Landskeppni í eðlisfræði 2004
úrslitakeppni - fræðilegur hluti

28. febrúar 2004, fyrir hádegi. Leyfilegur tími er 180 mínútur.

Almennar leiðbeiningar

1. Opnið ekki verkefnaheftin fyrr en ykkur er sagt að gera það.
2. Einu leyfilegu hjálpargögnin eru óforritanlegar reiknivélar.
3. Verkefnunum skal svarað á sérstök svarblöð, ekki í verkefnaheftið. Merkið svarblöðin samkvæmt leiðbeiningum sem gefnar verða á töflu. Ef svarblöðin duga ekki má biðja um fleiri slík. Ekki verður farið yfir rissblöð.
4. Verkefnin eru alls sex og vægi hvers dæmis er 10 stig.
5. Ekki er endilega gert ráð fyrir að neinn keppandi geti svarað öllum verkefnunum. Þó að þið svarið aðeins hluta verkefnanna getur árangur vel verið góður. Sum verkefnin eru mjög erfið.
6. Verkefnin eru öll í nokkrum liðum. Ef einhverjum lið er svarað rangt og svarið notað í síðari liðum verður ekki dregið frá í seinni liðum svo framarlega sem útreikningarnir séu réttir.

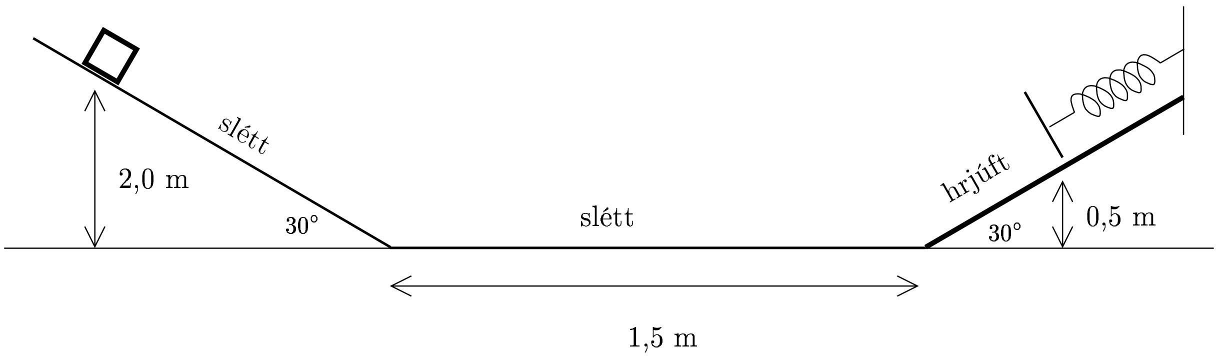
1 Galíleó í skakka turninum

Gerum ráð fyrir því að Galíleó sé staddur í skakka turninum í Písa. Hann kastar fallbyssukúlu beint niður úr hæð H yfir jörðu með upphafshraða v_0. Á nákvæmlega sama tíma kastar vinur hans annarri fallbyssukúlu beint upp frá jörðu með upphafshraða $2v_0$. Þegar kúlurnar rekast saman ferðast þær í sömu átt en fallbyssukúla Galíleós er á sjö sinnum meiri hraða en kúla vinarins. Sleppið áhrifum loftmótstöðu.

(a) Á hvaða tíma rekast kúlurnar saman? Gefið svarið sem fall af H og v_0 eingöngu.

(b) Í hvaða hæð yfir jörðu verður áreksturinn? Gefið svarið sem fall af H eingöngu.

2 Kassi á skábraut



Litlum kassa sem vegur 5,0 N er sleppt úr kyrrstöðu í 2,0 m hæð á núningslausri skábraut sem hallar um 30° miðað við lárétt. Kassinn rennur niður skábrautina og áfram eftir láréttu 1,5 m löngu núningslausu borði að annarri skábraut sem hallar um 30° upp. Seinni skábrautin hefur hrjúft yfirborð og á hana hefur verið festur gormur með kraftstuðul 20 N/m. Neðri endi gormsins er í 0,5 m hæð.

