Landskeppni í eðlisfræði 2023

Forkeppni

14. febrúar kl. 10–12

Leyfileg hjálpargögn: Reiknivél sem geymir ekki texta.

Verkefnið er í tveimur hlutum og er samtals 100 stig. Gætið þess að lesa leiðbeiningar vel.

Verkefnið hefur verið lesið vandlega yfir. Það er lagt fyrir nákvæmlega í þeirri mynd sem það er og er umsjónarmönnum óheimilt að gefa nánari skýringar. Ef einhverjir gallar reynast vera á verkefninu, koma þeir jafnt niður á öllum þátttakendum. Sjáir þú eitthvað athugavert við einstakar spurningar er þér frjálst að geta þess stuttlega á úrlausnarblöðunum.

Góður frágangur hefur jákvæð áhrif!

Nafn: ____________________

Kennitala: ____________________

Skóli: ____________________

Hvenær lýkur þú stúdentsprófi? ____________________

Sími: ____________________

Netfang: ____________________

Heimilisfang í vetur: ____________________

Tafla yfir þekkta fasta

Nafn	Tákn	Gildi
Hraði ljóss í tómarúmi	c	$3{,}00 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}$
Þyngdarhröðun við yfirborð jarðar	g	$9{,}82\,\mathrm{m/s^2}$
Frumhleðslan	e	$1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Massi rafeindar	m_e	$9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Gasfastinn	R	$8{,}3145\,\mathrm{J/(mol\,K)}$
Fasti Coulombs	k_e	$8{,}988 \cdot 10^{9}\,\mathrm{N\,m^2/C^2}$
Rafsvörunarstuðull tómarúms	ϵ_0	$8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C^2\,s^2/(m^3\,kg)}$
Þyngdarfastinn	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg\,s^2)}$
Geisli jarðarinnar	$R_\oplus$	$6{,}371 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m}$
Massi jarðarinnar	$M_\oplus$	$5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$
Massi sólarinnar	$M_\odot$	$1{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$
Stjarnfræðieining	AU	$1{,}50 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$

Fyrri hluti

Í þessum hluta eru 20 krossaspurningar sem gilda 3,5 stig hver. Svaraðu spurningunum með því að setja hring utan um einn og aðeins einn bókstaf.

Aðeins eitt svar við hverri spurningu er rétt eða á best við. **Það er ekki dregið frá fyrir röng svör.**

1. Keníski langhlauparinn Eliud Kipchoge setti nýlega heimsmet í maraþonhlaupi þegar hann hljóp Berlínarmaraþonið á 2 klukkustundum, 1 mínútu og 9 sekúndum. Maraþon vegalengdin er 42,2 km. Hver var meðalhraði Eliud Kipchoge í hlaupinu?
   - A. 10,2 km/klst
   - B. 15,6 km/klst
   - C. 20,9 km/klst
   - D. 25,2 km/klst
   - E. 39,5 km/klst

Lausn: Meðalhraðinn er þá

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{42{,}2 \cdot 10^3\,\mathrm{m}}{(2 \cdot 60^2 + 69)\,\mathrm{s}} = 20{,}9\,\mathrm{km/klst}.$$

2. Ragna Reykvíkingur og Björk Borgfirðingur ætla að hittast á Akureyri. Þær leggja af stað á sama tíma. Björk keyrir 300 km til Akureyrar frá Borgarnesi á meðalhraðanum 50 km/klst. Ragna þarf að keyra 360 km leið frá Reykjavík til Akureyrar. Á hvaða meðalhraða þarf Ragna að keyra til þess að þær komi á sama tíma til Akureyrar?
   - A. 50 km/klst
   - B. 60 km/klst
   - C. 70 km/klst
   - D. 80 km/klst
   - E. 90 km/klst

