Landskeppni í eðlifræði 2020

Forkeppni - Lausnir

Fyrri hluti

1. Kubbur með massann 10 kg liggur kyrr á láréttum fleti. Krafti í lóðrétta stefnu upp á við af stærð 40 N er beitt á kubbinn. Hver er þyngd kubbsins?

   Lausn: Þyngd hlutar er sá kraftur sem verkar á hlut af völdum þyngdarsviðs. Þyngd kubbsins er því:
   $$W = 10 \cdot 9{,}8 = 98\,\mathrm{N}.$$

2. Hversu stór er heildarkrafturinn sem verkar á kubbinn í dæmi 1?

   Lausn: Kubburinn er kyrrstæður og hefur því enga hröðun. Heildarkrafturinn sem verkar á hann er því $0\,\mathrm{N}$.

3. Samúel og Fanney æfa hlaup á $400\,\mathrm{m}$ hringlaga hlaupabraut. Hraði Samúels er $4{,}0\,\mathrm{m/s}$ en hraði Fanneyjar er $4{,}5\,\mathrm{m/s}$. Ef þau byrja að hlaupa á sama stað, hve marga hringi þarf Fanney að hlaupa til að hringa Samúel (þ.e. hlaupa heilum hring lengra en Samúel)?

   Lausn 1: Hlutfall hraðanna er
   $$\frac{4{,}5}{4{,}0} = \frac{9}{8}$$
   þ.a. fyrir hverja átta hringi sem Samúel hringi hleypur Fanney 9. Eftir 9 hringi er því Fanney búin að hringa Samúel.

   Lausn 2: Hve langt Samúel og Fanney hafa hlaupið má lýsa sem falli af tíma t með
   $$x_S(t) = 4{,}0t$$
   $$x_F(t) = 4{,}5t.$$
   Þegar Fanney hefur hringað Samúel hefur hún hlaupið $L = 400\,\mathrm{m}$ lengra en hann. Fáum að
   $$x_F(t) - x_S(t) = L \Rightarrow 0{,}5t = L \Rightarrow t = \frac{L}{0{,}5} = 800\,\mathrm{s}$$
   þ.e. hún nær honum eftir $t = 400\,\mathrm{s}$ og hefur þá hlaupið $x_F(400) = 3600\,\mathrm{m}$ sem svarar til níu $400\,\mathrm{m}$ hringa.

4. Starfsmenn Laugardalslaugar hanna $20\,\mathrm{m}$ háa núningslausa rennibraut með það að leiðarljósi að sundlaugagestir nái sem mestum hraða þegar þeir lenda í sundlauginni. Hver á halli rennibrautarinnar að vera?

   Lausn: Þar sem rennibrautin er núningslaus breytist öll stöðuorka sundalaugagesta í hreyfiorku þegar þeir renna sér niður rennibrautina. Hraði sundlaugagesta þegar þeir lenda í sundalauginni er því óháður halla rennibrautarinnar.

5. Harry Potter flýgur á kústinum sínum lárétt yfir jörðinni á hraðanum $25\,\mathrm{m/s}$ í $50\,\mathrm{m}$ hæð þegar hann missir skólatöskuna sína. Ef loftmótstaða er hundsuð, hver verður fjarlægðin milli Harry og skólatöskunnar þegar hún lendir á jörðinni ef Harry breytir hvorki um hraða né stefnu?

Lausn: Láréttur hraði töskunnar er sá sami og láréttur hraði Harry þar til hún lendir á jörðinni. Fjarlægðin milli töskunnar og Harry þá er því hæð hans yfir jörðinni þ.e. $50\,\mathrm{m}$.

6. Á hlut A verkar kraftur F_A og á hlut B verkar kraftur F_B. Hlutur B hefur tvöfalt meiri massa en hlutur A og hröðun hlutar B er helmingi minni en hlutar A. Hvert af eftirtöldu er rétt fullyrðing um kraftana F_A og F_B?

