Landskeppni í eðlisfræði 2022

Forkeppni

22. febrúar kl. 10–12

Leyfileg hjálpargögn: Reiknivél sem geymir ekki texta.

Verkefnið er í tveimur hlutum og er samtals 100 stig. Gætið þess að lesa leiðbeiningar vel.

Verkefnið hefur verið lesið vandlega yfir. Það er lagt fyrir nákvæmlega í þeirri mynd sem það er og er umsjónarmönnum óheimilt að gefa nánari skýringar. Ef einhverjir gallar reynast vera á verkefninu, koma þeir jafnt niður á öllum þátttakendum. Sjáir þú eitthvað athugavert við einstakar spurningar er þér frjálst að geta þess stuttlega á úrlausnarblöðunum.

Góður frágangur hefur jákvæð áhrif!

Nafn: ____________________

Kennitala: ____________________

Skóli: ____________________

Hvenær lýkur þú stúdentsprófi? ____________________

Sími: ____________________

Netfang: ____________________

Heimilisfang í vetur: ____________________

Tafla yfir þekkta fasta

Nafn	Tákn	Gildi
Hraði ljóss í tómarúmi	c	$3{,}00 \cdot 10^{8}$ m/s
Þyngdarhröðun við yfirborð jarðar	g	$9{,}82\,\mathrm{m/s^2}$
Frumhleðslan	e	$1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C
Massi rafeindar	m_e	$9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg
Massi róteindar	m_p	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg
Fasti Plancks	h	$6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Js
Gasfastinn	R	$8{,}3145\,\mathrm{J/(mol\,K)}$
Fasti Coulombs	k_e	$8{,}988 \cdot 10^{9}\,\mathrm{N\,m^2/C^2}$
Rafsvörunarstuðull tómarúms	ϵ_0	$8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C^2\,s^2/(m^3\,kg)}$
Þyngdarfastinn	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg\,s^2)}$
Geisli jarðarinnar	$R_\oplus$	$6{,}371 \cdot 10^{6}$ m
Massi jarðarinnar	$M_\oplus$	$5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg
Massi sólarinnar	$M_\odot$	$1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg
Stjarnfræðieiningin	AU	$1{,}50 \cdot 10^{11}$ m

Fyrri hluti

Í þessum hluta eru 20 krossaspurningar sem gilda 3,5 stig hver. Svaraðu spurningunum með því að setja hring utan um einn og aðeins einn bókstaf.

Aðeins eitt svar við hverri spurningu er rétt eða á best við. **Það er ekki dregið frá fyrir röng svör.**

1. Þann 15. janúar 2022 varð sprengigos í eldstöð við Tonga-eyjar í kyrrahafinu. Þrýstingsbylgjan frá sprengigosinu barst þrisvar sinnum hringinn í kringum jörðina með hljóðhraða 1225 km/klst. Íslenskir veðurfræðingar greindu fyrstu ummerki bylgjunnar 12 klst eftir að gosið hófst. Hvað er langt til Tonga-eyja?

   A. 14 700 km

   B. 24 700 km

   C. 34 700 km

   D. 44 700 km

   E. 54 700 km

Lausn: Athugum að:

$$\ell = v_{\text{hljóð}} \cdot \Delta t = 1225 \cdot 12 = 14\,700\,\text{km}.$$

2. Í fjörugum Silverstone kappakstri stangaði Lewis Hamilton keppinaut sinn Max Verstappen út af brautinni. Verstappen skall á öryggisnetinu með hraða 180 km/klst og stöðvaðist algjörlega á 0,1 s. Hver var meðalhröðun Verstappen í árekstrinum?

   A. $100\,\text{m/s}^2$

   B. $200\,\text{m/s}^2$

   C. $300\,\text{m/s}^2$

   D. $400\,\text{m/s}^2$

   E. $500\,\text{m/s}^2$

Lausn: Athugum að:

$$a_{\text{meðal}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{180}{3{,}6 \cdot 0{,}1} = 500\,\text{m/s}.$$

3. Tommi togvagn er mjög hreykinn af sérleiðinni sinni. Hann álítur hana mikilvægasta hluta samgöngukerfisins. Tommi keyrir með hraðanum 54 km/klst og byrjar að hægja á sér með hröðun $0{,}25\,\text{m/s}^2$ þegar hann er í 450 m fjarlægð frá skiptisporinu. Í hvaða fjarlægð verður Tommi frá skiptisporinu eftir eina mínútu?