Lausn: Vegalengdin sem Ragna þarf að keyra er $d_R = 360\,\mathrm{km}$ en Björk þarf að keyra $d_B = 300\,\mathrm{km}$. Tíminn er sá sami þannig við höfum:

$$\frac{d_R}{v_R} = t_R = t_B = \frac{d_B}{v_B}$$

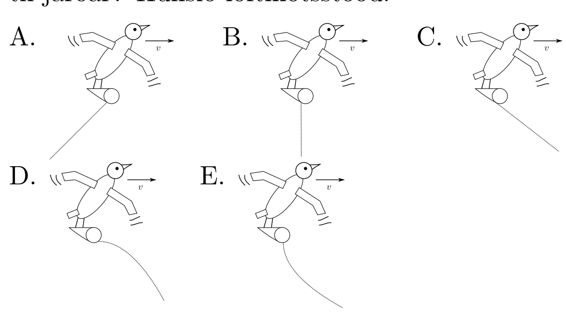
En þar með höfum við að:

$$v_R = \frac{d_R}{d_B} v_B = 1{,}2 \cdot 50\,\mathrm{km/klst} = 60\,\mathrm{km/klst}.$$

3. Bolta er kastað lóðrétt upp og hann er gripinn aftur í sömu hæð. Hvaða kraftar verka á boltann rétt eftir að honum er kastað og þar til rétt áður en hann er gripinn aftur? Hunsið loftmótsstöðu.
   - A. Þyngd boltans verkar niður og krafturinn sem boltanum var hent með upp.
   - B. Krafturinn sem boltanum var hent með verkar upp en minnkar svo þar til hann verður núll og boltinn lendir aftur.
   - C. Á uppleið verkar krafturinn sem boltanum var hent með upp, efst verkar enginn kraftur, á niðurleið verkar þyngdarkraftur niður á boltann.
   - D. Einungis þyngdarkraftur beint niður.
   - E. Boltinn fellur aftur niður af því grunnástandið er við yfirborð jarðarinnar.

Lausn: Eini krafturinn sem verkar á boltann er þyngdarkrafturinn beint niður. Svarið er því D.

4. Mávurinn Már stal ís í vöffluformi frá vesælum Vesturbæing. En þegar hann flýgur í burtu með ránsfenginn á láréttum hraða v dettur ískúlan úr forminu. Hver af eftirfarandi myndum sýnir best hvernig Vesturbæingurinn sér kúluna falla til jarðar? Hunsið loftmótsstöðu.



Lausn: Ferill boltans fylgir þá:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} vt \\ -\frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$$

Efri jafnan gefur okkur því að $t = x(t)/v$ og þar með er:

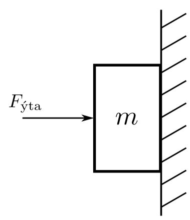
$$y(t) = -\frac{g}{2v^2} x(t)^2$$

Ferillinn sem boltinn fylgir er því fleygbogi með armana niður. Svarið er því D.

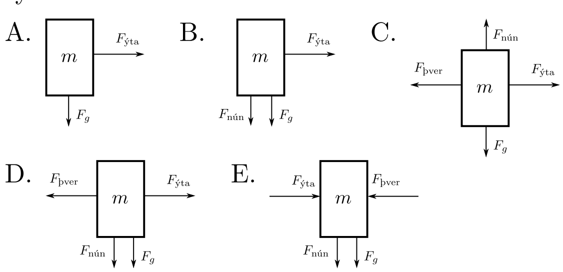
5. Jörðin ferðast á hringlaga sporbraut um sólina. Það tekur sólarljósið 8 mínútur og 20 sekúndur að ferðast til jarðar. Hraði ljóssins er 300 000 km/s. Hversu hratt fer jörðin í kringum sólina?

   A. 11,2 km/s
   B. 29,9 km/s
   C. 35,0 km/s
   D. 59,5 km/s
   E. 615 km/s

> **Lausn:** Fjarlægðin milli jarðarinnar og sólarinnar er $R = c\tau = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m. Í einu ári eru $T = 365{,}25$ dagar en þar með er brautarhraði jarðarinnar:
>
> $$v = \frac{2\pi R}{T} = 29{,}9\,\mathrm{km/s}.$$



6. Bók með massa m er ýtt upp við lóðréttan vegg með láréttum krafti $F_{\text{ýta}}$ þannig að hún helst kyrr í lausu lofti. Hver af eftirfarandi kraftamyndum sýnir best alla kraftana sem verka á bókina?

