Eðlisfræðifélag Íslands
Félag raungreinakennara

13. febrúar 2024
kl. 10-12

Landskeppni í eðlisfræði 2024

- **Leyfileg hjálpargögn:** Reiknivél sem geymir ekki texta.
- Verkefnið er í tveimur hlutum og er samtals 100 stig. Gætið þess að lesa leiðbeiningar vel.
- Fyrsti hlutinn (60 stig) samanstendur af 15 krossaspurningum sem vega 4 stig hver.
- Annar hlutinn (40 stig) samanstendur af 4 skriflegum spurningum sem vega 10 stig hver.
- **Athugið að ekki er dregið niður fyrir röng svör.**

Nafn: ______________________________

Kennitala: ______________________________

Skóli: ______________________________

Sími: ______________________________

Netfang: ______________________________

Heimilisfang: ______________________________

Hvenær lýkur þú stúdentsprófi: ______________________________

Þekktir fastar

Nafn	Tákn	Gildi
Hraði ljóss í tómarúmi	c	$3{,}00 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}$
Segulsvörunarstuðull tómarúms	μ_0	$1{,}26 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N/A^2}$
Rafsvörunarstuðull tómarúms	ϵ_0	$8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$
Coulombs fastinn	k_e	$8{,}99 \cdot 10^{9}\,\mathrm{N\,m^2/C^2}$
Grunnhleðslan	e	$1{,}60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Massi rafeindar	m_e	$9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Massi róteindar	m_p	$1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Avogadrosar talan	N_A	$6{,}02 \cdot 10^{23}\,\mathrm{1/mól}$
Gasfastinn	R	$8{,}31\,\mathrm{J/(K\,mól)}$
Stefan-Boltzmann fastinn	σ	$5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W/(m^2K^4)}$
Þyngdarhröðun við yfirborð jarðar	g	$9{,}82\,\mathrm{m/s^2}$
Þyngdarlögmálsfastinn	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg\,s^2)}$
Planck fastinn	$\hbar$	$1{,}05 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
Boltzmann fastinn	k_B	$1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$

1. Hversu margar sekúndur eru í einum sólarhring?

   A. 23.000 s

   B. 36.000 s

   C. 72.000 s

   D. 86.400 s

   E. 100.000 s

Lausn: $T = 24 \cdot 60^2 = 86.400\,\mathrm{s}$.

2. Eitt ljósár er skilgreint sem sú vegalengd sem að ljósið ferðast á einu ári. Hraði ljóss í tómarúmi er $c = 3{,}00 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ Hversu langt er ljósár?

   A. $3{,}11 \cdot 10^7\,\mathrm{s}$

   B. $3{,}84 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$

   C. $1{,}50 \cdot 10^9\,\mathrm{m}$

   D. $2{,}23 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}$

   E. $9{,}46 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}$

Lausn: $d = ct = 9{,}46 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}$.

3. Kínverski sundkappinn Sun Yang setti heimsmet í 1500 m skriðsundi þegar hann kláraði sundið á 14 mínútum og 34 sekúndum. Hver var meðalhraði Sun Yang í sundinu?

   A. 1,7 m/s

   B. 2,7 m/s

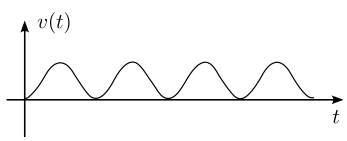
   C. 3,7 m/s

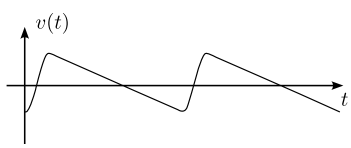
   D. 4,7 m/s

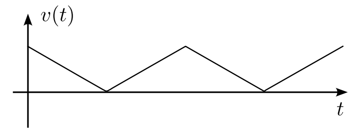
   E. 5,7 m/s

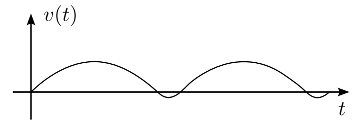
Lausn: $v_m = \frac{d}{t} = 1{,}7\,\mathrm{m/s}$.

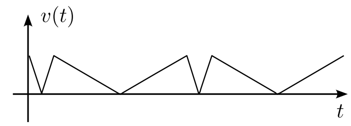
4. Lítum á manneskju sem er að hoppa á trampólíni. Hvert af eftirfarandi gröfum lýsir best hraða manneskjunnar sem fall af tíma frá því að hún lendir á trampólíninu við tímann $t = 0$ og þar til að hún hefur skoppað tvisvar á trampólíninu.

