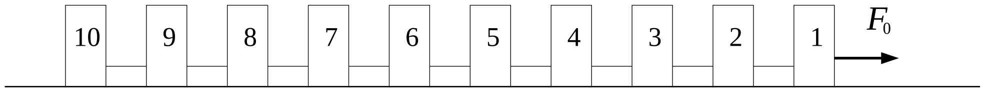
Landskeppnin í eðlisfræði 2006
úrslitakeppni - fræðilegur hluti

4. mars 2006, fyrir hádegi. Leyfilegur tími er 180 mínútur.

Almennar leiðbeiningar

1. Opnaðu ekki verkefnaheftið fyrr en þér er sagt að gera það.
2. Einu leyfilegu hjálpargögnin eru óforritanlegar reiknivélar.
3. Verkefnunum skal svarað á sérstök svarblöð, ekki í verkefnaheftið. Merktu svarblöðin samkvæmt leiðbeiningum sem gefnar verða á töflu. Ef svarblöðin duga ekki má biðja um fleiri slík. Ekki verður farið yfir rissblöð.
4. Verkefnin eru alls sex og vægi hvers dæmis er 10 stig.
5. Ekki er endilega gert ráð fyrir að neinn keppandi geti svarað öllum verkefnunum. Þó að þú svarir aðeins hluta verkefnanna, getur árangur vel verið góður. Sum verkefnin eru mjög erfið.
6. Verkefnin eru öll í nokkrum liðum. Ef einhverjum lið er svarað rangt og svarið notað í síðari liðum verður ekki dregið frá í seinni liðum svo framarlega sem útreikningarnir í þeim liðum eru réttir.

1 Kubbar í bandi



10 kubbar, hver með massann $m = 1{,}0\,\mathrm{kg}$, eru tengdir saman með bandi eins og sýnt er á myndinni. Togað er í kubb 1 með láréttum krafti $F_0 = 100\,\mathrm{N}$ til hægri eins og sjá má á myndinni. Enginn núningur er á milli kubbanna og yfirborðsins.

(a) Hver er hröðun kubbs númer 7?

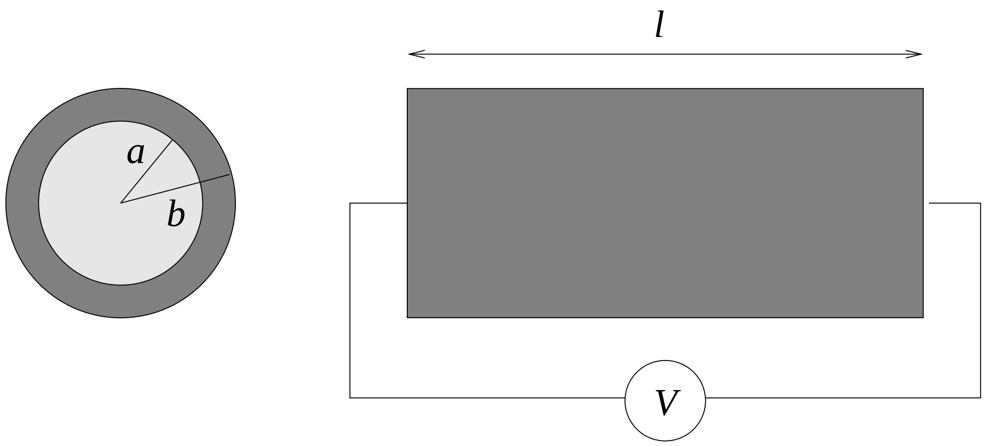
(b) Hver er togkrafturinn í bandinu á milli kubba númer 3 og 4?

Gerum nú ráð fyrir að hreyfinúningstuðullinn á milli hvers kubbs og yfirborðsins sé $\mu_k = 0{,}50$.

(c) Hver er nú togkrafturinn í bandinu á milli kubba númer 3 og 4?

Gera má ráð fyrir að bandið þoli álagið og að þyngdarhröðunin sé $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.

2 Rafmagnshólkur



Holur sívalningslaga hólkur með innri radíus a, ytri radíus b og lengd l hefur viðnám R_H. Þessi hólkur er fylltur af ókunnu efni og er viðnámið yfir hólkinn og ókunna efnið $\frac{1}{2}R_H$.

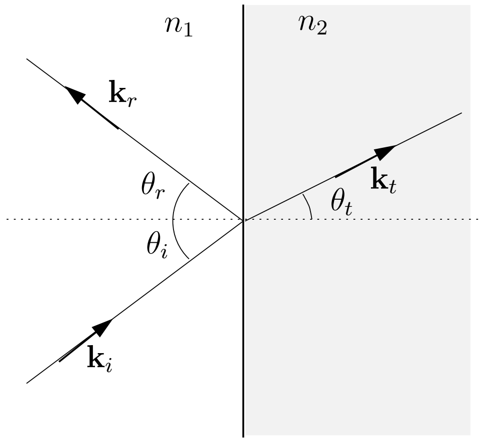
(a) Hvert er viðnámið yfir ókunna efnið eitt og sér?