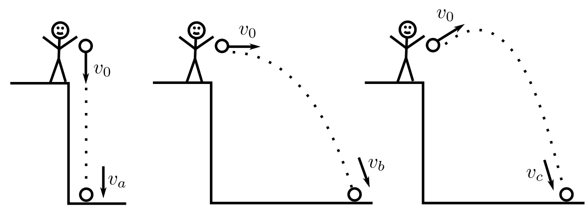


> **Lausn:** Rétta kraftamyndin er C.

7. Bókin úr dæmi 6 er 153 g og núningsstuðullinn milli veggjarins og bókarinnar er $\mu = 0{,}525$. Hver er stærð núningskraftsins sem verkar á bókina frá veggnum þegar ýtt er með $F_{\text{ýta}} = 24{,}0$ N?

   A. 1,50 N
   B. 3,91 N
   C. 5,29 N
   D. 13,9 N
   E. 15,6 N

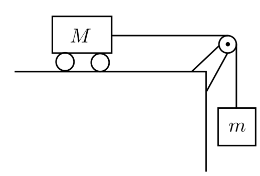
> **Lausn:** Hér er $F_{\text{nún}} = mg = 1{,}50$ N.



8. Þremur eins boltum er kastað úr sömu hæð fram af bjargi með sama upphafshraða v_0. Bolta a er kastað beint niður, bolta b er kastað beint áfram og bolta c er kastað yfir horni miðað við lárétt. Látum v_a, v_b og v_c tákna stærðina á hraða boltanna þegar þeir lenda (í þessari röð). Hvert af eftirtöldu er satt? Hunsið loftmótsstöðu.

   A. $v_a > v_b > v_c$
   B. $v_b > v_a > v_c$
   C. $v_c > v_b > v_a$
   D. $v_a = v_b > v_c$
   E. $v_a = v_b = v_c$

> **Lausn:** Samkvæmt orkuvarðveislu verður hraði allra boltanna sá sami þegar hann lendir. Við höfum nefnilega:
>
> $$\frac{1}{2}mv^2 = mgh + \frac{1}{2}mv_0^2.$$
>
> Sem gefur að
>
> $$v_a = v_b = v_c = \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$



9. Vagn með massa $M = 3{,}0$ kg stendur á núningslausum láréttum fleti. Hann er tengdur með massalausu bandi yfir núningslausa og massalausa trissu við lóð með massa $m = 2{,}0$ kg. Hver verður hröðun vagnsins?

   A. 9,8 m/s^2
   B. 4,9 m/s^2
   C. 3,9 m/s^2

D. $2{,}5\,\mathrm{m/s^2}$

E. $2{,}0\,\mathrm{m/s^2}$

Lausn: Heildarkraftajafnan er:

$$(M+m)a = mg$$

Með því að leysa fyrir hröðunina fæst:

$$a = \frac{m}{M+m}g = 3{,}9\,\mathrm{m/s^2}.$$

10. Ragnheiður hitar 600 mL af 10 °C heitu kranavatni að suðumarki í (varmarýmdarlausum) hraðsuðukatli til þess að fá sér te, sem tekur 2 mínútur. Tebollinn hennar rúmar 300 mL, og restina af vatninu skilur hún eftir í katlinum. Nokkru seinna ætlar hún að fá sér annan tebolla, og á hitamæli á katlinum sér hún að vatnið hefur kólnað í 70 °C. Hvað tekur langan tíma að hita vatnið sem eftir var í katlinum fyrir seinni bollann?