   A. 

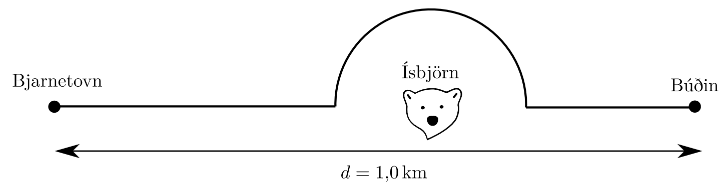
   B. 

   C. 

   D. 

   E. 

Lausn: Hraði niður á við er neikvæður svo B lýsir hraða í trampólínstökki best.



5. Tjøtta býr í norðurhluta Noregs í smábænum Bjarnetovn. Hún er að halda risaveislu og ætlar að gera eggjaböku. Tjøtta leggur af stað í næstu búð í 1,0 km fjarlægð til að kaupa egg. Hún mætir ísbirni á leiðinni og gengur þá í hálfhring umhverfis björninn svo aldrei séu minna en 150 m á milli þeirra, og svo beinustu leið í búðina. Hún gengur fram og tilbaka með sama hraða 1,0 m/s. Hversu langan tíma tekur þessi búðarferð?

   A. 33 mínútur

   B. 39 mínútur

   C. 45 mínútur

   D. 51 mínútur

   E. 57 mínútur

Lausn: Fáum þá að:

$$t = \frac{2(d + (\pi - 2)r)}{v} = 39\,\text{mín}.$$

6. Bolta er kastað upp í loftið. Hver af eftirfarandi fullyringum er **rétt**? Hunsið loftmótsstöðu.

   A. Í efsta punkti er hröðun boltans núll.

   B. Meðalhraði boltans er meiri á leiðinni niður en á leiðinni upp.

   C. Krafturinn sem að verkar á boltann skiptir um stefnu í efsta punkti.

   D. Snúningskraftur verkar á boltann ef hann snýst.

E. Það er fastur kraftur sem að verkar á boltann á meðan hann er í loftinu.

> **Lausn:** Þyngdarkrafturinn verkar á boltann á meðan hann er í loftinu.

7. Fleki sem smíðaður er úr furu með eðlismassa $600\,\mathrm{kg/m^3}$ hefur massa $450\,\mathrm{kg}$. Hversu mikið getur flekinn borið? Eðlismassi vatns er $1000\,\mathrm{kg/m^3}$.

   A. 120 kg

   B. 200 kg

   C. 300 kg

   D. 367 kg

   E. 400 kg

> **Lausn:** Kraftajafnan gefur þá:
>
> $$\rho_v V_f g = F_{\mathrm{upp}} = (M + m_f)g,$$
>
> en $\rho_f V_f = m_f$ þannig að
>
> $$\frac{\rho_v}{\rho_f} m_f = (M + m_f),$$
>
> sem gefur því að:
>
> $$M = \left(\frac{\rho_v}{\rho_f} - 1\right) m_f = 300\,\mathrm{kg}.$$

8. Barn (20 kg) og móðir (80 kg) eru að vega salt. Vegasaltið er alls 4,0 m að lengd og barnið situr út í enda. Hver á fjarlægð móðurinnar frá **enda** vegasaltsins að vera til að það sé í jafnvægi?

   A. 0 m

   B. 0,25 m

   C. 0,75 m

   D. 1,5 m

   E. 1,75 m

> **Lausn:** Látum $\ell = 2{,}0\,\mathrm{m}$ og x vera fjarlægðina frá enda. Þá er:
>
> $$Mg(\ell - x) = mg\ell$$
>
> En það gefur að:
>
> $$x = \left(1 - \frac{m}{M}\right)\ell = 1{,}5\,\mathrm{m}.$$

9. Tveir kubbar lenda í árekstri. Annar hefur massa 1 kg og hraða 3 m/s til hægri en hinn hefur massa 2 kg og hraða 1 m/s til vinstri. Kubbarnir festast saman í árekstrinum. Hver af eftirfarandi fullyrðingum er **röng**?