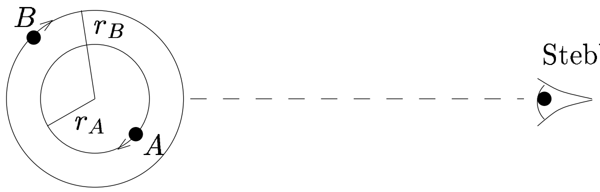
Núningsstuðullinn á milli kassans og hrjúfu skábrautarinnar er $\mu_k = 1/\sqrt{3}$ ef kassinn er á ferð en $\mu_s = 1/\sqrt{2}$ ef kassinn er kyrrstæður.

(a) Hver er mesta hæð sem kassinn nær á hrjúfu skábrautinni?

(b) Hversu oft rennur kassinn upp hrjúfu skábrautina?

(c) Hvar stöðvast kassinn endanlega?

3 Stebbi skoðar tvístirni

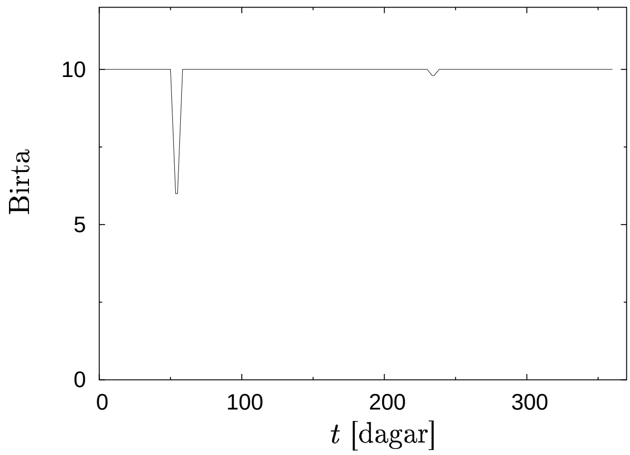


Stebbi stjörnufræðingur skoðar tvístirni með stjörnunum A og B eins og sjá má á myndinni hér að ofan. Stjörnurnar ganga eftir hringlaga brautum um sameiginlega massamiðju.

(a) Ef m_A og m_B eru massar stjarnanna og r_A og r_B geislar hringferla þeirra, sýnið að

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{r_B}{r_A}.$$

Því miður fyrir Stebba getur hann ekki greint stjörnurnar A og B í sundur. Hann veit hins vegar að hann er að horfa á tvístirni frá hlið, því birtan frá stjörnunum breytist lotubundið með tíma eins og sýnt er á myndinni hér til hliðar. Stebbi getur einnig mælt litróf frá stjörnunum þar sem eru áberandi litrófslínur. Hann sér tvö róf sem færast lotubundið til í tíðni með sömu lotu og birtubreytingin en rófin eru í mótfasa hvort við annað.



Birta tvístirnisins sem fall af tíma. Mynstrið er lotubundið en hér er einungis sýnd ein lota.

(b) Stebbi velur sér vetnislínu sem hann sér í báðum rófunum. Fyrir stjörnu A er hámarkstíðnin á línunni $f_{A,\text{max}} = 4,56832 \cdot 10^{14}$ Hz en lágmarkstíðnin $f_{A,\text{min}} = 4,56778 \cdot 10^{14}$ Hz. Fyrir stjörnu B eru samsvarandi tíðnir $f_{B,\text{max}} = 4,56880 \cdot 10^{14}$ Hz og $f_{B,\text{min}} = 4,56742 \cdot 10^{14}$.

Finnið hraða stjarnanna A og B.

(c) Ef v_A og v_B tákna hraða stjarnanna, sýnið að

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{r_A}{r_B} = \frac{m_B}{m_A}.$$

(d) Finnið massa stjarnanna, m_A og m_B.