A. 20 sekúndur

B. 25 sekúndur

C. 30 sekúndur

D. 35 sekúndur

E. 40 sekúndur

Lausn: Aflið sem er notað er það sama. Höfum að $m_1 = 2m_2$ og $\Delta T_1 = 3\Delta T_2$ svo:

$$\frac{c_{\text{vatn}} m_1 \Delta T_1}{\Delta t_1} = P = \frac{c_{\text{vatn}} m_2 \Delta T_2}{\Delta t_2}$$

En þar með er tíminn:

$$\Delta t_2 = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)\left(\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}\right)\Delta t_1 = 20\,\mathrm{s}.$$

11. Leðurblaka flýgur um í dimmum helli og stefnir á vegg með hraðanum 30 m/s. Hún sendir frá sér hátíðnihljóð til þess að staðsetja vegginn og nemur hljóðið aftur eftir 0,20 s. Hversu langt frá veggnum er hún þegar hún nemur hljóðið aftur? Hraði hljóðsins er 340 m/s.

A. 11 m

B. 19 m

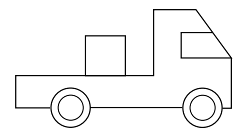
C. 24 m

D. 31 m

E. 45 m

Lausn: Látum leðurblökuna hafa hraða v og hljóðið hraða c. Látum heildartímann sem þetta tekur vera $T = 0{,}20\,\mathrm{s}$ og látum leðurblökuna enda í fjarlægð x frá veggnum. Þá fæst:

$$2x + vT = cT \implies x = \frac{1}{2}(c-v)T = 31\,\mathrm{m}.$$



12. Palli er að flytja sófann sinn á pallbíl en hann á það til að vera fljótfær og gleymdi því að festa sófann. Massi sófans er 55 kg en bílsins 1870 kg. Núningsstuðullinn milli sófans og pallsins er $\mu = 0{,}70$. Hver er mesta hröðunin sem Palli getur lagt af stað með án þess að sófinn færist til?

A. $4{,}3\,\mathrm{m/s^2}$

B. $6{,}9\,\mathrm{m/s^2}$

C. $9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$

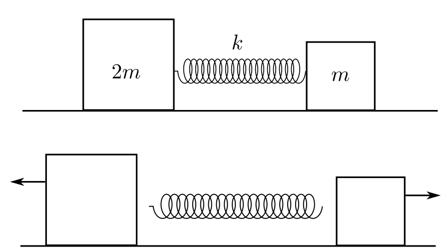
D. $17\,\mathrm{m/s^2}$

E. $57\,\mathrm{m/s^2}$

Lausn: Athugum að þá er eini krafturinn sem verkar á kassann núningskrafturinn frá yfirborði bílsins og við fáum að:

$$\begin{pmatrix} ma \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{\text{nún}} \\ \text{Þ} - mg \end{pmatrix}$$

Kubburinn mun haldast kyrr á meðan $ma = F_{\text{nún}} \leq \mu\text{Þ} = \mu mg$ en þar með sjáum við að $a \leq \mu g = 6{,}9\,\mathrm{m/s^2}$.



13. Kubb með massa m og kubb með massa $M = 2m$ er þrýst upp við gorm með gormstuðul k þannig

að gormurinn styttist um vegalengd x. Kubbarnir standa á núningslausum fleti. Kubbunum er síðan sleppt úr kyrrstöðu. Hvert af eftirtöldu gildir um kubbana eftir að þeir losna frá gorminum og renna í sitt hvora stefnuna?

A. Hraði kubbanna er sá sami.

B. Skriðþungi þyngri kubbsins er meiri heldur en skriðþungi léttari kubbsins.

C. Hreyfiorka kubbanna er sú sama.

D. Hreyfiorka þyngri kubbsins er meiri heldur en hreyfiorka léttari kubbsins.

E. Hreyfiorka léttari kubbsins er meiri heldur en hreyfiorka þyngri kubbsins.

Lausn: Athugum að heildarkrafturinn sem verkar á kerfið er núll (gormkraftarnir á kubbana eru jafn stórir í sitthvora stefnuna) og þar með er heildarskriðþungi kerfisins varðveittur svo skriðþungi kubbanna er sá sami. Látum v tákna hraða m og u tákna hraða M. Höfum því að:

$$Mu = mv \implies v = \frac{M}{m}u = 2u.$$

Þannig að kubbarnir hafa ekki sama hraða. Reiknum þá hrefiorku kubbanna:

$$K_M = \frac{1}{2}Mu^2 = mu^2$$

En

$$K_m = \frac{1}{2}mv^2 = 2mu^2 > K_M$$

Svo litli kubburinn er með meiri hreyfiorku en sá stóri. Því er svarið D.