Lausn: Gerum ráð fyrir að hlutur A hafi massa m_A og hröðun a_A og að hlutur B hafi massa m_B og hröðun a_B. Samkvæmt upplýsingunum í dæminu gildir

$$m_B = 2m_A$$
$$a_B = \frac{1}{2}a_A$$

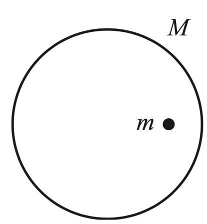
svo

$$F_B = m_B \cdot a_B = 2m_A \cdot \frac{1}{2}a_A = m_A \cdot a_A = F_A \quad \text{þ.e.} \quad F_B = F_A.$$

7. Sigrún á jeppa á dekkjum sem eru 22 tommur í þvermál. Dag einn ákveður hún að breyta bílnum og setja undir hann dekk sem eru 25 tommur í þvermál. Hraðamælir bílsins er þó óbreyttur, mælir hraða út frá fjölda snúninga dekkjanna á tímaeiningu, en miðar við upphaflegu dekkin. Dag einn eftir breytinguna fer Sigrún í bíltúr út á land þar sem hámarkshraði er $90\,\mathrm{km/klst}$. Ef hraðamælir Sigrúnar sýnir nú að bíllinn sé á $90\,\mathrm{km/klst}$, hver er raunverulegur hraði bílsins?

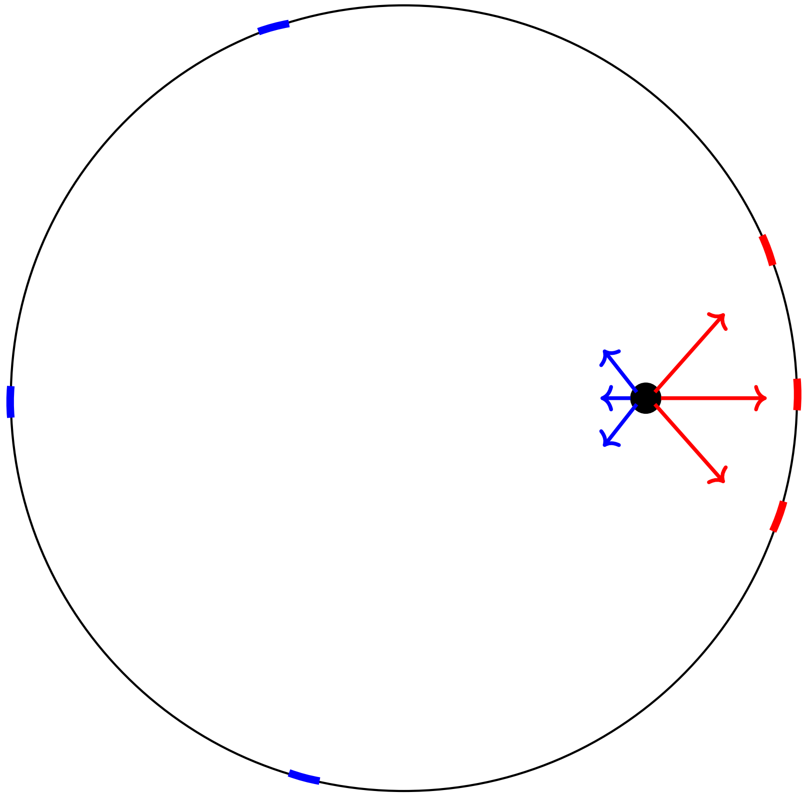
Lausn Þar sem ummál dekkjanna er í réttu hlutfalli við þvermál þeirra fæst að hraði Sigrúnar er

$$v = \frac{25}{22} \cdot 90\,\mathrm{km/klst} = 102\,\mathrm{km/klst}.$$



8. Massi m er staðsettur innan í einsleitum hring með massa M eins og sýnt er á myndinni að ofan. Í hvaða stefnu er þyngdarkrafturinn sem verkar á m vegna hringsins?

Þar sem þyngdarkrafturinn er í öfugu hlutfalli við fjarlægð milli tveggja massa í öðru veldi toga þeir hlutar gjarðarinnar sem eru nær massanum inni í henni fastar en þeir sem fjær eru (sjá mynd). Af samhverfuástæðum er ljóst að heildarkrafturinn verkar til hægri.



Mynd 1: Þyngdarkrafturinn frá mismunandi hlutum gjarðarinnar

9. Hildur Guðnadóttir vill mæla eðlismassa Óskarsverðlaunastyttunnar sinnar, en samkvæmt opinberum upplýsingum er hún að mestu leyti úr bronsi. Hildur veit að massi styttunnar í tómarúmi er 3830 g en hún mælir massa hennar ofan í vatni sem 3400 g. Hver er eðlismassi styttunnar? Eðlismassi vatns er 1,0 g/cm^3.