   A. 0 m

   B. 10 m

   C. 20 m

   D. 50 m

   E. 100 m

Lausn: Athugum að $v_0 = 15\,\text{m/s}$. Höfum þá:

$$\Delta s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2 = 450\,\text{m}.$$

En þar með er hann einmitt kominn alla leið.

4. Bókasafnsvörðurinn Ari tekur 500 blaðsíðna bunka af hvítum A4 pappír og mælir þykkt bunkans sem 5,0 cm. Hver er þykktin á einu blaði?

   A. 1 µm

   B. 5 µm

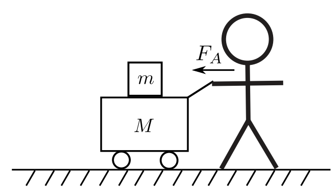
   C. 10 µm

   D. 50 µm

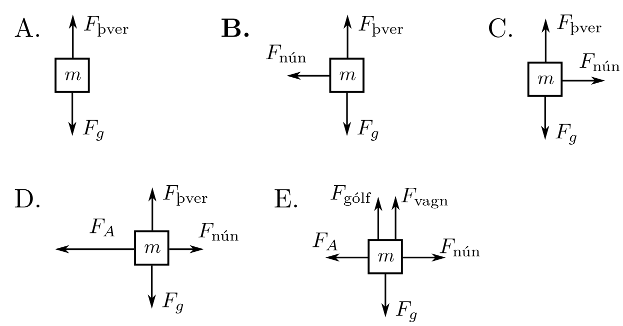
   E. **100 µm**

Lausn: Þykktin, þ á einu blaði er þá

$$\text{þ} = \frac{B}{N} = \frac{5{,}0\,\text{cm}}{500} = 0{,}01\,\text{cm} = 100\,\mu\text{m}.$$



5. Ari ýtir nú vagni með massa M til vinstri með föstum krafti F_A. Vagninn fær hröðun a til vinstri. Ofan á vagninum er kassi með hvítum A4 pappír sem hefur massa m. Hver af eftirfarandi kraftamyndum sýnir best alla kraftana sem verka á pappírskassann, m?



Lausn: Ari snertir hvergi kubbinn svo krafturinn hans getur ekki verið hluti af kraftamyndinni (útilokar D og E). Þar sem að kubburinn er ofan á vagninum þá fær hann sömu hröðun til vinstri í lárétta stefnu (að því gefnu að kubburinn haldist kyrr ofan á vagninum á meðan að Ari ýtir). En eini krafturinn sem verkar í lóðrétta stefnu er $F_{\text{nún}}$ en hann þarf þá að vera til vinstri svo svarið er **B**.

6. Skoðum kraftamyndina af pappírskassanum úr dæminu hér á undan. Samkvæmt þriðja lögmáli Newtons þá hefur sérhver kraftur jafn stóran gagnverkandi kraft. Hver er þriðja lögmáls gagnkraftur þverkraftsins sem verkar á pappírskassann frá vagninum?
   - A. Þyngdarkrafturinn á pappírskassann.
   - B. Þyngdarlögmálskrafturinn frá jörðinni á kassann.
   - C. Þyngdarlögmálskrafturinn frá kassanum á jörðina.
   - **D. Þverkrafturinn á vagninn frá pappírskassanum.**
   - E. Krafturinn hans Ara.