14. Kubbur með massa m fær upphafshraða v_0 upp skábretti sem hallar um horn θ miðað við lárétt. Núningsstuðullinn, $\mu < 1$, milli kubbsins og skábrettisins er þannig að kubburinn stoppar eftir að hafa runnið vegalengd d samsíða skábrettinu. Hvert af eftirfarandi myndi auka vegalengdina d?

A. Minnka upphafshraðann, v_0.

B. Minnka hornið θ.

C. Stækka núningsstuðulinn, μ.

D. Stækka massann m.

E. Taka tillit til loftmótsstöðu.

Lausn: Samkvæmt vinnulögmálinu er vegalengdin sem að kubburinn rennur upp skábrettið gefin með:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \mu mgd\cos\theta = 0 \implies d = \frac{v_0^2}{2\mu g\cos\theta}.$$

Við sjáum þar með að ef v_0 minnkar þá minnkar d. Ef μ stækkar þá minnkar d. Svarið er óháð m svo það hvorki minnkar né stækkar við það að breyta massanum. Loftmótsstaðan mun gera það að verkum að kubburinn rennur skemur þar sem að fleiri ógeymnir kraftar verka á kubbinn. Loks sjáum við að ef θ minnkar þá mun $\cos\theta$ minnka og þar með mun d aukast. Svarið er því B.

15. Dragakrafturinn, F_S, sem verkar á kúlu með geisla r og hraða v, vegna loftmótsstöðu frá vökva sem hefur seigjustuðul η, er gefinn samkvæmt lögmáli Stokes með $F_S = 6\pi\eta rv$. Hver er SI-eining seigjustuðulsins?

A. $\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}$

B. $\frac{\text{kg}^2}{\text{m}\cdot\text{s}^2}$

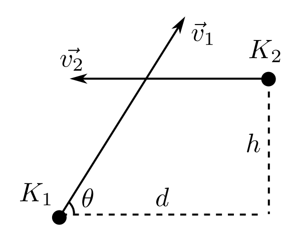
C. $\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2}$

D. $\frac{\text{kg}\cdot\text{s}}{\text{m}^2}$

E. $\frac{\text{m}}{\text{kg}}$

Lausn: Við athugum að:

$$[\eta] = \left[\frac{F_S}{6\pi rv}\right] = \frac{\text{N}}{\text{m}\cdot\frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2}}{\text{m}\cdot\frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}.$$



16. Tveir íshokkípökkar K_1 og K_2 renna án núnings á láréttu svelli. Í upphafi er K_1 í (0,0) en K_2 í (d,h). K_2 ferðast til vinstri með hraða v_2 en K_1 til hægri með hraða v_1 yfir horni θ. Hvert þarf hlutfallið $\frac{v_2}{v_1}$ að vera til þess að pökkarnir lendi í árekstri?

A. $\frac{d}{h}\tan\theta$

B. $\frac{h}{d}\sin\theta$

C. $\frac{d}{h}\sin\theta + \cos\theta$

D. $\sin\theta - \frac{d}{h}\cos\theta$

E. $\frac{d}{h}\sin\theta - \cos\theta$

Lausn: Höfum þá að:

$$x_2(t) = d - v_2 t$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1\cos(\theta)t \\ v_1\sin(\theta)t \end{pmatrix}$$

Af neðri jöfnunni sést að hann er í réttri hæð við tíma t þegar $y_1(t) = h$ en það gerist þegar $t = \frac{h}{v_1\sin\theta}$ en þar með er:

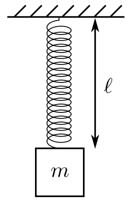
$$x_1(t) = x_2(t)$$

sem gefur því að:

$$d - v_2 \cdot \frac{h}{v_1\sin\theta} = v_1\cos\theta \cdot \frac{h}{v_1\sin\theta}$$

En þar með er:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{d}{h}\sin\theta - \cos\theta.$$



ℓ [cm]	15,5	19,1	22,7	26,4	30,0
m [kg]	0,15	0,25	0,35	0,45	0,55

17. Í töflunni hér að ofan má sjá mælingar á lengdinni, ℓ, sem lóðréttur, massalaus gormur hafði í kraftajafnvægi þegar lóð með massa m var hengt á enda gormsins. Hver er gormstuðull gormsins?

A. 0,23 N/m

B. 1,5 N/m

C. 12 N/m

D. 27 N/m

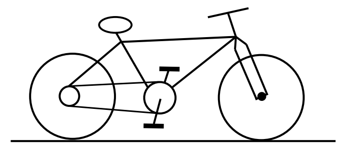
E. 250 N/m

Lausn: Látum óstrekkta lengd gormsins vera ℓ_0. Þá gildir að:

$$mg = k(\ell - \ell_0) \implies m = \frac{k}{g}\ell - \frac{k\ell_0}{g}$$

Graf af m sem fall af ℓ gefur því hallatölu $h = \frac{k}{g}$ svo við fáum að:

$$k = gh = g\frac{\Delta m}{\Delta \ell} = 27\,\mathrm{N/m}.$$



18. Á hjóli með einum gír eru tvö tannhjól. Það fremra er fast við pedalana en það aftara við afturdekkið. Geisli fremra tannhjólsins er 8,0 cm en þess aftara er 5,0 cm. Hversu langt fer hjólið þegar pedölunum er snúið heilan hring ef geisli dekkjanna er 30 cm?

A. 3,0 m

B. 3,5 m

C. 4,0 m

D. 4,5 m

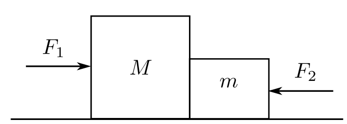
E. 5,0 m

Lausn: Látum geisla fremar tannhjólsins vera r_f en þess aftara vera r_a og geisla hjólsins vera R. Athugum að þegar fremra tannhjólið snýst heilan hring þá snýst hitt hjólið um:

$$\eta = \frac{2\pi r_f}{2\pi r_a} = \frac{r_f}{r_a} = 1{,}6\,\text{hringi}$$

En þá er vegalengdin sem hjólið ferðast:

$$2\pi R\eta = 3{,}0\,\mathrm{m}$$



19. Tveir kubbar með massa m og $M = 2m$ standa á núningslausum láréttum fleti. Fyrst ýtum við

einungis frá vinstri með krafti F_1. Næst ýtum við einungis frá hægri með krafti F_2. Í báðum tilvikum er þverkrafturinn milli M og m jafnstór. Hvert er hlutfallið $\frac{F_1}{F_2}$?

A. $\frac{1}{2}$

B. 1

C. 2

D. 3

E. $\frac{1}{3}$

Lausn: Látum a_1 vera hröðunina í fyrra tilvikinu og a_2 vera hröðunina í seinna tilvikinu. Þá gildir að:

$$(M+m)a_1 = F_1, \quad \text{Þ} = ma_1.$$

En þetta gefur okkur því að:

$$\text{Þ} = ma_1 = \frac{mF_1}{M+m}$$

Ef við skoðum seinna tilvikið þá höfum við að:

$$(M+m)a_2 = F_2, \quad \text{Þ} = Ma_2$$

Sem gefur okkur því að:

$$\frac{MF_2}{M+m} = \text{Þ} = \frac{mF_1}{M+m}$$

En þar með ályktum við að:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{M}{m} = 2.$$

20. Bílrúðan á driftkagganum hans Bjössa hallar um $15°$ horn miðað við lóðrétt. Bjössi elskar að keyra hratt í hálku og óttaslegnir farþegar bílsins taka eftir því að hann keyrir á 130 km/klst. Þetta er undarlegur dagur því það er enginn vindur og skyndilega byrjar að hellidemba haglélum beint að ofan, lóðrétt niður á bílinn. Farþegar bílsins taka eftir því að élin skoppa af rúðunni þannig að þau ferðast beint í lárétta stefnu eftir áreksturinn. Hver er hraði hagléljanna?