   Lausn: Lögmál Arkímedesar segir að þyngd vatnsins sem styttan ryður frá sér sé jöfn mismuninum á þyngd styttunnar í tómarúmi og ofan í vatninu þ.e.

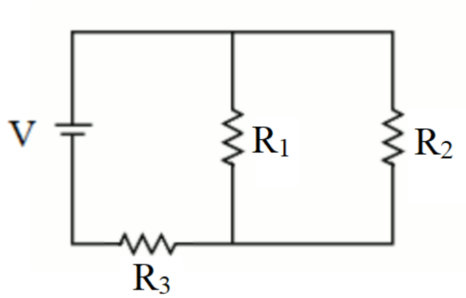
$$(3{,}830 - 3{,}400) \cdot g = m_{\text{vatn}} \cdot g = \rho_{\text{vatn}} \cdot V_{\text{stytta}} \cdot g$$

   þ.a.

$$V_{\text{stytta}} = \frac{0{,}430\,\text{kg}}{\rho_{\text{vatn}}} = \frac{430\,\text{g}}{1{,}0\,\text{g/cm}^3} = 430\,\text{cm}^3$$

   Eðlismassi styttunnar er því

$$\rho_{\text{stytta}} = \frac{3830\,\text{g}}{430\,\text{cm}^3} = 8{,}9\,\text{g/cm}^3.$$



10. Í rásinni hér að ofan hefur rafhlaðan spennu $V = 10{,}0\,\text{V}$ og viðnámin eru $R_1 = 2{,}0\,\Omega$, $R_2 = 2{,}0\,\Omega$ og $R_3 = 1{,}0\,\Omega$. Hver er straumurinn um rafhlöðuna?

Lausn: Heildarviðnám rásarinnar er

$$R = R_3 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} = 2\,\Omega$$

svo straumurinn um rafhlöðuna er

$$I = \frac{V}{R} = 5\,\mathrm{A}.$$

11. Bolta er sleppt úr kyrrstöðu. Hann fellur vegalengd h fyrstu sekúnduna eftir að honum er sleppt. Hversu langt mun hann falla sekúnduna eftir það?

Lausn: Látum $y(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ vera lóðrétta stöðu boltans sem fall af tíma. Við vitum að

$$y(1) = -\frac{1}{2} \cdot g = h$$

Vegalengdin sem boltinn fellur frá $1\,\mathrm{s}$ til $2\,\mathrm{s}$ er

$$y(2) - y(1) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot 2^2 - h = 4h - h = 3h.$$

12. Dæmigert mannsauga getur greint ljós sem hefur bylgjulengd frá $340\,\mathrm{nm}$ upp í $740\,\mathrm{nm}$. Orka ljóseindar með bylgjulengd λ er gefin með:

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

þar sem h er fasti sem nefnist fasti Plancks og c táknar hraða ljósins. Hver er SI-einingin á fasta Plancks?

Lausn: Fáum að

$$[h] = [E][\lambda][c]^{-1} = \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \cdot \mathrm{m} \cdot \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}} = \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}.$$

13. Erla býr sér til heitt súkkulaði á köldum vetrardegi. Henni nægir að drekka $150\,\mathrm{mL}$ af heitu súkkulaði sem hún hitar á hellu og $21{,}5\,\mathrm{kJ}$ fara í það að hita drykkinn. Í upphafi var hitastig drykkjarins $5\,°\mathrm{C}$ en Erla hitar hann upp í $40\,°\mathrm{C}$. Eðlisvarmi drykkjarins er $3{,}9\,\mathrm{kJ/(kg\,K)}$. Hver er eðlismassi heits súkkulaðis?

Lausn: Hér er $Q = 21{,}5\,\mathrm{kJ}$, $c = 3{,}9\,\mathrm{kJ/(kg\,K)}$ og $\Delta T = 35\,°\mathrm{C}$ svo við finnum massa súkkulaðisins með

$$m = \frac{Q}{c \cdot \Delta T} = 0{,}158\,\mathrm{kg}.$$

Eðlismassa heits skúkkulaðis má því finna út frá rúmmáli drykkjar Erlu

$$V = 150\,\mathrm{mL} = 1{,}50 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^3$$