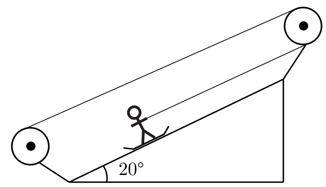
7. Gunna hefur undir höndunum geislavirkt efni með óþekktan helmingunartíma. Upphaflegi massi efnisins er 10 g. Gunna mælir að eftir tvo daga er massi efnisins 6,3 g, eftir fjóra daga 4,0 g og á sjötta degi er hann 2,5 g. Hver er helmingunartími efnisins?
   - A. 2 dagar
   - **B.** 3 dagar
   - C. 4 dagur
   - D. 5 dagar
   - E. 6 dagar

> **Lausn:** Við sjáum að á sex dögum þá hefur sýnið hrörnað um $\frac{1}{4}$ af upphaflegu gildi þ.e.a.s. um tvo helmingunartíma. Því er svarið 3 dagar.

8. Stærsta kjarnorkuver heims, Kashiwazaki-Kariwa verið í Japan notar samsætu Úrans-235 til að framleiða 700 TJ af raforku á sólarhring. Gerum ráð fyrir að 1 kg af úrani geymi 80 TJ af orku. Hve mikið úran notar verið á sólarhring ef það hefur 25 % nýtni?
   - A. 1 kg
   - B. 5 kg
   - C. 15 kg
   - D. 25 kg
   - **E.** 35 kg

> **Lausn:** Við náum að nýta $0{,}25 \cdot 80 = 20$ TJ úr hverju kíló svo í heildina þarf:
>
> $$m = \frac{700\,\text{TJ}}{20\,\text{TJ}} = 35\,\text{kg}.$$

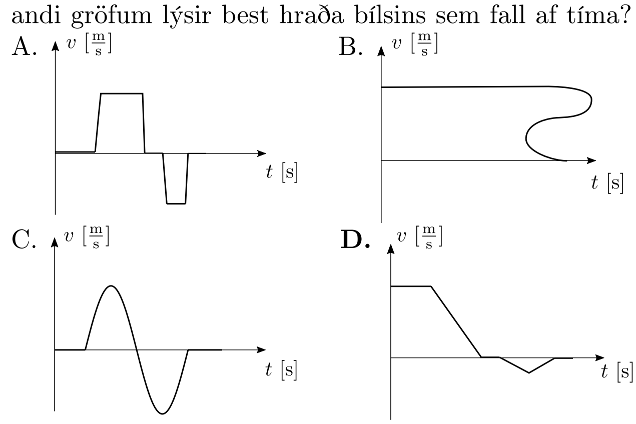
9. Öll höfum við upplifað gegnumtrekk. Gegnumtrekkur myndast þegar gluggar eru opnaðir á gagnstæðri hlið húsnæðis og lýsir sér sem loftflæði í gegnum húsið. Hvert af eftirtöldu er aðalástæða gegnumtrekks?
   - A. Vindáttin er hornrétt á gluggana.
   - B. Efnamættið er eins við báða gluggana
   - **C. Mismunur loftþrýstings utan við gluggana.**
   - D. Mismunandi hitastig lofts inni og úti.
   - E. Núningskraftur milli loftsins og gluggganna.

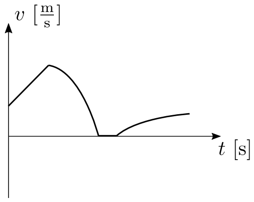


10. Í Hlíðarfjalli á Akureyri er skíðalyfta sem dregur 70 kg snjóbrettakappa með jöfnum hraða samsíða upp brekku sem hallar um 20° miðað við lárétt. Núningsstuðullinn milli brettisins og snjósins er 0,10. Með hversu stórum krafti þarf hann að toga í massalausa bandið til að vera dreginn upp?
   - A. 200 N
   - **B.** 300 N
   - C. 400 N
   - D. 500 N
   - E. 600 N

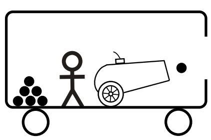
> **Lausn:** Athugum fyrst að krafturinn sem að snjóbrettakappinn togar í bandið með er jafn stór og togkrafturinn í bandinu. Maðurinn er dreginn með jöfnum hraða þannig að hann hefur enga hröðun þannig að kraftajafnan verður:
>
> $$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T - F_{\text{nún}} - mg\sin\theta \\ \text{Þ} - mg\cos\theta \end{pmatrix}$$
>
> Neðri jafnan gefur að $\ = mg\cos\theta$ og þar með er $F_{\text{nún}} = \mu\text{Þ} = \mu mg\cos\theta$ svo við ályktum að:
>
> $$T = mg\left(\mu\cos\theta + \sin\theta\right) = 300\,\text{N}.$$

