Landskeppni í eðlisfræði 2014

Úrslitakeppni

Laugardaginn 15. mars 2014, kl. 09:00 - 12:00

Leyfileg hjálpargögn: Reiknivél sem geymir ekki texta.

Keppnin samanstendur af 5 dæmum sem eru öll í nokkrum liðum. Athugaðu hvort þú hafir fengið öll dæmin.

Öll dæmin 5 vega jafnt og ekki verður dregið frá fyrir röng svör.

Skrifaðu lausnir þínar snyrtilega á lausnablöð sem þú færð afhent og merktu þau vel.

Tekið verður tillit til útreikninga við yfirferð á dæmum.

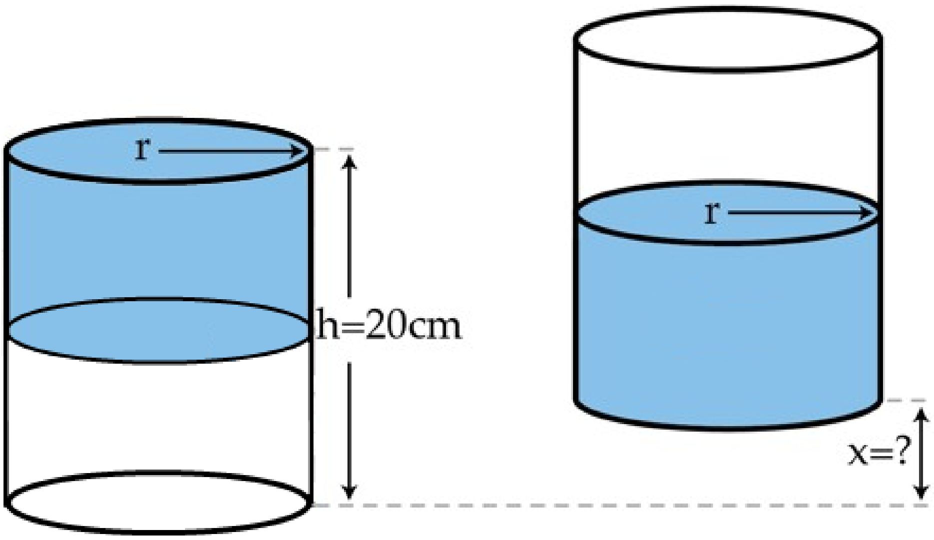
Góður frágangur hefur jákvæð áhrif!

Tafla yfir þekkta fasta

Nafn	Tákn	Gildi
Hraði ljóss í tómarúmi	c	$3,00 \cdot 10^8$ m/s
Þyngdarhröðun jarðar	g	$9,82$ m/s^2
Massi rafeindar	m_e	$9,11 \cdot 10^{-31}$ kg
Rafsvörunarstuðull tómarúms	ε_0	$8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m
Grunnhleðslan	e	$1,602 \cdot 10^{-19}$ C
Þyngdarfastinn	G	$6,67 \cdot 10^{-11}$ m^3/(kg·s^2)
Radíus sólar	$R_\odot$	$6,955 \cdot 10^8$ m
Radíus jarðar	R_j	$6,371 \cdot 10^6$ m
Massi jarðar	M_j	$5,97 \cdot 10^{24}$ kg
Massi tungls	M_t	$7.34 \cdot 10^{22}$ kg
Fjarlægð tungls og jarðar	D	$3.84 \cdot 10^8$ m
Stjarnfræðieining	$1\ AU$	$1,50 \cdot 10^{11}$ m

Dæmi 1 - Vatn

1) (10) Hugsum okkur sívalningslaga glas með radíus $r = 5.0\,\mathrm{cm}$ og hæð $h = 20\,\mathrm{cm}$ sem situr á borði. Massi glassins er $m = 0.2\,\mathrm{kg}$. Í upphafi er efri helmingur glassins fullur af vatni (eðlismassi $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$), en í neðri helmingnum er lofttæmi (sjá mynd). Umhverfisþrýstingur er $P = 1.0\,\mathrm{atm} = 101\,\mathrm{kPa}$ og þyngdarhröðunin er $g = 9.82\,\mathrm{m/s^2}$. Vegna umhverfisþrýstingsins stekkur glasið beint upp í loft á tímanum $t = 0$.