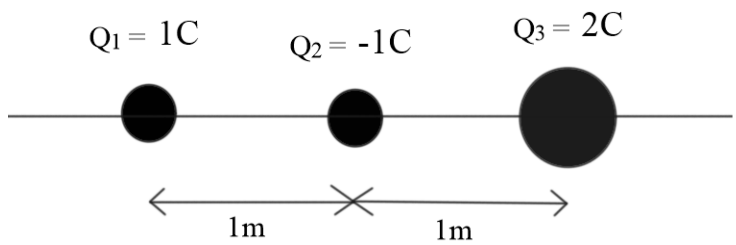
með

$$\rho = \frac{m}{V} = 1050\,\mathrm{kg/m}^3.$$

14. Atli og Reynir æfa listdans á skautum. Massi Atla er 68 kg en massi Reynis 82 kg. Í upphafi skautasýningar standa þeir hreyfingarlausir á núningslausum ísnum þar til Atli ýtir Reyni frá sér með 17 N krafti. Hver verður hröðun Atla?

Lausn: Þar sem Atli ýtir Reyni frá sér með 17 N krafti gildir samkvæmt þriðja lögmáli Newton að jafn stór gagnkraftur verkar á Atla svo hröðun hans verður

$$a = \frac{17\,\mathrm{N}}{68\,\mathrm{kg}} = 0{,}25\,\mathrm{m/s^2}.$$

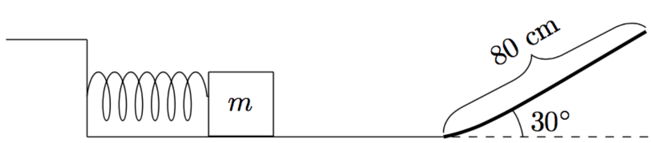


15. Þrjár hleðslur sitja í röð eins og á mynd hér að ofan. $Q_1 = 1\,\mathrm{C}$, $Q_2 = -1\,\mathrm{C}$ og $Q_3 = 2\,\mathrm{C}$. Fjarlægðirnar eru eins og á mynd. Í hvaða stefnu er heildarkrafturinn sem verkar á Q_1?

Lausn: Ef við hugsum okkur að línan í gegnum hleðslurnar á myndinni sé samsíða x-ás fæst að heildarkrafturinn á Q_1 fæst með

$$\mathbf{F} = -k\frac{Q_1Q_2}{1^2} - k\frac{Q_1Q_3}{2^2} = (k - \frac{1}{2}k) = \frac{1}{2}k \ \left(\mathrm{C^2/m}\right)$$

svo heildarkrafturinn er til hægri.



16. Kassi með massa $m = 0{,}1\,\mathrm{kg}$ situr á núningslausri braut. Honum er ýtt upp við gorm, með gormstuðul $k = 1{,}8\,\mathrm{N/m}$, þ.a. gormurinn sé 70 cm frá jafnvægisstöðu. Síðan er kassanum sleppt og hann rennur upp eftir 80 cm löngum rampi sem myndar 30° horn við lárétt. Hve langt eftir rampinum ferðast kassinn áður en hann stoppar?

Lausn: Þar sem brautin er núningslaus stoppar kassinn ekki fyrr en stöðuorku hins strekkta gorms verður breytt yfir í þyngdarstöðuorku kassans. Hann mun því ná hæð h sem uppfyllir

$$\frac{1}{2}kx^2 = mgh$$

þar sem $x = 0{,}7\,\mathrm{m}$. Við fáum að

$$h = \frac{kx^2}{2mg} = 0{,}45\,\mathrm{m}$$

Vegalengdin upp rampinn sem kassinn ferðast áður en hann stoppar er því

$$L = \frac{h}{\sin\theta} = 0{,}9\,\mathrm{m}.$$

En rampurinn er eingöngu 0,8 m að lengd svo kassinn flýgur fram af honum.

17. Alþjóðlega geimstöðin er á hringlaga braut umhverfis jörðina 409 km frá yfirborði jarðar. Umferðartími hennar er 93 mínútur. Hubble geimsjónaukinn er einnig á hringlaga braut umhverfis jörðina með umferðartíma 96 mínútur. Hve langt frá yfirborði jarðar er Hubble geimsjónaukinn?