11. Bílstjóri ekur á jöfnum hraða þegar umferðarljós fyrir framan verður rautt. Þrátt fyrir öfluga og jafna hemlun nær bílstjórinn ekki að stoppa við línuna og verður að bakka aftur fyrir hana. Hvert af eftirfarandi gröfum lýsir best hraða bílsins sem fall af tíma?



E. 

Lausn: Þar sem að hraðinn er jafn í byrjun þá samsvarar það beinni, láréttri línu á hraða tíma grafinu í byrjun en það útilokar E. Þar sem að hraðinn er jákvæður í byrjun þá getum við útilokað A og C. Síðan getur B ekki gengið því samkvæmt því þá tekur bíllinn tvo mismunandi hraða við sama tíma (v uppfyllir ekki skilgreininguna á grafi). Því er svarið **D**.



12. Árið er 1905 og Albert Einstein er eini farþeginn í lest á leiðinni heim til Milevu eiginkonu sinnar. Af ófyrirsjánalegum aðstæðum bilar lestarkerfið í Bern og lestin sem hefur massa 10 000 kg stöðvast. En Einstein deyr ekki ráðalaus því hann hefur tekið fallbysuna sína með. Fallbyssan hefur massa 3000 kg og fallbyssukúlurnar, sem eru sjö talsins, eru 25 kg hver. Albert Einstein er 70 kg. Einstein skýtur öllum kúlunum út um bakhlið lestarinnar með hraða 150 m/s. Hver verður hraði lestarinnar þá?

   A. 2,0 m/s
   B. 5,0 m/s
   C. 10 m/s
   D. 20 m/s
   E. Hún haggast ekki úr stað.

Lausn: Við höfum með skriðþungavarðveislu:

$$Mu = 7mv \implies u = \frac{7mv}{M} = \frac{7 \cdot 25 \cdot 150}{13070} = 2{,}0\,\mathrm{m/s}.$$

13. Í smástirnabeltinu milli Mars og Júpíters er lítil dvergpláneta sem kallast Ceres sem er á nánast hringlaga sporbraut um sólina í 2,77 AU meðalfjarlægð frá sólu. Hver er umferðartími Ceresar í jarðarárum?

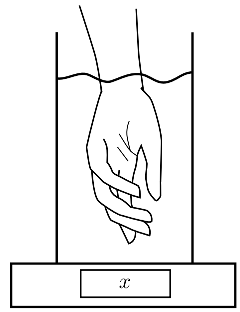
   A. 2,2 ár
   B. 4,6 ár
   C. 6,3 ár
   D. 7,8 ár
   E. 9,5 ár

Lausn: Við notum þriðja lögmál Keplers:

$$\frac{r_{\text{Jörð}}^3}{T_{\text{Jörð}}^2} = \frac{GM_{\text{sól}}}{4\pi^2} = \frac{r_{\text{Ceres}}^3}{T_{\text{Ceres}}^2}$$

En það gefur okkur því að:

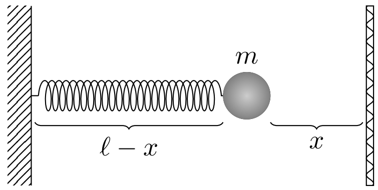
$$T_{\text{Ceres}} = \left(\frac{r_{\text{Ceres}}}{r_{\text{Jörð}}}\right)^{3/2} 2{,}77^{3/2} T_{\text{Jörð}} 1\,\text{ár} = 4{,}6\,\text{ár}.$$



14. Hugsum okkur að við séum með ílát af vatni sem stendur ofan á eldhúsvog. Hugsum okkur síðan að við dýfum höndinni okkar ofan í vatnið án þess að snerta botninn né hliðarnar og án þess að neitt vatn sullist upp úr ílátinu. Hvað gerist við aflesturinn á voginni?