   A. Kubbarnir ferðast til hægri eftir áreksturinn.

   B. Skriðþungi kubbanna er varðveittur í árekstrinum.

   C. Hreyfiorka kubbanna er varðveitt í árekstrinum.

   D. Þyngdarstöðuorka kubbanna er varðveitt í árekstrinum.

   E. Heildarkrafturinn sem að verkar á kubbana í árekstrinum er núll.

> **Lausn:** Hraði kubbanna eftir áreksturinn ákvarðast af skriðþungavarðveislunni:
>
> $$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u$$
>
> en það gefur því að
>
> $$u = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 0{,}33\,\mathrm{m/s}$$
>
> Hreyfiorka kubbanna er ekki varðveitt því
>
> $$K_{\mathrm{fyrir}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = 5{,}5\,\mathrm{J},$$
> $$K_{\mathrm{eftir}} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 = 0{,}17\,\mathrm{J}.$$

10. Tvær plánetur, A og B, hafa sama eðlismassa. Pláneta A hefur tvisvar sinnum stærri geisla en B. Þyngdarhröðunin á plánetu A er g_A og á plánetu B er hún g_B. Hvert er hlutfallið g_A/g_B?

   A. $\frac{1}{4}$

   B. $\frac{1}{2}$

   C. 1

   D. 2

   E. 4

> **Lausn:** Athugum að:
>
> $$\frac{g_A}{g_B} = \frac{\frac{GM_A}{R_A^2}}{\frac{GM_B}{R_B^2}} = \frac{\rho_A}{\rho_B}\frac{R_A}{R_B} = 2.$$

11. Punkthleðslur $q_1 = +20\,\mu\mathrm{C}$ og $q_2 = +5{,}0\,\mu\mathrm{C}$ liggja í fjarlægð 15 cm frá hvorri annarri. Rafeind á strikinu á milli þeirra hefur enga hröðun. Hve langt frá **stærri** hleðslunni er hún?

A. 3,8 cm

B. 9,5 cm

C. 10 cm

D. 12 cm

E. 14 cm

Lausn: Látum $d = 15$ cm. Látum hleðsluna vera í fjarlægð x frá q_1 og þá $d - x$ frá q_2. Fáum þá að:

$$\frac{kq_1e}{x^2} = \frac{kq_2e}{(d-x)^2}$$

en þetta má þá einangra sem:

$$\left(\frac{d}{x} - 1\right)^2 = \frac{q_2}{q_1}$$

þannig að

$$x = \frac{d}{1 \pm \sqrt{\frac{q_2}{q_1}}} = \begin{cases} 10\,\text{cm} \\ 30\,\text{cm}. \end{cases}$$

12. Tveir bílar með massa 1000 kg keyra fyrir horn með hraða 50 km/klst og klessa hornrétt á hvor annan. Við áreksturinn festast bílarnir saman. Núningsstuðullinn milli dekkja bílanna og malbiksins er $\mu = 0{,}70$. Hversu langt renna bílarnir saman eftir áreksturinn áður en þeir stöðvast?

A. 1,0 m

B. 3,0 m

C. 5,0 m

D. 7,0 m

E. 9,0 m

Lausn: Skriðþungavarðveislan gefur að hraði bílanna beint eftir áreksturinn er:

$$\begin{pmatrix} mv \\ mv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2mu\cos\theta \\ 2mu\sin\theta \end{pmatrix}$$

en það gefur að hornið er $\arctan(1) = 45°$ og því $u = \frac{v}{2\cos(45°)}$. Bílarnir renna þá:

$$\frac{1}{2}(2m)u^2 - \mu(2m)gd$$

en það gefur því að:

$$d = \frac{u^2}{2\mu g} = \frac{v^2}{4\mu g} = 7{,}0\,\text{m}$$

13. Matthildur er að renna sér á sleða niður Plútóbrekku. Matthildur og sleðinn eru 30 kg og brekkan er 10 m löng og hallar um 30° horn miðað við jafnsléttu. Núningsstuðullinn milli sleðans og snjósins er $\mu = 0{,}20$. Hver verður hraði Matthildar þegar hún kemur niður brekkuna?