Hver er mesta hæð fá borðinu sem botn glassins kemst í? Gerið ráð fyrir að vatnið í glasinu haldi lögun sinni og að enginn kraftur verki á milli vatnsins og hliða glassins. Ritið hæðina sem fall af þekktum stærðum og gefið tölulegt svar í cm.

2) (10) Í þessum lið á að leiða út lögun vatnssúlu sem flæðir út um lóðrétta pípu. Þar sem vatnið rennur út úr pípunni hefur það hraða v_0 og þar er radíus vatnssúlunnar r_0. Gerið ráð fyrir að vatnið sé í frjálsu falli með þyngdarhröðun g þegar það kemur út úr pípunni. Finnið radíus vatnssúlunnar $r(y)$ sem fall af fjarlægðinni y sem það hefur fallið, mælt frá pípunni. Gerið ekki ráð fyrir loftmótstöðu. Athugið að vatnið í bununni sem kemur út úr pípunni loðir saman vegna millisameindakrafta (það tvístrast ekki).

Dæmi 2 - Reipi á borði

Reipi, sem er h metra langt, hangir fram af borði. Við tímann t=0 hanga c metrar reipisins fram af borðinu en afgangur þess liggur beinn á borðinu. Borðið er núningslaust. Reipinu er sleppt úr kyrrstöðu kl. t = 0.

1) (7) Ritið hreyfijöfnuna, þ.e. finnið x(t) (ef x-ás er skilgreindur jákvætt niður).

2) (13) Hve lengi er reipið að renna út af borðinu?

Gefið er að almenn lausn diffurjöfnunnar $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - a^2 y = b$ er

$$y = Ae^{-ax} + Be^{ax} - \frac{b}{a^2}$$

þar sem A og B eru fastar.

Dæmi 3 - Geimlyfta

Ein tillaga að hönnun geimlyftu er þannig að sterkur vír er festur við miðbaug jarðar í annan endann og hinn endinn látinn standa langt út í geim. Geimlyftan þjónar þeim tilgangi að hægt sé að flytja birgðir og fleira upp á sporbraut um jörðu án þess að notast við eldflaugar. Geimlyftan myndi nýta sér sterka miðflóttakraftinn langt frá jörðinni til að halda uppi neðri enda vírsins og vírinn helst þannig stöðugt lóðréttur frá jörðinni. Auðveldast væri að nota akkeri, stóran massa sem festur er í enda vírsins þar sem miðflóttakrafturinn er ráðandi eins og t.d. fangaðan loftstein eða geimstöð en ef ekki finnst hentugt akkeri þá má líka láta vírinn einfaldlega teygja sig lengra út í geim þar til samsvarandi miðflóttakraftur fæst.

Gefnar eru formúlur fyrir þyngdarkraftinum

$$F_g = -\frac{GM_j m}{r^2}$$

og miðflóttakraftinum

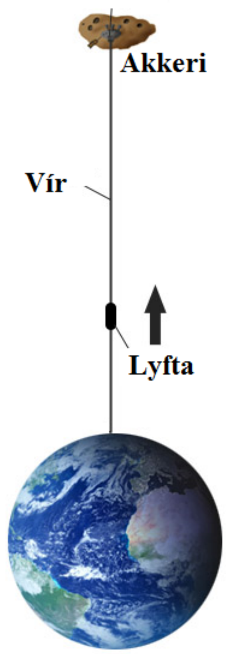
$$F_{mi} = m\omega^2 r.$$

þar sem M_j er massi jarðar, G er þyngdarfastinn, ω er hornhraði og r er fjarlægð frá miðju jarðar.

1) (5) Hve langt frá miðju jarðar er sístöðubrautin, þar sem hornhraði massa á hringbraut um jörðina er sá sami og hornhraði jarðar?

2) (5) Ef við gerum ráð fyrir algjörlega núningslausri lyftu, hve stóran orkugjafa þarf lyftan að hafa með sér til þess að ná sístöðubraut um jörðu ef lyftan og allir fylgihlutir hennar vega samtals 5000 kg?