(b) Ef efni hólksins hefur eðlisrafleiðni σ_H, hver er eðlisrafleiðni óþekkta efnisins? (*Ábending:* $R = \frac{l}{\sigma A}$)

(c) Fyrir gefna spennu V yfir fyllta hólkinn, finnið straumþéttleika, $J = \frac{I}{A}$ (I er straumur og A flatarmál), og rafsvið, E, í hólknum annars vegar og óþekkta efninu hins vegar. (*Ábending:* $J = \sigma E$)

3 Speglun og brotstuðlar

Ljósgeislum má lýsa með bylgjuvigrum $\mathbf{k}$ sem hafa sömu stefnu og ljósgeislinn. Lengd vigursins er kölluð bylgjutala, $|\mathbf{k}| = k = 1/\lambda$ þar sem λ er bylgjulengd ljósgeislans. Þegar ljósgeislinn fer í gegnum efni með brotstuðul n hægir á því. Hraða þess má rita sem $u = c/n$, þar sem c er hraði ljóss í tómarúmi. Tíðni ljóssins breytist ekki og því verður bylgjulengd þess að styttast. Sambandið milli bylgjulengdar ljósgeislans í efninu, λ, og tómarúmi, λ_0, er gefið með $\lambda = \lambda_0/n$. Samband milli samsvarandi bylgjutalna verður því $k = nk_0$. Þegar ljósgeisli lendir á samskeytum efna með mismunandi brotstuðla endurvarpast hluti hans til baka inn í upprunalega efnið á meðan hluti hans ferðast áfram inn í nýja efnið. Sá hluti bylgjuvigursins sem er samsíða samskeytunum varðveitist við áreksturinn.



Í þessu dæmi munum við vinna með ljósgeisla sem ferðast í $x-y$ planinu. Í upphafi ferðast hann í efni 1 með brotstuðul n_1 en í punktinum $(x, y) = (0, 0)$ lendir hann á samskeytum þess efnis og efni 2 með brotstuðul n_2. Hluti ljósgeislans fer í gegnum samskeytin á meðan restin endurkastast aftur inn í efni 1. Á myndinni má sjá skýringarmynd af áresktrinum ásamt skilgreiningum á þeim stærðum sem unnið er með í dæminu.

(a) Sýnið að innfallshornið, θ_i, sé jafnt útfallshorninu, θ_r. (*Ábending: Þáttur bylgjuvigursins samsíða samskeytunum varðveitist og lengd vigursins er einungis háð brotstuðlinum.*)

(b) Sýnið að samband infallshorns, θ_i, og brothorns, θ_t, sé gefið með lögmáli Snells, $n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t$.

Allir ljósgeislar hafa eiginleika sem kallast skautun (*ekki þarf að kunna skil á skautun til að leysa dæmið*). Í mörgum efnum er brotstuðullinn háður skautun ljóssins og hraði þess því háður skautunareiginleikum þess. Til einföldunar gerum við ráð fyrir að ljósið geti haft annað hvort + eða - skautun. Við gerum einnig ráð fyrir því að efni 1 hafi mismunandi brotstuðul fyrir hvora skautun, $n_{1+} > n_{1-}$, þar sem + og - táknin vísa til mismunandi skautunareiginleika ljóssins.

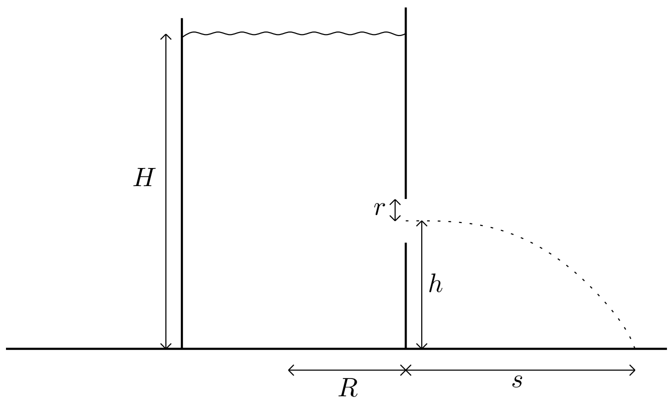
Gerum nú ráð fyrir að innfallsgeislinn sé skautaður og endurvarpist sem tveir ljósgeislar, annar + skautaður en hinn - skautaður.

(c) Finnið útfallshornin θ_{r+} og θ_{r-} sem ljósgeislarnir mynda ef inngeislinn er - skautaður. Hvort hornið er stærra?

(d) Sýnið að til sé horn θ_c þannig að fyrir öll innfallshorn $\theta_i > \theta_c$ endurkastist einungis einn ljósgeisli ef inngeislinn er + skautaður. Finnið þetta horn sem fall af n_{1+} og n_{1-}.