   A. Talan á voginni hækkar.
   B. Talan á voginni lækkar.
   C. Talan á voginni helst óbreytt.
   D. Talan lækkar fyrst á meðan að höndin fer ofan í vatnið en verður síðan jafn mikil og hún var í byrjun þegar höndin er kyrr ofan í vatninu.
   E. Talan hækkar fyrst á meðan að höndin fer ofan í vatnið en verður síðan jafn mikil og hún var í byrjun þegar höndin er kyrr ofan í vatninu.

Lausn: Þegar við setjum höndina ofan í vatnið þá mun vatnsyfirborðið hækka. En samkvæmt lögmáli Pascals þýðir það að þrýstingurinn neðst $P = P_0 + \rho g d$ verður meiri og þar með verkar stærri þverkraftur á vogina svo vogin sýnir hærri tölu. Svarið er því **A**.



15. Gormur með gormstuðul $k = 300\,\mathrm{N/m}$ er festur lárétt við vegg. Í lausa enda gormsins er massi $m = 200\,\mathrm{g}$. Í jafnvægisstöðu kerfisins er lengd gormsins $10\,\mathrm{cm}$. Ekki þarf að taka tillit til loftmótsstöðu eða annara núningskrafta. Massinn er nú færður lárétt í fjarlægðina x frá jafnvægisstöðu áður en honum er sleppt úr kyrrstöðu og tíminn mældur sem það tekur massann að komast aftur í upphafspunkt. Hvert af eftirfarandi gildum á x gefur stystan tíma?

   A. $x = 1{,}0\,\mathrm{cm}$

   B. $x = 2{,}5\,\mathrm{cm}$

   C. $x = 5{,}0\,\mathrm{cm}$

   D. $x = 7{,}5\,\mathrm{cm}$

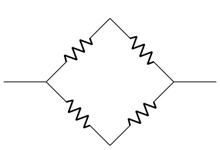
   E. Öll gildin hér að ofan gefa sama tíma.

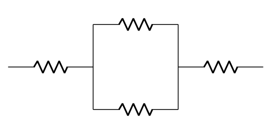
Lausn: Við athugum að sveiflutíminn er:

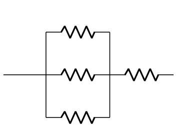
$$T_{\text{gormur}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

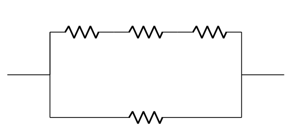
Sem er óháð útslagi svo svarið er **E**.

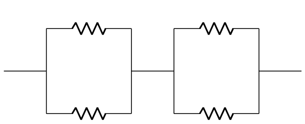
16. Fjögur $1\,\Omega$ viðnám eru tengd eins og fyrir neðan. Hvaða tenging er með minnst heildarviðnám?

A.


B.


C.


D.


E.


Lausn: Heildarviðnám rásanna er:

$$R_A = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{-1} = 1\Omega.$$

$$R_B = 1 + (1+1)^{-1} + 1 = \frac{5}{2}\Omega.$$

$$R_C = (1+1+1)^{-1} + 1 = \frac{4}{3}\Omega.$$

$$R_D = \left(\frac{1}{3} + 1\right)^{-1} = \frac{3}{4}\Omega.$$

$$R_E = (1+1)^{-1} + (1+1)^{-1} = 1\Omega.$$

Svo við ályktum að minnsta viðnámið er R_D.

17. James Bond er að prófa nýtt tæki, hlaðið vesti sem á að stoppa hann í falli. Hann á nú þegar tæki sem býr til fast rafsvið með styrk $1000\,\mathrm{kN/C}$ í stefnuna upp. Þyngd hans í vestinu er $80\,\mathrm{kg}$. Áður en að hann stekkur verður hann passa að stilla hleðslu vestisins rétt. Í miklum hasargang í smábænum Puglia á suður Ítalíu ákveður Bond í skyndi að stökkva fram af $150\,\mathrm{m}$ hárri brú. Hann ætlar að tímasetja stökkið þannig að þegar hann hefur fallið helminginn af leiðinni niður þá kveikir hann á rafsviðinu upp, þá hægist á honum allverulega með fastri hröðun og hugmyndin er að hann eigi að geta lent á jörðinni nákvæmlega með engan hraða og slökkt á rafsviðinu í neðsta punkti. Hver þarf hleðsla vestisins að vera?