3) (10) Hversu langur þarf vírinn að vera ef ekki finnst hentugt akkeri? Gerið ráð fyrir einsleitum vír með jafnri massadreifingu. Athugið að hér er kraftsviðið ekki línulegt og því er ekki hægt að gera ráð fyrir að massamiðja vírsins liggi á sístöðubrautinni. Athugið einnig að þið gætuð þurft að þátta þriðja stigs margliðu en það ætti ekki að reynast of erfitt því auðvelt er að finna eina rótina.



Dæmi 4 - Hlaðin skífa

Gefin er hringlaga skífa með radíus R og jafna hleðsludreifingu ρ. Skífan er staðsett í xy-planinu og er miðja hennar í núllpunkti hnitakerfisins.

1) (10) Finnið styrk rafsviðsins eftir z-ásnum sem fall af z.

2) (10) Nú byrjar skífan að snúast í xy-planinu með hornhraða ω. Finnið styrk segulsviðsins eftir z-ásnum sem fall af z.

Dæmi 5 - Sólkerfi með þremur stjörnum

Í þessu dæmi skoðum við sólkerfi með þremur stjörnum. Stjörnurnar víxlverka innbyrðis með þyngdarkrafti en víxlverka ekki við aðra hluti. Eftirfarandi formúlur gætu komið að gagni: Þyngdarkraftur milli massa m_1 og m_2 er

$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$$

þar sem d er fjarlægðin milli massanna og G er fasti. Hröðun í hringhreyfingu með fastri ferð er

$$a = \omega^2 r$$

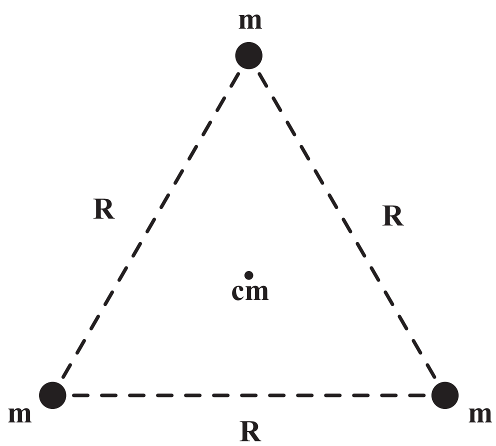
þar sem ω er hornhraði og r er radíus hringsins. Loks er

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

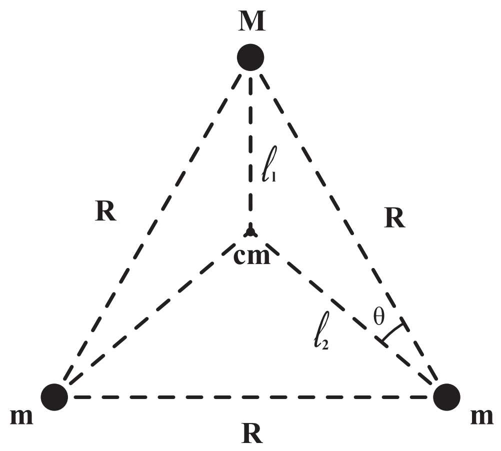
og

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$$

1) (7) Gerum fyrst ráð fyrir því að allar stjörnurnar hafi massa m. Þær mynda jafnhliða þríhyrning sem hefur hliðarlengd R. Þær snúast allar um massamiðju kerfisins (táknuð með cm) með hornhraða ω þannig að þríhyrningurinn sem þær mynda breytir ekki lögun sinni. Finnið ω sem fall af G, m og R.



2) (13) Gerum nú ráð fyrir að tvær af stjörnunum hafi massa m en að sú þriðja hafi annan massa M. Þær mynda ennþá jafnhliða þríhyrning með hliðarlengd R en nú hefur massamiðjan færst til.



Þá gildir að

$$\ell_1 = \frac{\sqrt{3}m}{M+2m}R$$

$$\ell_2 = \frac{\sqrt{M^2+Mm+m^2}}{M+2m}R$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}m}{2\sqrt{M^2+Mm+m^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{2M+m}{2\sqrt{M^2+Mm+m^2}}.$$

(Athugið að þið þurfið ekki að leiða þessar jöfnur út heldur megið þið nota þær beint.) Sýnið að stjörnurnar geta allar snúist um massamiðjuna með sama hornhraða ω þannig að þríhyrningurinn breytir ekki um lögun. Skrifið ω sem fall af G, M, m og R.