Lausn: Þriðja lögmál Keplers gefur að

$$\frac{T_A^2}{R_A^3} = \frac{T_H^2}{R_H^3} \quad \text{þ.e.} \quad R_H = \left(\frac{R_A^3 \cdot T_H^2}{T_A^2} \right)^{1/3}$$

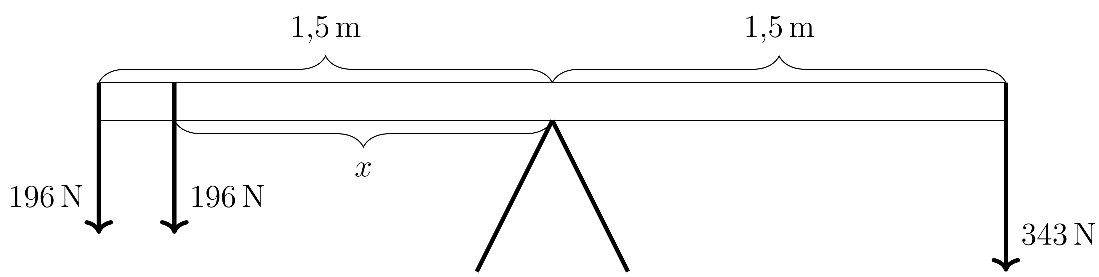
þar sem R_H og R_A eru geislar brautanna miðað við miðju jarðar og T_H og T_A eru umferðartímar Hubble sjónaukans og Alþjóðlegu geimstöðvarinnar. Fáum að

$$R_H = \left(\frac{(409 \cdot 10^3 + 6{,}371 \cdot 10^6)^3 \cdot (96 \cdot 60)^2}{(93 \cdot 60)^2} \right)^{1/3} = 6{,}925 \cdot 10^6 \,\mathrm{m}$$

svo hæð Hubble sjónaukans yfir yfirborði jarðar er

$$H = R_H - R_\oplus = 5{,}54 \cdot 10^5 \,\mathrm{m} = 554 \,\mathrm{km}.$$

18. Hildur, Gunnar og Gylfi eru að vega salt. Vegasaltið hefur lengd 3 m og snúningspunktur þess er í miðjunni. Massi vegasaltsins er jafndreifður. Gunnar hefur massa 35 kg og Gylfi og Hildur hafa hvort um sig 20 kg massa. Gunnar og Gylfi sitja á sitthvorum enda vegasaltsins. Hve langt frá miðju vegasaltsins situr Hildur ef vegasaltið er lárétt og í jafnvægi og enginn krakkanna snertir jörðina?



Mynd 2

Lausn: Ef vegasaltið er lárétt og í jafnvægi er heildarkraftvægið sem verkar á það 0 N · m og um fjarlægðina x frá snúningspunktinum (sjá mynd) gildir

$$1{,}5 \cdot 196 + x \cdot 196 - 1{,}5 \cdot 343 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1{,}5 \cdot 343 - 1{,}5 \cdot 196}{196} = 1{,}1 \,\mathrm{m}.$$

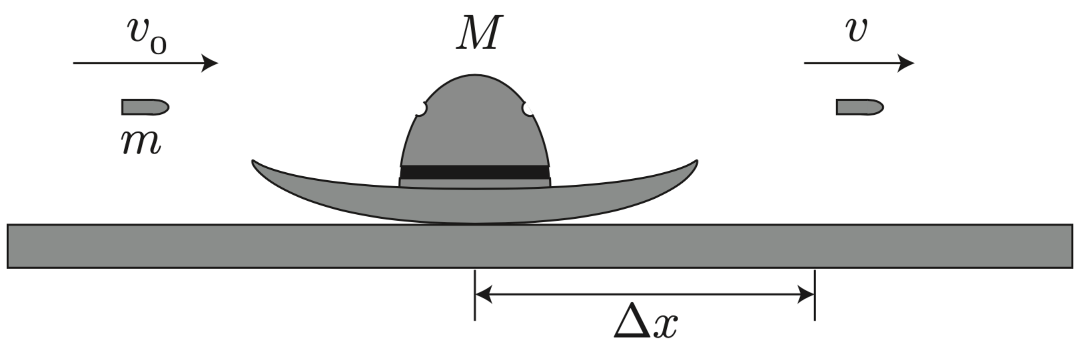
19. Í sumum tilvikum getur járnkjarni sólstjörnu hrunið saman og myndað nifteindastjörnu, en eðlismassi nifteindastjarna er jafn eðlismassa kjarna atóma. Ef járnkjarni slíkrar stjörnu hefur geisla $1{,}0 \cdot 10^4$ km og geisli nifteindastjörnunnar sem myndast eftir hrun kjarnans er 12 km, hver er snúningstími nifteindastjörnunnar ef snúningstími upphaflegu stjörnunnar var 16 dagar? Gerið ráð fyrir að járnkjarninn og nifteindastjarnan séu kúlulaga og hafi sama massa.