   A. $1{,}6\,\mathrm{mC}$
   B. $2{,}8\,\mathrm{mC}$
   C. $4{,}1\,\mathrm{mC}$
   D. $6{,}7\,\mathrm{mC}$
   E. $9{,}2\,\mathrm{mC}$

Lausn: Hraði Bonds eftir að hafa fallið $\frac{h}{2}$ er $v = \sqrt{2g\frac{h}{2}} = \sqrt{gh}$. Samkvæmt tímaóháðu stöðujöfnunni er síðan:

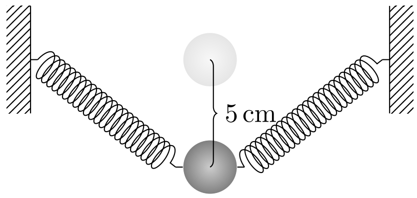
$$2a\Delta s = v^2 - v_0^2 \implies a = \frac{gh}{2\frac{h}{2}} = g.$$

En stöðujafnan gefur þá að:

$$ma = qE - mg \implies qE = 2mg$$

Svo við ályktum að:

$$q = \frac{2mg}{E} = 1{,}6\,\mathrm{mC}.$$



18. Tveir gormar með gormstuðul k hafa óstrekkta lengd 5 cm. Þeir eru festir við litla kúlu með massa 1,0 kg. Til að byrja með er kúlunni haldið í láréttri stöðu (lengdin milli veggjanna er 10 cm). Síðan er kúlunni sleppt og kerfið sveiflast fram og til baka um kraftajafnvægisstöðu kerfisins. Eftir dágóðan tíma deyr sveiflan út og kerfið nær hvíldarstöðunni sem sést á myndinni hér fyrir ofan þar sem að kúlan hefur sigið niður um 5 cm. Hver er gormstuðull gormsins?

A. 115 N/m

B. 225 N/m

C. 335 N/m

D. 445 N/m

E. 555 N/m

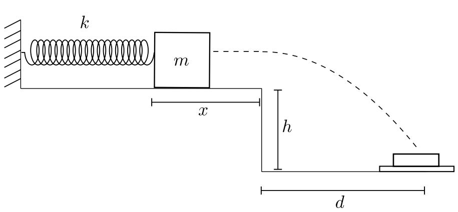
Lausn: Hornið sem að myndast er þá 45°. Kraftajafnan gefur að:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx\cos\theta - kx\cos\theta \\ 2kx\sin\theta - mg \end{pmatrix}$$

Þar sem $x = \sqrt{5^2+5^2} - 5 = 2{,}07\,\text{cm}$ er lenging gormsins svo við fáum að:

$$k = \frac{mg}{2x\sin\theta} = 335\,\text{N/m}.$$

D



19. Á myndinni hér fyrir ofan sést kubbur með massa m sem er ýtt upp við gorm með gormstuðul k á núningslausu borði. Gormurinn þjappast saman um vegalengd x. Síðan er kubbnum sleppt af stað úr kyrrstöðu. Hvernig eigum við að velja x ef markmiðið er að kubburinn lendi ofan á takka lárétti í fjarlægð d og lóðréttri hæð h fyrir neðan?