A. 3,5 m/s

B. 5,0 m/s

C. 6,5 m/s

D. 8,0 m/s

E. 9,5 m/s

Lausn: Fáum þá að hröðunin niður brekkuna er:

$$a = g(\sin\theta - \mu\cos\theta) = 3{,}21\,\text{m/s}^2.$$

En þar með er hraðinn:

$$v = \sqrt{2ad} = 8{,}0\,\text{m/s}.$$

14. Lítil kúla með massa $m = 0{,}10$ kg er föst við massalausan gorm með gormstuðul $k = 75$ N/m sem hangir úr loftinu í herbergi af hæð $h = 2{,}0$ m. Gormurinn er í jafnvægisstöðu í hæð $\frac{h}{2}$. Kúlan er dregin niður að gólfinu og er síðan sleppt úr kyrrstöðu. Hver er hraði kúlunnar þegar kúlan er stödd í jafnvægispunktinum?

A. 17 m/s

B. 27 m/s

C. 37 m/s

D. 47 m/s

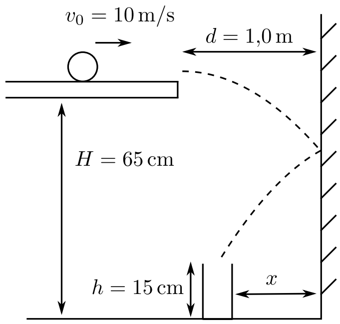
E. 57 m/s

Lausn: Þetta er aðeins erfiðara en það átti að vera því að gormurinn hefur lengst örlítið um $x_0 = \frac{mg}{k}$ þegar kúlan var fest á hann. Það er því nú þegar gormstöðuorka í kerfinu. Þar sem að við höfum að $x_0 = 1{,}3\,\text{cm} \ll \frac{1}{2}h = 1{,}0\,\text{m}$ þá leyfum við okkur að hunsa framlagið frá þessu örlitla fráviki frá jafnvægisstöðunni. Þá fæst einfaldlega með orkuvarðveislu:

$$\frac{1}{2}k\left(\frac{h}{2}\right)^2 = mg\frac{h}{2} + \frac{1}{2}mv^2$$

en þá er

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}\frac{h^2}{4} - gh} = 27\,\text{m/s}.$$



15. Tommi og vinir hans eru að taka upp trick-shot myndband. Þeir vilja láta kúlu rúlla af borði, skoppa af vegg og lenda ofan í Pringles dós. Þvermál kúlunnar og op dósarinnar eru jöfn svo þeir verða að stilla dósinni nákvæmlega upp. Borðið er í 65 cm hæð, 1,0 m frá veggnum og hæð dósarinnar er 15 cm. Þeir láta kúluna renna af borðinu með 10 m/s hraða. Hvað eiga þeir að setja dósina langt frá veggnum?

   A. 20 cm

   B. 50 cm

   C. 75 cm

   D. 1,5 m

   E. 2,2 m

Lausn: Kúlan lendir í Pringles dósinni eftir $H - h = \frac{1}{2} g \tau^2$ en það gefur að

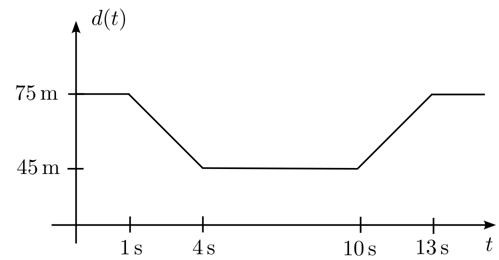
$$\tau = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} = 0{,}32\,\mathrm{s}.$$

En þá þarf

$$d + x = v_0 \tau \implies x = v_0 \tau - d = 2{,}2\,\mathrm{m}.$$

Múlakvíslarbrú (10 stig)

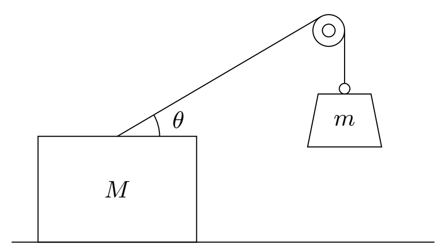
Tveir bílar keyra með jöfnum hraða 90 km/klst á þjóðveginum. Bilið milli bílanna er 75 m þar til að fremri bíllinn kemur að Múlakvíslarbrú þá lækkar hann samstundis hraðann og heldur jöfnum hraða á meðan að hann er á brúnni. Seinni bíllinn gerir slíkt hið sama þegar hann kemur að brúnni. Grafið sýnir fjarlægðina á milli bílanna sem fall af tíma. Hver er lengd brúarinnar?