Gagnlegir fastar: $c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s, $G = 6,672 \cdot 10^{-11}$ N·m^2/s^2.

4 Bland í poka

Tólúen er litlaust, fljótandi kolvatnsefni sem er meðal annars notað við framleiðslu á sprengiefninu TNT. Tólúen þenst út ef það er hitað og rúmmálið má skrifa sem

$$V(T) = V_0(1 + \alpha T)$$

þar sem V_0 er rúmmálið við $0°\text{C}$ og $\alpha = 0,001\ \text{C}^{-1}$.

Vísindamaður á tilraunastofu er með tólúen í tveimur einangrandi bollum. Í öðrum bollanum eru 300 ml við $0°\text{C}$ en rúmmálið í hinum bollanum er 100 ml og hitastigið $100°\text{C}$. Nú blandar vísindamaðurinn öllum vökvanum varlega saman í nýtt ílát án þess að tapa neinum varma.

(a) Hvert verður lokahitastigið?

(b) Hvert verður heildarrúmmálið eftir blöndun?

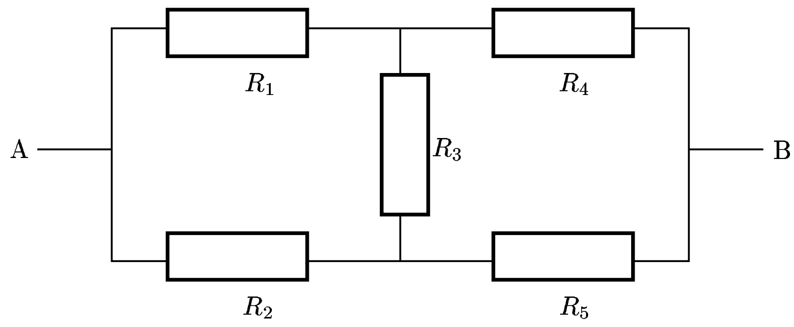
Í næstu tilraunastofu er annar vísindamaður að rannsaka eitraða lofttegund sem hegðar sér eins og kjörgas. Hann er með 300 ml af gasinu við $0°\text{C}$ og 100 ml við $100°\text{C}$ í sitthvorri blöðrunni. Þrýstingurinn í blöðrunum er sami og loftþrýstingurinn á tilraunastofunni. Nú blandar vísindamaðurinn öllu gasinu varlega saman í nýja blöðru.

(c) Hvert verður lokahitastigið?

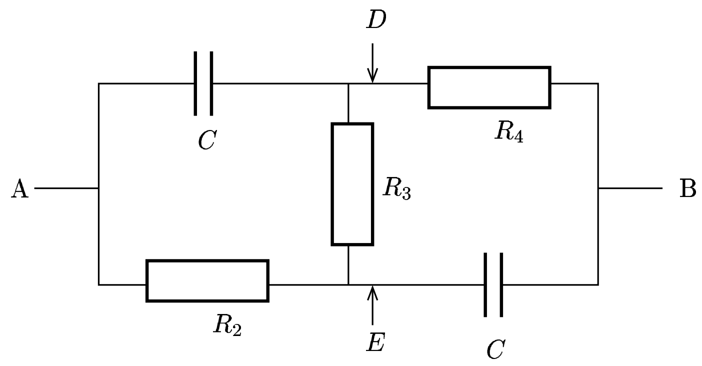
(d) Hvert verður heildarrúmmálið eftir blöndun?

5 Rafrás

a) Höfum rás eins og á mynd. Gefum okkur að $R_1 = R_5 = 1\,\Omega$, $R_2 = R_4 = 2\,\Omega$ og $R_3 = 4\,\Omega$. Hvert er heildarviðnámið milli A og B?