A. $x = \sqrt{\frac{k}{2mgd}}$

B. $x = \sqrt{\frac{mgd}{k}}$

C. $x = \sqrt{\frac{mgd}{2k}}$

D. $x = \sqrt{\frac{kh}{2mgd^2}}$

E. $x = \sqrt{\frac{mgd^2}{2kh}}$

Lausn: Til þess að kubburinn lendi á takkanum þarf kasthreyfingin að gefa:

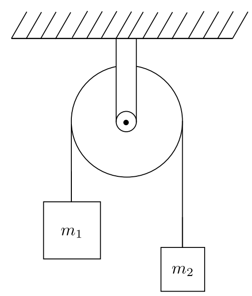
$$\begin{pmatrix} d \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 t \\ \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$$

En þá er $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ svo hraðinn þegar hann fer fram af borðinu er:

$$v_0 = \frac{d}{t} = d\sqrt{\frac{g}{2h}}.$$

En þar sem að borðið er núningslaust breytist öll gormorkan í hreyfiorku þannig að:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}kx^2 \implies x = \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot v_0 = \sqrt{\frac{mgd^2}{2kh}}.$$



20. Á myndinni hér fyrir ofan má sjá vél Atwoods sem samanstendur af tveimur mössum m_1 og m_2 þar sem $m_1 > m_2$. Massarnir hanga í massalausu bandi yfir núningslausa og massalausa trissu. Kerfinu er sleppt úr kyrrstöðu. Hver verður hröðun m_1 niður?

A. $\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) g$

B. $\left(\frac{m_1+m_2}{m_1-m_2}\right) g$

C. $\left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right) g$

D. $\left(\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right) g$

E. $\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right) g$

Lausn: Kraftajöfnurnar verða þá:

$$m_1 a = m_1 g - T, \qquad m_2 a = T - m_2 g$$

Með því að leggja jöfnurnar saman styttist togkrafturinn út og við fáum að:

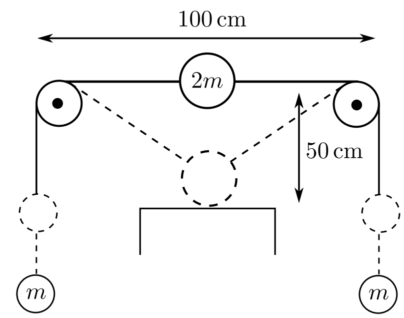
$$(m_1+m_2)a = m_1 g - m_2 g \implies a = \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right) g.$$

Seinni hluti

Skrifleg dæmi (30 stig)

Í þessum hluta eru tvær stærri spurningar sem gefa 15 stig hvor. Sýnið útreikninga. Gefin eru stig fyrir útreikninga þótt lokasvar sé ekki rétt. Athugið að hægt er að fá stig fyrir hluta af lausn á dæmunum.

Dæmi 1: Þrjár kúlur og tvær trissur (15 stig)



Á myndinni hér til hægri sjást þrjár kúlur sem eru tengdar saman með massalausu bandi yfir tvær núningslausar og massalausar trissur. Trissurnar eru í fjarlægð $\ell = 100\,\mathrm{cm}$ frá hvor annarri og hæð $h = 50\,\mathrm{cm}$ yfir borði og kúlan með massa $2m = 500\,\mathrm{g}$ er í $50\,\mathrm{cm}$ hæð yfir borði. Hinar tvær kúlurnar hafa massa $m = 250\,\mathrm{g}$. Til að byrja með er sá hluti bandsins sem tengir $2m$ yfir trissurnar láréttur en síðan er $2m$ sleppt. Hver verður hraði kúlunnar með massa $2m$ þegar að hún skellur á borðinu?

Hunsið loftmótsstöðu. Gera má ráð fyrir að kúlurnar hafi ómarktæka stærð og hegði sér eins og punktmassar þar að auki sem að geisli trissunnar sé óverulegur í samanburði við hæðina yfir borðinu.

Lausn: Við notum orkuvarðveislu. Kúlurnar með massa m munu færast upp um hæð d en kúlan með massa $2m$ mun falla um hæð $h = 50\,\mathrm{cm}$. Við sjáum með rétthyrnda þríhyrningnum að:

$$d = \sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + h^2} - \frac{\ell}{2} = 20{,}7\,\mathrm{cm}.$$

