Landskeppni í eðlisfræði 2012

Úrslitakeppni

Laugardaginn 24. mars 2012, kl. 09:00 - 12:00

Leyfileg hjálpargögn: Reiknivél sem geymir ekki texta.

Keppnin samanstendur af 5 dæmum sem eru öll í nokkrum liðum. Athugaðu hvort þú hafir fengið öll dæmin.

Öll dæmin 5 vega jafnt og ekki verður dregið frá fyrir röng svör.

Skrifaðu lausnir þínar snyrtilega á lausnablöð sem þú færð afhent og merktu þau vel.

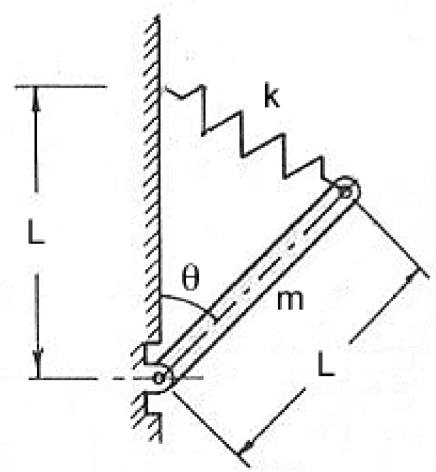
Tekið verður tillit til útreikninga við yfirferð á dæmum.

Góður frágangur hefur jákvæð áhrif!

Tafla yfir þekkta fasta

Nafn	Tákn	Gildi
Hraði ljóss í tómarúmi	c	$3,00 \cdot 10^{8}$ m/s
Þyngdarhröðun jarðar	g	$9,82$ m/s^2
Massi rafeindar	m_e	$9,11 \cdot 10^{-31}$ kg
Rafsvörunarstuðull tómarúms	ε_0	$8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m
Grunnhleðslan	e	$1,602 \cdot 10^{-19}$ C
Þyngdarfastinn	G	$6,67 \cdot 10^{-11}$ m^3/(kg·s^2)
Radíus Sólar	$R_\odot$	$6,955 \cdot 10^{8}$ m
Massi Sólar	$M_\odot$	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg
Massi Jarðar	M_j	$5,97 \cdot 10^{24}$ kg
Stjarnfræðieining	$1\ AU$	$1,50 \cdot 10^{11}$ m

Dæmi 1 - Stöng og gormur



Neðri endi stangar með lengd L og jafndreifðan massa m leikur á núningslausri hjöru á vegg. Gormur með kraftstuðul k er festur við enda hennar og við punkt í hæð L yfir hjörunni. Gormurinn er óteygður þegar lengd hans er x_0. Milli stangarinnar og veggsins er horn θ á bilinu $]0, \pi[$.

a) Hver er lengd gomsins sem fall af θ?

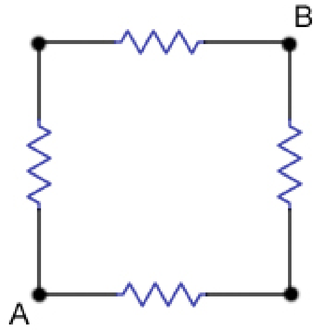
b) Við hvaða θ er stöngin kyrr?

c) Sambærileg tæki má nota til þess að mæla smáar breytingar á styrk þyngdarsviðs. Hvers vegna er þetta tæki hentugt til þess og hvernig ætti að velja L, m, k og x_0 svo að það sé nothæft til slíkra mælinga við yfirborð jarðar? (Ábending: Athugaðu hvernig θ hegðar sér sem fall af g).

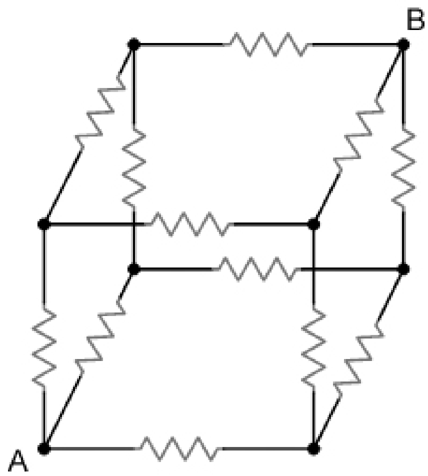
Við lausn dæmisins geta eftirfarandi hornafallasambönd komið sér vel