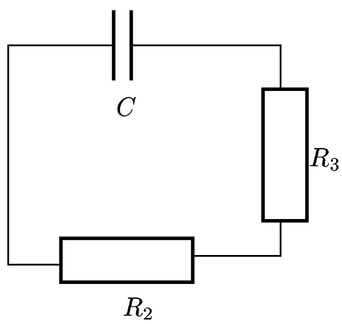


b) Skiptum nú út viðnámum R_1 og R_5 fyrir tvo þétta með rýmdina $C = 10\,\mu$F hvor. Spenna $V = 10$ V er sett á milli A og B. Hver er straumurinn í viðnáminu R_3 eftir að þéttarnir hafa hlaðist upp?



c) Finnið hleðsluna á þéttinum, sem er tengdur A, þegar hann er fullhlaðinn.

d) Nú er spennugjafinn aftengdur og klippt er á rásina í punktunum D og E. Þetta gerist á tíma $t = 0$. Hver er straumurinn í viðnámi R_3 á tíma $t = 120\,\mu$s?



6 Drude-líkanið

Í þessu verkefni ætlum við að skoða leiðni málma út frá líkani sem Paul Drude setti fram árið 1900, þremur árum eftir að Thomson uppgötvaði rafeindina. Í Drude-líkaninu er litið á málminn sem rafeindagas og honum lýst með hreyfifræði gasa.

Látum N vera fjölda rafeinda í rúmmálinu V og $n = N/V$ vera rafeindaþéttleika málmsins.

Annar mikilvægur mælikvarði á rafeindaþéttleikann er stikinn r_s. Hann er skilgreindur sem geisli (radíus) kúlu sem hefur sama rúmmál og hver rafeind hefur til umráða í málminum. Gert er ráð fyrir því að rafeindirnar skipti heildarrúmmálinu jafnt á milli sín.

(a) Finnið tengslin á milli r_s og n.

Ef rafsvið E er sett yfir vírbút með þverskurðarflatarmál A kemur fram straumur I. Leiðni vírsins, σ, er skilgreind með jöfnunni

$$I = A\sigma E.$$

Gerum ráð fyrir því að allar rafeindirnar í vírnum ferðist með sama hraða v_d.

(b) Sýnið að

$$I = A\,n\,e\,v_d$$

þar sem $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C er rafeindahleðslan.

Skoðum nú 1,00 m langan koparvírbút þar sem spennumunurinn á milli endanna er 2,00 V. Gefin er leiðni kopars $\sigma = 5,88 \cdot 10^5 (\Omega\,\mathrm{cm})^{-1}$ og $r_s = 1,41 \cdot 10^{-10}$ m.

(c) Finnið hraða rafeindanna v_d.

Rafeindir eru Fermíeindir og samkvæmt skammtafræði fylgir þeim svokölluð Fermíorka E_F. Sýna má að þessi orka er eingöngu háð rafeindaþéttleikanum og náttúrulegum föstum og eru tengslin

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{9\pi}{4r_s^3}\right)^{2/3}$$

þar sem $\hbar = 6,582 \cdot 10^{-16}$ eV·s er fasti Plancks og $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}$ kg er massi rafeindarinnar.

(d) Finnið Fermíorkuna fyrir kopar, mælda í rafeindavoltum.

Skammtafræðin leiðir einnig í ljós að meðalhreyfiorka rafeinda $K_{\text{meðal}}$ í málminum er tengd Fermíorkunni

$$K_{\text{meðal}} = \frac{3}{5}E_F.$$

(e) Notið þetta til að finna meðalhraða rafeinda í kopar $v_{\text{meðal}}$.

(f) Berið saman hraðana v_d og $v_{\text{meðal}}$ fyrir kopar. Útskýrið muninn.

Athugið: Hér er ekki ætlast til þess að þið kunnið skammtafræði. Hegðunin sem hér um ræðir á sér hliðstæðu í náttúrunni og í klassískri eðlisfræði. Drude-líkanið er hálf-klassískt svo þið þurfið einungis að notast við klassíska kunnáttu til að svara þessu verkefni.