Látum θ vera hornið sem að bandið myndar einmitt þegar að kúlan snertir borðið. Þá er:

$$\theta = \arctan\left(\frac{h}{\ell/2}\right) = 45^\circ.$$

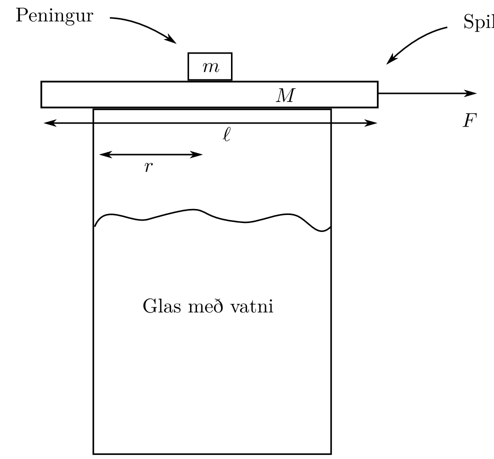
Hraði kúlanna með massa m er sá sami og hraði bandsins en hraði bandsins tengist hraða kúlunnar með massa $2m$ samkvæmt:

$$2v_{\text{band}} \sin\theta = v_{\text{kúla}} = v \implies v_{\text{band}} = \frac{v}{2\sin\theta} = \frac{v}{\sqrt{2}}.$$

En þar með gefur orkuvarðveislan að:

$$2mgh = \frac{1}{2}(2m)v^2 + 2mgd + 2\cdot\frac{1}{2}mv_{\text{band}}^2 = mv^2 + 2mgd + \frac{1}{2}mv^2 \implies v = \sqrt{\frac{2}{3}\cdot 2g(h-d)} = 1{,}96\,\mathrm{m/s}.$$

Dæmi 2: Glas af vatni (15 stig)



Hálffullt glas af vatni hvílir á láréttu borði. Glasið hefur geisla r og ofan á glasinu er búið að leggja spil með massa M sem hefur lengd ℓ og ómarktæka þykkt. Spilið er nógu langt til þess að það standi fram af glasinu og spilið hefur verið lagt ofan á glasið þannig að miðjan á spilinu sé beint yfir miðjunni á glasinu. Ofan á spilinu, beint fyrir ofan miðjuna á glasinu, er lítill peningur með massa m og ómarktæka breidd. Núningsstuðullinn milli peningsins og spilsins er μ en núningurinn milli glasins og spilsins er hverfandi. Nú togum við skyndalega í spilið með föstum krafti F til hægri og höldum því alltaf láréttu. Hvert er minnsta gildið á kraftinum F þannig að peningurinn detti ofan í glasið?

Lausn: Kraftajöfnurnar eru:

$$MA = F - F_{\text{nún}}, \qquad \begin{pmatrix} ma = F_{\text{nún}} \\ \text{Þ} - mg \end{pmatrix}$$

Svo $F_{\text{nún}} = \mu \text{Þ} = \mu mg$ en þar með er hröðunin á peningnum:

$$a = \mu g.$$

Hinsvegar hefur spilið hröðun:

$$A = \frac{F}{M} - \frac{\mu mg}{M}.$$

Til þess að peningurinn detti ofan í glasið þarf spilið að hafa ferðast vegalengd $\frac{\ell}{2} + r$ áður en að peningurinn hefur ferðast vegalengd r, en tíminn sem það tekur peninginn að ferðast vegalengd r er:

$$\frac{1}{2} a t_{\text{peningur}}^2 = r \implies t_{\text{peningur}} = \sqrt{\frac{2r}{a}}$$

Hinsvegar þá er tíminn sem að það tekur spilið að ferðast $\frac{\ell}{2} + r$ gefinn með:

$$\frac{1}{2} A T_{\text{spil}}^2 = \frac{\ell}{2} + r \implies T_{\text{spil}} = \sqrt{\frac{\ell + 2r}{A}}$$

En skilyrðið segir okkur að $t_{\text{peningur}} \geq T_{\text{spil}}$ en þá ákvarðast minnsti krafturinn af:

$$\frac{2r}{a} = \frac{\ell + 2r}{A} \implies 2r\left(\frac{F}{M} - \frac{\mu mg}{M}\right) = (\ell + 2r)\mu g$$

En þar með er:

$$F_{\min} = \mu mg + \left(1 + \frac{\ell}{2r}\right)\mu M g.$$