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

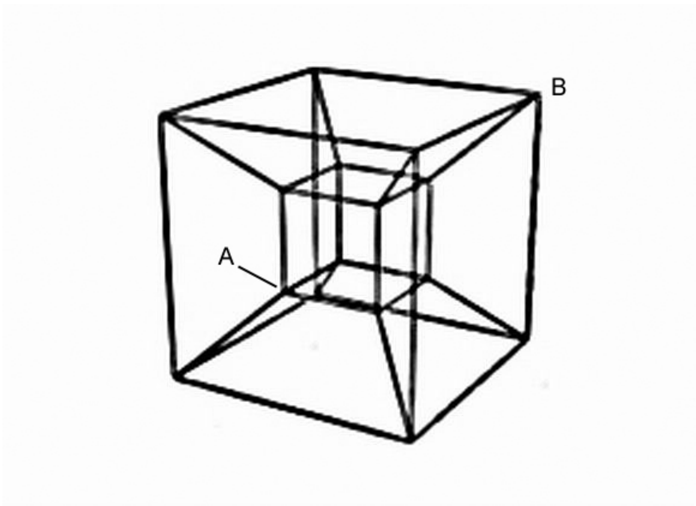
Dæmi 2 - Viðnámskassar



a) Öll viðnámin hafa viðnám R. Hvert er heildar viðnámið milli punkta A og B?



b) Öll viðnámin hafa viðnám R. Hvert er heildar viðnámið milli punkta A og B?



c) Á myndinni sést tvívíð vörpun af fjórvíðum tening. Eins og áður er viðnám af stærð R milli sérhverra tveggja hornpunkta. Hvert er heildar viðnámið milli punkta A og B?

Dæmi 3 - Varmafræðilegt ferli

Í þessu dæmi verður fjallað um varmafræðilegt ferli. Tilteknu varmafræðilegu ferli er lýst með eftirfarandi skrefum:

1. Jafnhitastigs ferli (*e. isothermal process*); Einatóma kjörgas þenst út við fast hitastig, T_A, (*e. temperature*) frá V_A til V_B.
2. Jafnvinnu ferli (*e. isochoric process*); Hitastig gassins er nú aukið við fast rúmmál, V_B, þangað til að hitastig gassins er orðið T_C (ATH: $P_C < P_A$).
3. Jafnvarma ferli (*e. adiabatic process*); Kjörgasinu er nú þjappað saman, þannig að varmi (*e. heat*) þess breytist ekki, þangað til að þrýstingur í gasinu er orðinn $P_D = P_A$.
4. Jafnþrýstings ferli (*e. isobaric process*); Hitastig kjörgasins er nú lækkað frá T_D til T_A við fastan þrýsting P_D.

Gerðu eftirfarandi:

a) Rissaðu ferlið í:
(P,V) planinu, þ.e. rissaðu þrýstinginn, P, sem fall af rúmmálinu, V.
(P,T) planinu, þ.e. rissaðu þrýstinginn, P, sem fall af hitastiginu, T.
(V,T) planinu, þ.e. rissaðu rúmmálið, V, sem fall af hitastiginu, T.
(σ,T) planinu, þ.e. rissaðu entrópíuna, σ, sem fall af hitastiginu, T.

b) Finndu hitaflæðið, Q, vinnuna, W og breytingu í innri orku, ΔU, í hverju skrefi ferlisins.

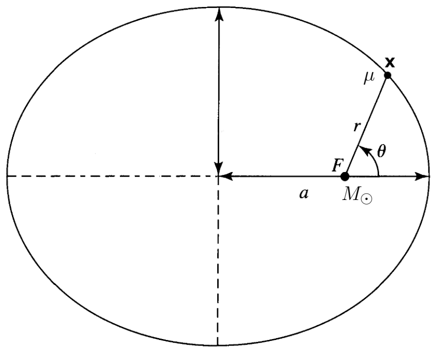
c) Finndu heildar entrópíu breytinguna, $\Delta\sigma_{tot}$, í ferlinu.

Atriði sem gætu gagnast við úrvinnslu verkefnisins:

- Um kjörgas gildir $PV = nRT$
- Í adiabatísku ferli gildir $P_1V_1^\gamma = P_2V_2^\gamma$, fyrir einatóma kjörgas er $\gamma = 5/3$
- $\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T$, $\Delta U = W + Q$
- $W = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$ í isothermal ferli
  $Q = 0$ í adiabatísku ferli
  $W = 0$ í isochoric ferli
  $W = P\Delta V$ í isobaric ferli.
- Um entrópíu einatóma kjörgass gildir að $\sigma = \ln\left(\frac{n_Q}{n}\right) + \frac{5}{2}$ þar sem að $n_Q \propto T^{\frac{3}{2}}$ og $n \propto \frac{1}{V}$

Dæmi 4 - Fyrsta lögmál Keplers

Johannes Kepler (1571-1630) setti fram fyrstu tvö lögmálin sem við hann eru kennd í bókinni *Astronomia nova* árið 1609. Fyrsta lögmál Keplers staðhæfir að reikistjörnurnar gangi umhverfis sólu á sporbaugum með sól í öðrum brennipunkti. Sporbaugar eru keilusnið með miðskekkju e sem er fasti fyrir hverja reikistjörnu fyrir sig og $0 < e < 1$.