Lausn: Þegar seinni bíllinn kemur að brúnni eru 45 m á milli bílanna, sem þýðir að fyrri bíllinn er kominn 45 m áfram á brúna. Hann er þá búinn að vera á brúnni í 3 s, svo hraði bílanna á brúnni er 15 m/s. Bílarnir eru á brúnni í 9 s, svo lengdin er 135 m.

Skátrissa (10 stig)

Lítið lóð með massa $m = 1{,}0\,\mathrm{kg}$ hangir lóðrétt í massalausu bandi yfir litla trissu. Hinn endi bandsins er festur við stóran kassa með massa $M = 2{,}0\,\mathrm{kg}$ sem stendur á láréttum fleti. Stóra kassanum er nú ýtt eins langt og unnt er til vinstri þar til að bandið fer að draga hann til hægri. Minnsta hornið þannig að kassinn rétt svo haldist kyrr í þeirri stöðu er $\theta = 30°$. Hver er núningsstuðullinn, μ, milli kassans og flatarins?



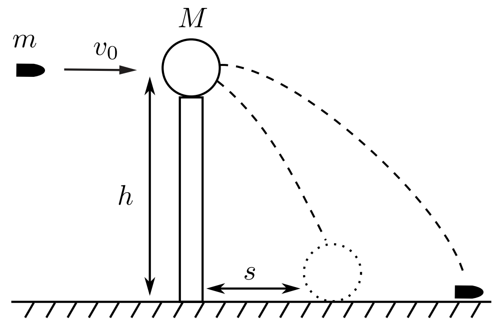
Lausn: Kraftajöfnurnar verða:

$$T = mg, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Þ + T\sin\theta - Mg \\ T\cos\theta - F_{\text{nún}} \end{pmatrix}$$

En þar með höfum við að:

$$F_{\text{nún}} = \mu Þ = T\cos\theta \implies \mu = \frac{T\cos\theta}{Mg - T\sin\theta} = \frac{m\cos\theta}{M - m\sin\theta} = 0{,}58.$$

Byssukúla (10 stig)



Lítill bolti með massa $M = 200\,\text{g}$ hvílir á lóðréttri súlu í hæð $h = 5{,}0\,\text{m}$. Byssukúla með massa $m = 10\,\text{g}$ og upphafshraða $v_0 = 500\,\text{m/s}$ flýgur lárétt í gegnum massamiðju boltans. Boltinn lendir á jörðinni í láréttri fjarlægð $s = 20\,\text{m}$ frá súlunni. Í hvaða láréttu fjarlægð frá súlunni lendir byssukúlan? Hunsið loftmótsstöðu.

Lausn: Látum byssukúluna lenda í láréttri fjarlægð x frá súlunni. Boltinn og byssukúlan eru jafn lengi í loftinu á leiðinni niður og lenda á jörðinni eftir tíma τ þegar:

$$h = \frac{1}{2} g \tau^2 \implies \tau = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 1{,}01\,\text{s}.$$

Látum v tákna hraða m rétt eftir áreksturinn og látum u tákna hraða M rétt eftir áreksturinn. Þar sem að M lendir í láréttri fjarlægð s frá súlunni þá höfum við að:

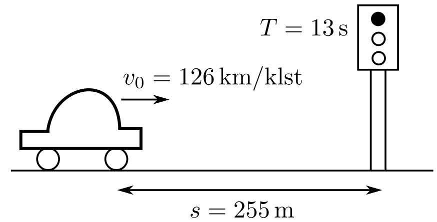
$$u\tau = s \implies u = \frac{s}{\tau} = 19{,}8\,\text{m/s}.$$

Skriðþungavarðveislan leyfir okkur þá að ákvarða hraða byssukúlunnar

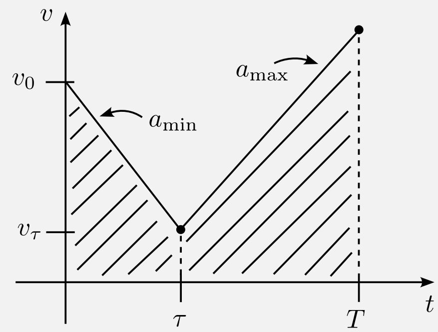
$$mv_0 = Mu + mv \implies v = v_0 - \frac{M}{m} u = 104\,\text{m/s}.$$

En það leyfir okkur loks að ákvarða $x = v\tau = 110\,\text{m}$.