4 Vatn

Sívalningur með geisla R er fullur af vatni og stendur á yfirborði jarðar þar sem þyngdarhröðunin er g. Hæð vatnsyfirborðsins frá yfirborði jarðar er H. Nú er gat með geisla $r < R$ borað á sívalninginn í hæðinni h frá yfirborði jarðar. Vatnið byrjar þá að renna út um gatið og lendir í fjarlægðinni s frá sívalningnum. Gera má ráð fyrir að $r \ll R$; þetta þýðir að þegar vatnið er byrjað að renna, þá er hraði vatnsyfirborðsins hverfandi.



(a) Hver er ferð vatnsins, v, sem kemur út um gatið rétt eftir að vatnið er byrjað að renna? (Skrifið svarið sem fall af g, h og H.)

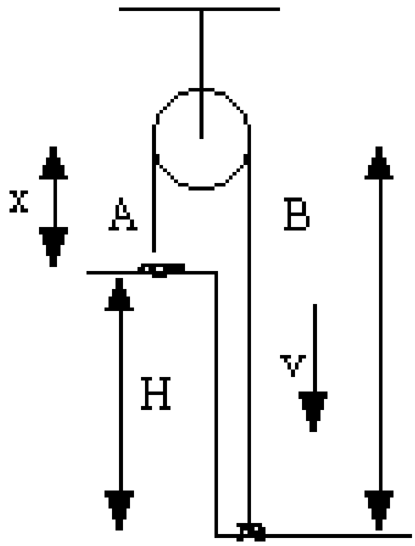
(b) Hver er fjarlægðin s? (Skrifið svarið sem fall af v, h og g.)

(c) Hvað þarf h að vera til þess að vatnið lendi í sem mestri fjarlægð frá sívalningnum? Hver er þessi mesta fjarlægð? (Skrifið bæði svörin sem föll af H.)

(d) Rökstyðjið að til eru tvö mismunandi gildi á h þannig að vatnið lendi í sömu fjarlægð í báðum tilvikum. Hvernig eru þessi tvö gildi háð hvort öðru?

(e) Hvernig breytast niðurstöðurnar í fyrri liðum ef ekki má gera ráð fyrir að $r \ll R$, með öðrum orðum ef ekki má gera ráð fyrir að hraði vatnsyfirborðsins sé hverfandi?

5 Reipi



Reipi að lengd L og massa M er hengt yfir létta og liðuga trissu líkt og sést á myndinni. Öðrum megin trissunnar liggur hluti reipisins í vöðli á borði í hæð H yfir gólfi meðan að hinum megin liggur hluti þess í vöðli á gólfinu. Trissan er svo í hæðinni x yfir borðinu. Munið að hægt er að skrifa kraft sem tímaafleiðu skriðþunga eða

$$F = \frac{dp}{dt} \simeq \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

þar sem F er krafturinn, p skriðþungi og t tími (nálgunin er góð ef Δt er lítil stærð). Liðirnir í þessu dæmi eru sjálfstæðir.

(a) Eftir að kerfið fer af stað kemur að því að reipið nær föstum hraða v. Finnið v.

(b) Nú er reipið hengt upp þannig að endi þess rétt snertir jörðina. Reipinu er sleppt og eftir ákveðinn tíma liggur helmingur þess á jörðinni. Með hvaða krafti verkar reipið á jörðina í þeim tímapunkti?

(c) Gerum ráð fyrir að reipið sé úr gúmmíi. Nú bræðum við gúmmíið og búum til skopparabolta úr reipinu. Við sleppum boltanum úr mikilli hæð þannig að hann nær lokahraða sínum vegna loftmótstöðu. Boltinn lendir svo í alfjaðrandi árekstri við jörðina. Hver er hröðun boltans eftir áreksturinn ef þyngdarhröðunin er g?

6 Snúningur

Liðirnir í þessu dæmi eru ótengdir.

(a) Í enföldu líkani af vetnisatóminu má gera ráð fyrir að rafeind sé á lotubundinni hringhreyfingu með radíus r um róteind. Setjum nú á fast en *veikt* segulsvið, $\mathbf{B}$, sem er hornrétt á hringbrautina ($|\mathbf{B}| \ll \frac{mv}{re}$, m er massi rafeindarinnar, v brautarhraði hennar og e hleðsla hennar). Sviðið er það veikt að radíus brautarinnar breytist ekki.

(i) Hvort lengist eða styttist lotan við að segulsviðið er sett á ef rafeindin hreyfist réttsælist um róteindina séð frá athuganda sem horfir eftir segulsviðslínunum?

(ii) Hver verður breytingin í lotunni? (*Ábending: óhætt er að nota nálganir við útleiðsluna.*)

(b) Hugsum okkur tvo pendúla sem hafa sömu lengd og sama massa. Annar sveiflast í lóðréttu plani með hámarks útslag θ á meðan hinn stikar hring í láréttu plani og myndar alltaf sama horn θ við lóðrétt. Hvor pendúllinn hefur lengri lotu? (*Ábending: Ekki er nauðsynlegt að reikna lotu pendúlana fyrir almennt θ. Fyrir lítil θ er lota fyrri pendúlsins $T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ þar sem l er lengd hans og g þyngdarhröðun.*)