Lausn: Varðveisla hverfiþunga gefur:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Leftrightarrow \frac{\frac{2}{5}mr_1^2}{T_1} = \frac{\frac{2}{5}mr_2^2}{T_2} \Leftrightarrow T_2 = T_1\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow T_2 = 16\cdot 24\cdot 60\cdot 60\cdot\left(\frac{12\cdot 10^3}{1{,}0\cdot 10^4\cdot 10^3}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow T_2 = 2{,}0\,\mathrm{s}.$$



20. Kúrekahattur með massa $M = 130\,\mathrm{g}$ hvílir á borði. Núningsstuðullinn milli hattsins og borðsins er $\mu = 0.25$. Byssukúlu með massa $m = 5\,\mathrm{g}$ og láréttan hraða $v_0 = 550\,\mathrm{m/s}$ er skotið í gegnum kúrekahattinn þannig að hann rennur $\Delta x = 1{,}25\,\mathrm{m}$ eftir borðinu. Hver er hraði byssukúlunnar, v, eftir að hún kemur út úr hattinum?

Lausn: Ef v er hraði kúlunnar eftir að hún kemur út og v_1 er upphafshraði hattsins eftir að kúlan fer í gegnum hann gefur skriðþungavarðveisla að

$$m\cdot v_0 = m\cdot v + M\cdot v_1 \quad \text{þ.e.} \quad v = \frac{m\cdot v_0 - M\cdot v_1}{m}.$$

Þar sem hatturinn rennur $\Delta x = 1{,}25\,\mathrm{m}$ eftir borðinu gildir einnig

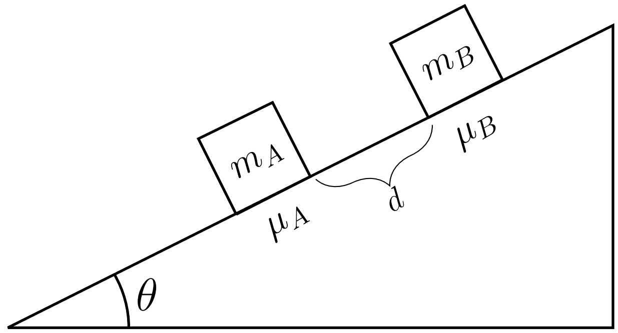
$$\frac{1}{2}Mv_1^2 = F_{\text{nún}}\Delta x = \mu\cdot M\cdot g\cdot\Delta x \quad \text{þ.e.} \quad v_1 = \sqrt{2\cdot\mu\cdot g\cdot\Delta x}$$

svo

$$v = v_0 - \frac{M}{m}\sqrt{2\cdot\mu\cdot g\cdot\Delta x} = 486\,\mathrm{m/s}.$$

Seinni hluti

Dæmi 1: Tveir kubbar á skábretti (15 stig)



Lítum á skábretti sem hallar um horn θ miðað við lárétt. Á skábrettinu standa tveir kubbar í kyrrstöðu. Kubburinn sem stendur neðar á skábrettinu hefur massa m_A og núningsstuðullinn milli kubbsins og skábrettisins er μ_A. Kubburinn sem stendur ofar á skábrettinu hefur massa m_B og núningsstuðullinn milli kubbsins og skábrettisins er μ_B. Í þessu dæmi gerum við ráð fyrir að skábrettið sé svo langt að kubbarnir nái ekki að renna niður á enda þess, $\tan\theta > \mu_A > \mu_B$ og að vegalengdin (samsíða skábrettinu) milli kubbanna sé d.

(a) **(3 stig)** Ákvarðið hröðun kubbsins, a_A, með massa m_A í stefnuna samsíða skábrettinu.

