pi i f'(i) = \frac{\pi}{e}$$

þar sem að við skilgreindum:

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z+i)^2}, \quad f'(z) = \frac{ie^{iz}(z+i)^2 - 2(z+i)e^{iz}}{(z+i)^4}, \quad f'(i) = -\frac{i}{2e}.$$

En við þurfum samt að færa rök fyrir því að tegrið yfir kragann sé að stefna á núll. En það fæst núna með því að athuga að ef γ_2 táknar hálfhringinn með geisla r í efra hálfplaninu þá er:

$$\int_{\gamma_2} \left| \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} \right| |dz| \leq L(\gamma_2) \max_{z \in \gamma_2} \left| \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} \right| = \frac{\pi r}{(r^2+1)^2} \max_{z \in \gamma_2} e^{-\operatorname{Im} z} = \frac{\pi r}{(r^2+1)^2} e^{-r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$