A. 55 km/klst

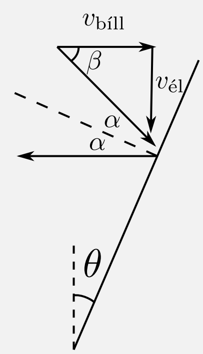
B. 65 km/klst

C. 75 km/klst

D. 85 km/klst

E. 95 km/klst

Lausn: Hér er best að skipta yfir í viðmiðunarkerfi bílsins. Þar virðast haglélin nálgast rúðuna



Af myndinni sjáum við að innfallshornið α er jafnt útfallshorninu þar að auki sem að hornaelti gefur að $\alpha = \theta$ en þar með er $2\alpha + \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2}$ sem gefur okkur að $\beta = 2\alpha = 2\theta$. En þar með ályktum við að:

$$\tan(\beta) = \frac{v_{\text{él}}}{v_{\text{bíll}}}$$

En þar með er:

$$v_{\text{él}} = \tan(\beta) v_{\text{bíll}} = 75\,\text{km/klst}.$$

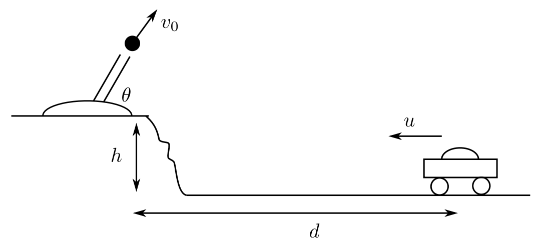
Seinni hluti

Skrifleg dæmi (30 stig)

Í þessum hluta eru tvær stærri spurningar sem gefa 15 stig hver. Sýnið útreikninga í öllum liðum. Gefin eru stig fyrir útreikninga þótt lokasvar sé ekki rétt. Athugið að hægt er að fá stig fyrir seinni liði dæmanna þótt fyrri liðir hafi ekki verið reiknaðir.

Dæmi 1: Fallbyssuhernaður (15 stig)

Fallbyssu hefur verið komið fyrir uppi á hól sem stendur í hæð $h = 98\,\mathrm{m}$ fyrir ofan jafnsléttu. Fallbyssan skýtur kúlum á $v_0 = 122{,}5\,\mathrm{m/s}$ hraða í stefnu sem myndar horn $\theta = 53{,}1°$ miðað við lárétt. Nú nálgast óvinveittur skriðdreki óðfluga með hraða $u = 10{,}0\,\mathrm{m/s}$. Fallbyssuskytta sér skriðdrekann fyrst þegar hann er í fjarlægðinni $d = 2{,}00\,\mathrm{km}$ frá fallbyssunni. Hvað á skyttan að bíða lengi með að hleypa af fallbyssunni ef hún vill hæfa óvinveitta skriðdrekann? Hunsið áhrif loftmótsstöðu.



Fallbyssukúlan uppfyllir:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos(\theta) t \\ h + v_0 \sin(\theta) t - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}.$$

Byssukúlan lendir við tíma t þegar $y(t) = 0$ þ.a.

$$-\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\theta t + h = 0.$$

En þetta er 2. stigs margliða sem hefur lausn:

$$t = \frac{-v_0 \sin\theta \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2(\theta) + 2gh}}{-g} = \frac{v_0 \sin(\theta) \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2(\theta) + 2gh}}{g} = 20{,}9\,\mathrm{s}$$

