Laugardagur 17. mars 2009, kl. 9:00 - 12:00

Landskeppnin í Eðlisfræði 2009
Úrslitakeppni

Leyfileg hjálpargögn: Reiknivél sem geymir ekki texta.

Verkefnið samanstendur af sex verkefnum sem vega hvert 10 stig. Skrifið lausnir á þar til gerð lausnarblöð.

Verkefnið hefur verið lesið vandlega yfir og það er lagt fyrir nákvæmlega í þeirri mynd sem það er. Ef einhverjir gallar reynast vera þá koma þeir jafnt niður á öllum þátttakendum. Spurningar um orðalag eða einhverskonar misskilning eru því óþarfar og umsjónarmönnum er óheimilt að gefa nánari skýringar. Ef þú sérð eitthvað athugavert við spurningarnar sem slíkar er þér frjálst að geta þess stuttlega á úrlausnarblöðum.

Nafn: ______________________________

Heiti	Tákn	Gildi
Hraði ljóss	c	$2,99 \cdot 10^{8}$ m/s
Þyngdarhröðun á jörðinni	g	10 m/s^2
Þyngdarfasti	G	$6,67 \cdot 10^{-11}$ m^3/kgs^2
Radíus jarðar	R_E	6.38 km
Massi jarðar	M_E	$5,97 \cdot 10^{24}$ kg
Massi Tungls	$M_{☾}$	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg
Massi sólar	$M_{\odot}$	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg

Dæmi 1

Stöng snýst með föstum hornhraða ω um z-ás. Stöngin heldur föstu horni $\pi/2 - \alpha$ við þann ás. Hlutur með massa m getur runnið eftir stönginni. Núningsstuðullinn er $\mu = \tan\beta$, þar sem β er kallað „núningshorn“. Neðri endinn er fastur í núllpunkt.

a) (4 stig) Finndu hornið α þannig að

- massinn haldist kyrr
- massinn renni með föstum hraða

gefið að stöngin snýst ekki.

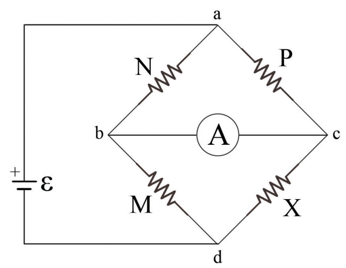
b) (6 stig) Núna snýst stöngin með hornhraða $\omega > 0$ með α fast. Finndu skilyrði þannig að massinn sé kyrr.
Notaðu þér eftirfarandi hornafallasambönd:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \sin\alpha\sin\beta$$

Dæmi 2

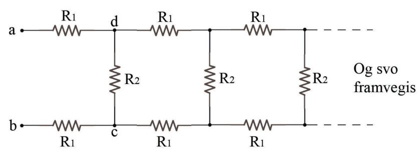
a)
Rásin á myndinni til hægri er hægt að nota til að finna stærð óþekkts viðnáms X ef M, N, P eru þekkt viðnám sem hægt er að breyta eftir hentugsemi. Ef viðnámin N, M, P eru stillt þannig að straumælirinn A mælir engan straum, sýndu að



$$X = \frac{MP}{N}$$

b) Á myndinni hér að neðan er kerfi af viðnámum R_1 og R_2 sem nær út í óendanlegt til hægri. Sýndu fram á að samtals viðnám milli a og b, R_T er:

$$R_T = R_1 + \sqrt{R_1^2 + 2R_1R_2}$$



Vísbending: Þar sem kerfið er óendanlegt er viðnámið milli a og b jafnt viðnáminu hægra megin við c og d.

Dæmi 3

Lóð með massa m í þyngdarsviði jarðar hangir í bandi af lengd L (massalaust og er fast í loft). Lóðinu er nú sveiflað og lotubundin hreyfing hefst. Þetta tól er kallað pendúll.

a) (3 stig) Leiddu út hreyfijöfnu lóðsins.

b) (2 stig) Finndu stöðuorku lóðsins þegar það er undir $1,55^\circ$ horni við kyrrstöðu. Lengd bandsins er 25 m og lóðið vegur 80 kg.

c) (2 stig) Hver er hraði lóðsins í neðstu stöðu ef því er sleppt úr fyrrnefndu horni?

d) (2 stig) Jafnan

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

er nálgun á hreyfijöfnu pendúls, þar sem ω er hornhraði pendúlsins og $\ddot{\theta} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$. Hvaða nálgun var notuð og hver er sveiflutíminn við þessa nálgun?

e) (1 stig) Líkanið sem við höfum skoðað í undanförnum liðum er gallað á nokkra vegu. Einn af þessum göllum felur í sér að jörðin snýst og því verkar svokallaður Coriolis kraftur á pendúlinn. Útleiðsla á hreyfijöfnu með tilliti til þess krafts er flókin en eftirfarandi jafna lýsir sambandi lotu jarðar, lotu Foucaults pendúls og breiddargráðu jarðar

$$T_F = \frac{T_J}{\sin \Psi}$$

þar sem T_F er lota pendúlsins, T_J er snúnngstími jarðar um sjálfa sig og Ψ er breiddargráða þar sem pendúllinn er. Finndu breiddargráðu Reykjavíkur ef lota Foucault pendúlsins í Orkuveitunni er 26 klst og 37 mín.