Umferðarljós (10 stig)



Stefanía stuðbolti er að keyra með $v_0 = 126\,\mathrm{km/klst}$ þegar að skyndilega verða umferðarljósin $s = 255\,\mathrm{m}$ fyrir framan hana rauð. Hún veit að ljósin verða græn aftur eftir $T = 13\,\mathrm{s}$. Stefanía ætlar að fara yfir ljósin nákvæmlega þegar að þau verða aftur græn með sem mestum hraða. Bíllinn getur mest bremsað með hröðun $a_{\min} = -7{,}0\,\mathrm{m/s^2}$ en mesta hröðunin sem að bensíngjöfin gefur er $a_{\max} = +4{,}0\,\mathrm{m/s^2}$. Með öðrum orðum er hröðun bílsins, a, á sérhverjum tímapunkti $a_{\min} \leq a \leq a_{\max}$. Hvernig kemst Stefanía yfir ljósin nákvæmlega þegar að þau verða græn með sem mestum hraða og hver er sá hraði?



Lausn: Ákvörðum fyrst minnsta gildið og sýnum síðan að ekkert gildi geti verið minna. Til að lágmarka gildið látum við Stefaníu keyra með hröðun $a_{\min}$ í tíma τ og gefa síðan í með $a_{\max}$ restina af tímanum í $T-\tau$. Flatarmálið undir hraða-tíma grafinu er jafnt s þannig að við fáum að:

$$s = v_\tau T + \frac{1}{2}(v_0 - v_\tau)\tau + \frac{1}{2}(v - v_\tau)(T - \tau).$$

Höfum síðan að $v_\tau = v_0 + a_{\min}\tau$ og $v = v_\tau + a_{\max}(T - \tau)$.
En þar með höfum við fengið að:

$$s = (v_0 + a_{\min}\tau)T - \frac{1}{2}a_{\min}\tau^2 + \frac{1}{2}a_{\max}(T - \tau)^2.$$

En þetta er því 2. stigs margliða í τ. Við getum skrifað hana á aðeins hefðbundnara formi sem:

$$\frac{1}{2}(a_{\max} - a_{\min})\tau^2 - (a_{\max} - a_{\min})T\tau + \left(\frac{1}{2}a_{\max}T^2 + v_0 T - s\right) = 0.$$

En þar með fæst að

$$\tau = T\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{a_{\max}T^2 + 2v_0 T - 2s}{(a_{\max} - a_{\min})T^2}}\right) = \begin{cases} 4{,}56\,\mathrm{s} \\ 21{,}4\,\mathrm{s}. \end{cases}$$

Þar sem $\tau < T = 13\,\mathrm{s}$ veljum við efri lausnina. Þá er sér í lagi lokahraði Stefaníu:

$$v = v_0 + (a_{\min} - a_{\max})\tau + a_{\max}T = 36{,}8\,\mathrm{m/s} = 133\,\mathrm{km/klst}.$$

Sýnum nú að þetta hámarki hraða Stefaníu þegar að hún fer yfir ljósin (það þurfti ekki að gera þetta í keppninni). Látum því $x(t)$ vera annan feril sem að uppfyllir sömu skilyrði en þannig að $x'(T) = V > v$. Ferillinn verður að liggja fyrir ofan línuna sem hröðunin $a_{\min}$ afmarkar fyrstu τ sekúndurnar (annars væri $x''(t) < a_{\min}$ á leiðinni). En þar með verður hraðinn í τ að vera $x'(\tau) \geq v_\tau$. Skoðum fyrst ef $x'(\tau) = v_\tau$. Þá væri meðalhröðunin síðustu $T - \tau$ sekúndurnar:

$$a_{\text{meðal}} = \frac{V - v_\tau}{T - \tau} \geq \frac{v - v_\tau}{T - \tau} = a_{\max}$$

sem er mótsögn. Því þarf $x'(\tau) > v_\tau$. Fyrir tímabilið $T - \tau$ þá getur $x(t)$ ekki skorið ferilinn sem ferðast með hámarkshröðun $a_{\max}$ því ef hann skæri ferilinn þá þyrfti $x''(t) > a_{\max}$ á einhverjum tímapunkti eftir það til þess að ná $V > v$. Höfum því sýnt að ferilinn $x(t)$ liggur fyrir ofan ferilinn en það er mótsögn því þá er flatarmálið undir hraða-tíma grafi $x(t)$ meira heldur en s.