Lausn: Fáum kraftajöfnur í stefnur samsíða og hornrétt á skábrettið

$$\begin{pmatrix} m_A a_A \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_A g \sin\theta - F_{\text{nún}} \\ F_N - mg\cos\theta \end{pmatrix}$$

svo þverkrafturinn sem verkar á kubbinn er $F_N = m_A g\cos\theta$ og $F_{\text{nún}} = \mu_A F_N = \mu_A m_A g\cos\theta$ þ.a.

$$m_A a_A = m_A g\sin\theta - \mu_A m_A g\cos\theta \quad \text{þ.e.} \quad a_A = g(\sin\theta - \mu_A\cos\theta).$$

(b) **(1 stig)** Ákvarðið hröðun kubbsins, a_B, með massa m_B í stefnuna samsíða skábrettinu.

Lausn: Eins og í (a)-lið fæst að

$$a_B = g(\sin\theta - \mu_B\cos\theta).$$

(c) **(4 stig)** Finnið tímann t_1 sem líður frá því að kubbunum er sleppt samtímis úr kyrrstöðu og þar til að þeir skella saman í fyrsta skipti.

Lausn: Lýsa má staðsetningu kubbanna (nánar tiltekið framhlið B og bakhlið A) samsíða skáplaninu (með upphafspunkt hjá framhlið kubbs B) með

$$x_B = \frac{1}{2}a_B t^2 \quad \text{og} \quad x_A = d + \frac{1}{2}a_A t^2$$

svo t_1 uppfyllir

$$\frac{1}{2}a_B t_1^2 = d + \frac{1}{2}a_A t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2d}{a_B - a_A}} = \sqrt{\frac{2d}{g\cos\theta(\mu_A - \mu_B)}}.$$

(d) **(7 stig)** Gerum ráð fyrir að $m = m_A = m_B$ og að kubbarnir lendi í alfjaðrandi árekstri, en það þýðir að bæði skriðþungi og orka kerfisins er varðveitt við áreksturinn. Ákvarðið tímann t_2 sem líður frá því að kubbarnir rekast saman í fyrsta skipti og þar til að þeir rekast saman í annað skipti.

Lausn: Látum v_A vera hraða kubbs A þegar þeir lenda í árekstrinum og v_B vera hraða kubbs B á sama augnabliki. Látum u_A vera hraða kubbs A rétt eftir áreksturinn og u_B vera hraða kubbs B á sama augnabliki. Ef $m = m_A = m_B$ og áreksturinn er alfjaðrandi gildir:

$$\begin{cases} mv_A + mv_B = mu_A + mu_B \\ \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mu_A^2 + \frac{1}{2}mu_B^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_A - u_A = u_B - v_B \quad (*) \\ (v_A - u_A)(v_A + u_A) = (u_B - v_B)(u_B + v_B) \end{cases}$$

þ.e.

$$(u_B - v_B)(v_A + u_A) = (u_B - v_B)(u_B + v_B).$$

Gerum ráð fyrir að $u_B \neq v_B$ (lausnin $u_B = v_B$ hefði þá eðlisfræðilegu merkingu að kubburinn B færi í gegnum kubbinn A og því er eðlilegt að útloka hana). Þá fæst

$$v_A + u_A = u_B + v_B \quad (**)$$

Með því að leggja saman og taka mismun jafnanna $(*)$ og $(**)$ fæst

$$\begin{cases} v_A = u_B \\ u_A = v_B \end{cases}$$

þ.e. kubbarnir „skiptast á hraða“ eftir áreksturinn. Staðsetningu kubbanna samsíða skábrettinu (með upphafspunkt þar sem áreksturinn átti sér stað) eftir áreksturinn má lýsa með

$$x_B = v_A t + \frac{1}{2}a_B t^2 \quad \text{og} \quad x_A = v_B t + \frac{1}{2}a_A t^2.$$

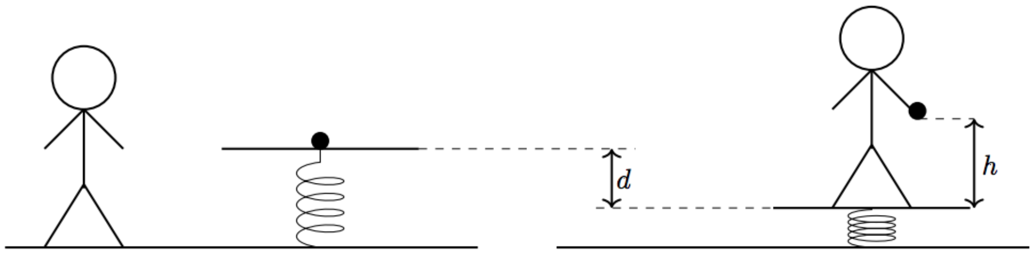
Tíminn $t_2 \neq 0$ sem líður milli fyrsta og annars áreksturs uppfyllir:

$$\begin{aligned} v_A t_2 + \frac{1}{2}a_B t_2^2 = v_B t_2 + \frac{1}{2}a_A t_2^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}t_2\,(a_B - a_A) &= v_B - v_A \\ \Leftrightarrow t_2 &= 2\frac{v_B - v_A}{a_B - a_A} \\ \Leftrightarrow t_2 &= 2\frac{a_B t_1 - a_A t_1}{a_B - a_A} \\ \Leftrightarrow t_2 &= 2t_1 \end{aligned}$$

eða

$$t_2 = 2\sqrt{\frac{2d}{g\cos\theta(\mu_A - \mu_B)}}.$$

Dæmi 2: Gormur (15 stig)



Óli prik, sem hefur massa m_p, stendur við hliðina á gormi í jafnvægisstöðu með gormstuðul k. Ofan á gorminum er massalaus pallur og bolti með massa m_b. Síðan stígur Óli varlega ofan á pallinn og tekur upp boltann. Þá þjappast gormurinn saman í nýja jafnvægisstöðu sem er í fjarlægðinni d lóðrétt frá upphaflegu jafnvægisstöðunni.

(a) **(2 stig)** Ákvarðið fjarlægðina d (notið stærðirnar k, m_p, m_b og/eða g í svarinu).

Lausn: Fáum að

$$kd = m_p g \quad \text{þ.a.} \quad d = \frac{m_p g}{k}.$$

(b) **(3 stig)** Ef Óli sleppir nú boltanum fer gormurinn að sveiflast með tíma. Hvert verður útslag sveifluhreyfingarinnar, A_1, áður en boltinn lendir á pallinum (notið stærðirnar k, m_p, m_b og/eða g í svarinu)?

Lausn: Útslag sveifluhreyfingarinnar nemur þeirri þjöppun á gorminum sem boltinn olli svo

$$A_1 = \frac{m_b g}{k}.$$

(c) **(5 stig)** Þegar boltinn lendir loks á pallinum hefur gormurinn lokið nákvæmlega einni sveiflu. Ákvarðið hæðina h sem boltanum var sleppt úr (notið stærðirnar k, m_p, m_b og/eða g í svarinu).

Lausn: Horntíðni sveifla eftir að boltanum er sleppt er

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_p}}$$

og tíminn sem tekur gorminn til að ljúka einni sveiflu er því

$$t = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m_p}{k}}.$$

Boltinn fellur hæð h á tímanum t svo

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = 2g\pi^2\frac{m_p}{k}.$$

(d) (5 stig) Boltinn festist við pallinn þegar hann lendir, þ.e. áreksturinn milli boltans og pallsins er fullkomlega ófjaðrandi. Ákvarðið útslag sveifluhreyfingarinnar, A_2, eftir að boltinn lendir á gorminum (notið stærðirnar k, m_p, m_b og/eða g í svarinu).

Lausn: Hraði boltans þegar hann lendir á gorminum er

$$v = gt = 2\pi g \sqrt{\frac{m_p}{k}}$$

Þegar boltinn lendir hefur gormurinn lokið nákvæmlega einni sveiflu og er því kyrrstæður. Enn fremur verður pallurinn í nýrri jafnvægisstöðu (sjá lið (a)) þegar boltinn lendir. Ef hraði pallsins eftir að boltinn lendir er u gefur skriðþungavarðveisla að

$$m_b v = (m_p + m_b)u \quad \text{þ.e.} \quad u = \frac{m_b}{m_p + m_b} v$$

og útslagið A_2 má finna með orkuvarðveislu með

$$\frac{1}{2} k A_2^2 = \frac{1}{2}(m_p + m_b)u^2 = \frac{1}{2}\frac{m_b^2}{(m_p + m_b)} v^2 = \frac{4\pi^2 g^2 m_b^2 m_p}{2k(m_p + m_b)}$$

þ.a.

$$A_2^2 = \frac{4\pi^2 g^2 m_b^2 m_p}{k^2(m_p + m_b)} \Rightarrow A_2 = \frac{2\pi g m_b}{k} \sqrt{\frac{m_p}{m_p + m_b}}.$$