Lítum á kerfið á myndinni; pláneta $\mathbf{x}$ með massann μ er á sporbraut um sólu með massann $M_\odot$. Stærðin r táknar fjarlægð plánetunnar frá sólu og er háð horninu θ,

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta)} \tag{1}$$

þar sem stærðin a er hálfur langás sporbaugsins. Þegar plánetan er í mestri fjarlægð frá sólu er talað um sólfirð (*e. aphelion*) en um sólnánd (*e. perihelion*) við minnstu fjarlægð.

a) Notaðu varðveislu hverfiþunga til að sýna að hlutfallið milli brautarhraða plánetunnar við sólfirð, v_a og brautarhraðans við sólnánd, v_p sé gefið með

$$\frac{v_a}{v_p} = \frac{1-e}{1+e}$$

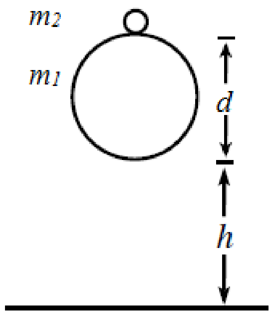
b) Notaðu ykkur sambandið í liðnum að ofan til að gefa bæði v_p og v_a sem föll af M, a, e og þyngdarfastanum G.

c) Finndu jöfnu fyrir brautarhverfiþunga kerfisins, L, sem fall af þekktum föstum.

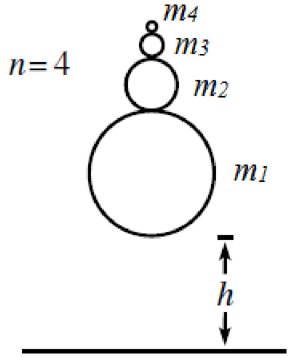
d) Finndu að lokum jöfnu fyrir fyrsta lögmáli Keplers; þ.e. jöfnu sem sýnir r sem fall af L, θ og öðrum þekktum föstum.

Dæmi 5 - Boltar

a) Látum M vera massa jarðar, R vera radíus jarðar og G vera þyngdarfastann. Látum enn fremur v vera lausnarhraða við yfirborð jarðar, þ.e. minnsta hraða sem þarf til að sleppa úr þyngdarsviði jarðar.
Reiknaðu tölulegt gildi á v miðað við við eftirfarandi gildi (hunsa má loftmótstöðu): $M = 5,97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$, $R = 6380\,\mathrm{km}$, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}$.



b) Tennisbolti með massa m_2 situr á körfubolta með massa m_1. Neðsti hluti körfuboltans er í hæð h en neðsti hluti tennisboltans er í hæð $h + d$. Boltunum er sleppt samtímis. Þegar tennisboltinn skoppar aftur upp kemst neðsti hluti hans hæst í hæðina H. Gera má ráð fyrir að $m_1 \gg m_2$, þ.e. m_1 er miklu stærra en m_2. Allir árekstrar eru fjaðrandi og hunsa má loftmótstöðu.
Finndu H sem fall af h og d. (Ábending: Það eina sem þarf að vita um fjaðrandi árekstra er þetta: *Ferð agnar 1 miðað við ögn 2 er sú sama fyrir og eftir árekstur.*)



c) Gerum nú ráð fyrir að við höfum n bolta sem sitja hvor ofan á öðrum. Þeir hafa massa m_1, m_2, ... ,m_n og $m_1 \gg m_2 \gg \cdots \gg m_n$. Neðsti hlutinn á þyngsta boltanum er í hæð $h = 1,00\,\mathrm{m}$. Boltunum er öllum sleppt á sama tíma. Þyngdarhröðun við yfirborð jarðar er $g = 9,82\,\mathrm{m/s^2}$. Allir árekstrar eru fjaðrandi og hunsa má loftmótstöðu.
Hversu margir þurfa boltarnir að vera til að sá léttasti sleppi úr þyngdarsviði jarðar?