Dæmi 4

NASA skaut föstudaginn 6. mars sl. geimsjónaukanum Kepler á braut um jörðu en hann á að leita að reikistjörnum í öðrum sólkerfum. Hann er nefndur eftir Þjóðverjanum Johannes Kepler sem lýsti hreyfingu reikistjarnanna í nokkrum lögmálum. T.d. segir fyrsta lögmál Keplers að braut reikistjörnu um sólu sé sporbaugur með sól í öðrum brennipunkti. Sérstaklega áhugavert er þriðja lögmálið þar sem $T^2 \propto a^3$ en T er umferðartími reikistjörnu um sólu í sekúndum og a kallast hálflangás sporbaugsins en oft má líta á þá fjarlægð sem meðalfjarlægð milli brennipunktsins og þess hlutar sem snýst um hann sem er í þessu tilviki fjarlægðin milli reikistjörnu og sólar en a er mælt í metrum. Þetta gildir almennt fyrir tvo massa sem snúast hver um annan með jöfnunni:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M+m)}$$

þar sem M er massi annars hnattarins og m er massi hins hnattarins. Við vitum að Tunglið snýst heilan hring um jörðu á um 27 dögum. Tunglið fer rangsælis um jörðu ef horft er niður á norðurpól jarðar en jörðin snýst einnig rangsælis um sjálfa sig þar sem sólin kemur upp í austri. Gerum ráð fyrir að sól, Tungl og jörð liggi alltaf í sama plani.

a) (1 stig) Hver er fjarlægðin frá jörðu til Tungls í km?

b) (2 stig) Á ákveðnum stað milli jarðar og Tungls er heildarþyngdarkrafturinn engin ef gert er ráð fyrir að þyngdarkraftur frá öðrum mössum í geimnum sé enginn. Þyngdarkrafturinn sem verkar á massa m frá massa M er $F_g = -GMm/r^2$. Hve langt frá jörðu er heildarþyngdarkrafturinn vegna jarðar og Tungls enginn? Finndu aðeins lausnina sem liggur á milli jarðar og Tungls.

c) (2 stig) Þótt Tunglið snúist heilan hring um jörðu á 27 dögum þá er jörðin einnig á hreyfingu þannig að tíminn milli tveggja fullra Tungla séð frá jörðu er um 30 dagar. Tunglið er þá t.d. hálft vaxandi þegar 7,5 dagar eru liðnir frá nýju Tungli og er þá hægri hlið Tunglsins björt. Ef við sjáum Tunglið þannig kl. 03:00 í hvaða átt erum við þá að horfa? (Gerum ráð fyrir að hádegi sé kl. 12:00 og þá sé sólin í hásuðri)

d) (1 stig) Ef 19 dagar eru liðnir frá nýju Tungli og það sést 24 gráður austur af suðri, hvað er klukkan þá?

e) (4 stig) Finndu sambandið milli d: fjöldi daga frá nýju Tungli ($0 < d < 30$), g: staðsetningu Tungls á himni í gráðum þar sem $g = 0$ er norður og t: fjöldi klukkustunda frá miðnætti ($0 < t < 24$).

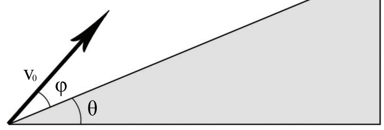
Dæmi 5

Ísteningur, 1 m á kant, er settur í gróðurhús á braut um sólu. Geisli brautarinnar er 100.000.000.000 metrar. Hitastig teningsins er í upphafi $-10°C$ og hann bráðnar að fullu á $31,675$ klukkustundum.
Sólin fær orku sína með kjarnasamruna. Miðað við þessar upplýsingar, hversu mikið léttist sólin á hverri sekúndu?
Gera má ráð fyrir að sólarljósið falli ávallt hornrétt á eina hlið teningsins og bráðnar ísinn aðeins á henni. Taka skal fram að gróðurhúsið er einungis til einangrunar og til að halda þrýstingi jöfnum.
Gagnlegar stærðir og jöfnur eru:

- Eðlisvarmarýmd íss: 2108 J/kg·K
- Fasaskiptavarmi íss: 334 kJ/kg
- Eðlismassi íss: 0.92 g/cm^3
- $E = mc^2$

Dæmi 6

Maður er staddur neðst í brekku með halla θ m.v. lárétt og kastar bolta með hraða v_0 undir horni φ miðað við brekkuna (sjá mynd).



Mynd 1: Dæmi 6

a) (7 stig) Reiknaðu kastlengdina, þ.e. fjarlægðina frá staðnum sem boltanum er kastað til staðsins á brekkunni sem hann lendir á. Ekki taka hæð mannsins inn í útreikningana þ.e. gerðu ráð fyrir að boltanum sé kastað úr hæð 0. Þú getur notað eftirfarandi hornafallareglur til að einfalda útreikninga:

$$\cos(\alpha)\sin(\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{2}$$
$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$$
$$\arctan\left(\frac{1}{\tan(\alpha)}\right) = \frac{\pi}{2} - \alpha \qquad 0 < \alpha < \pi$$

Vísbending: Snúðu hnitakerfinu þannig að brekkan sé samsíða x-ásnum og finndu x og y sem fall af tíma. Athugaðu að í þessu hnitakerfi er stefna þyngdarkraftsins ekki beint niður.

b) (3 stig) Undir hvaða horni φ á maðurinn að kasta til að hámarka kastlengdina?