Þar sem að við hunsuðum neikvæðu lausnina. Við athugum að þá lendir kúlan í:

$$x_0 = x(t = 20{,}9\,\mathrm{s}) = v_0 \cos\theta t = 1537\,\mathrm{m}.$$

Við viljum þá að fallbyssunni sé skotið eftir tíma T þannig að $t + T = \tau$ þar sem:

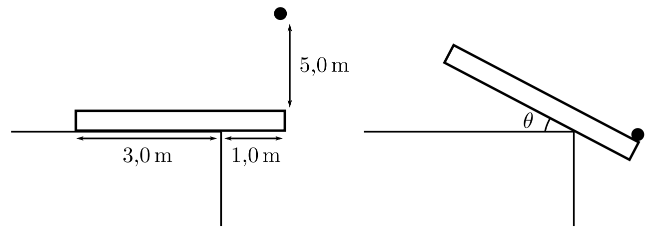
$$d - x_0 = u\tau \implies \tau = \frac{d - x_0}{u} = 46{,}3\,\mathrm{s}$$

En þar með á skyttan að bíða í

$$\boxed{T = \tau - t = 25{,}4\,\mathrm{s}.}$$

Dæmi 2: Leirklessa (15 stig)

Einsleit stöng með massa 3,0 kg og af lengd 4,0 m liggur á borði þannig að 1,0 m hennar standa fram af borðinu. Leirklessu með massa 1,0 kg er sleppt úr kyrrstöðu úr 5,0 m hæð yfir enda stangarinnar. Leirklessan festist við enda stangarinnar. Um hversu stórt horn snýst stöngin áður en hún stöðvast um stund í efstu stöðu?



Lausn: Látum $M = 3{,}0\,\mathrm{kg}$, $m = 1{,}0\,\mathrm{kg}$, $h = 5{,}0\,\mathrm{m}$ og $\ell = 4{,}0\,\mathrm{m}$.

Með orkuvarðveislu (eða stöðujöfnunum) fæst að hraði leirklessunnar rétt áður en hún lendir er:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \implies v = \sqrt{2gh} = 9{,}9\,\mathrm{m/s}.$$

Orkan er ekki varðveitt í árekstrinum þar sem hluti orkunnar fyrir áreksturinn fer í að auka varmaorku leirklessunnar og stangarinnar. Hinsvegar þá er hverfiþungi kerfisins varðveittur í árkestrinum því ekkert utanaðkomandi kraftvægi verkar á kerfið í árekstrinum. Snúningsásinn er um punktinn á enda borðsins. Hverfitregða stangarinnar um endapunkt borðsins fæst með reglu Steiners:

$$I_{\text{stöng}} = I_{\text{cm}} + Md^2 = \frac{1}{12}M\ell^2 + M\left(\frac{1}{4}\ell\right)^2 = \frac{7}{48}M\ell^2 = 7{,}0\,\mathrm{kg\,m^2}.$$

Eftir að leirklessan lendir þá verður hverfitregða kerfisins um snúningsásinn:

$$I_{\text{heild}} = I_{\text{stöng}} + I_{\text{leirklessa}} = I_{\text{stöng}} + m\left(\frac{1}{4}\ell\right)^2 = 8{,}0\,\mathrm{kg\,m^2}.$$

Hverfiþungavarðveislan gefur því að:

$$mv\frac{\ell}{4} = I_{\text{heild}}\omega \implies \omega = \frac{mv\ell}{4I_{\text{heild}}} = 1{,}2\,\mathrm{rad/s}.$$

Massamiðja stangarinnar mun rísa um hæð $y = \frac{\ell}{4}\sin\theta$ en leirklessan mun síga um sömu hæð. Í efstu stöðu er stöngin kyrr svo við höfum samkvæmt orkuvarðveislu að:

$$\frac{1}{2}I_{\text{heild}}\omega^2 = Mgy - mgy = (M-m)g\frac{\ell}{4}\sin\theta \implies \boxed{\theta = \arcsin\left(\frac{2I_{\text{heild}}\omega^2}{(M-m)g\ell}\right) = 18^\circ.}$$