Landskeppni í eðlisfræði 2023

Úrslitakeppni

18. mars kl. 09:00-12:00

- Leyfileg hjálpargögn: Reiknivél sem geymir ekki texta.
- Keppnin samanstendur af 3 dæmum. Hvert af þessum þremur dæmum gildir 10 stig.
- Athugaðu hvort þú hafir fengið öll dæmin.
- Ekki er dregið niður fyrir röng svör.
- Liðunum í hverju dæmi er ekki endilega raðað eftir erfiðleikastigi.
- Það má alltaf leysa seinni liði þó fyrri liðir hafi ekki verið leystir.
- Skrifaðu lausnir þínar snyrtilega á lausnablöð sem þú færð afhent og merktu þau vel.
- Tekið verður tillit til útreikninga við yfirferð á dæmum.
- Góður frágangur hefur jákvæð áhrif!

Tafla yfir þekkta fasta

Nafn	Tákn	Gildi
Hraði ljóss í tómarúmi	c	$3{,}00 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}$
Þyngdarhröðun við yfirborð jarðarinnar	g	$9{,}82\,\mathrm{m/s^2}$
Massi rafeindar	m_e	$9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Massi róteindar	m_p	$1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Fasti Coulombs	k	$8{,}99 \cdot 10^{9}\,\mathrm{m^3\,kg/(C^2\,s^2)}$
Rafsvörunarstuðull tómarúms	ϵ_0	$8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C^2\,s^2/(m^3\,kg)}$
Frumhleðslan	e	$1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Þyngdarlögmálsfastinn	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg\,s^2)}$
Stefan-Boltzmann fastinn	σ	$5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W/(m^2\,K^2)}$
Fasti Plancks	h	$6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
Gasfastinn	R	$8{,}314\,\mathrm{J/(mól\,K)}$

1 Teygjustökk (10 stig)

Teygjustökkvari með massa $m = 72{,}0\,\mathrm{kg}$ lætur sig falla úr kyrrstöðu fram af brú í hæð $h = 85{,}0\,\mathrm{m}$ yfir fljóti. Óstrekkt lengd teygjunnar er $\ell_0 = 24{,}0\,\mathrm{m}$ og hún hegðar sér líkt og gormur með gormstuðul $k = 36{,}0\,\mathrm{N/m}$ þegar tognar á henni. Hunsið öll áhrif loftmótsstöðu.

(a) **(0,5 stig)** Hver verður hraði teygjustökkvarans, v_1, rétt áður en að það byrjar að togna á teygjunni?

(b) **(0,5 stig)** Hversu langur tími, t_1, líður frá því að stökkið hefst og þar til að teygjan byrjar að togna?

(c) **(0,5 stig)** Í hvaða hæð, y_0, er teygjustökkvarinn þegar heildarkrafturinn sem að verkar á hann er núll?

(d) **(1,5 stig)** Í hvaða hæð, y_{min}, staðnæmist teygjustökkvarinn áður en teygjan togar hann aftur upp?

(e) **(1 stig)** Hver verður mesti hraði teygjustökkvarans, v_{max}, á leiðinni niður?

(f) **(1 stig)** Hver verður mesta hröðun teygjustökkvarans, a_{max}, á leiðinni niður?

(g) **(2 stig)** Hversu langur tími, τ, líður frá því að það byrjar að togna á teygjunni og þar til að teygjustökkvarinn er í lægstu stöðu?

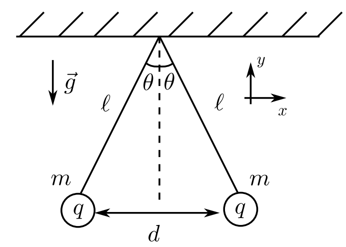
(h) **(1 stig)** Teiknið graf sem sýnir **hröðun** teygjustökkvarans sem fall af tíma frá því að hann stekkur og þar til að hann staðnæmist í lægstu stöðu.

(i) **(1 stig)** Teiknið graf sem sýnir **hraða** teygjustökkvarans sem fall af tíma frá því að hann stekkur og þar til að hann staðnæmist í lægstu stöðu.

(j) **(1 stig)** Teiknið graf sem sýnir **hæð** teygjustökkvarans sem fall af tíma frá því að hann stekkur og þar til að hann staðnæmist í lægstu stöðu.

Á gröfunum ykkar er ætlast til þess að þið merkið inn helstu stærðir sem koma fyrir í verkefninu.

2 Tvö verkefni í rafsegulfræði (10 stig)



Hluti A: Tvær kúlur sem hanga í bandi (5 stig)

Lítum á uppstillinguna hér til hægri. Tvær kúlur með massa m og hleðslu $+q$ hafa verið hengdar í massalaust band af lengd ℓ. Í jafnvægisstöðu kerfisins eru kúlurnar í fjarlægð d frá hvor annarri og böndin mynda horn θ miðað við lóðrétt. Hunsið þyngdarlögmálskraftinn milli kúlnanna en takið tillit til þyngdarkrafts jarðar.

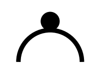
(a) **(1,5 stig)** Ákvarðið fjarlægðina, d, á milli hleðslanna sem fall af q, m, θ og þekktum föstum.

Það sem eftir er af dæminu látum við hleðslurnar tvær, $+q$, vera fastar í $(+\frac{d}{2},0)$ og $(-\frac{d}{2},0)$.

(b) **(2 stig)** Í hvaða punkti (x_e, y_e) væri hægt að koma fyrir rafeind með massa $m_e \ll m$ og hleðslu $-e \ll q$ þannig að rafeindin sé í kraftajafnvægi? Gerið þá nálgun að $y_e \ll \frac{d}{2}$. Skilið svarinu ykkar sem fall af q, e, m_e, d og þekktum föstum.

(c) **(0,5 stig)** Tökum nú rafeindina í burtu. Í hvaða punkti (x_p, y_p) væri hægt að koma fyrir róteind með massa $m_p \ll m$ og hleðslu $+e \ll q$ þannig að róteindin sé í kraftajafnvægi?

Stöðugt jafnvægi



Óstöðugt jafnvægi

Við segjum að jafnvægisstaða fyrir ögn sé *stöðug* ef að lítil frávik frá jafnvægisstöðunni valda því að ögnin færist aftur í átt að jafnvægisstöðunni. Við segjum að jafnvægisstaða sé *óstöðug* ef að lítil frávik frá jafnvægisstöðunni valda því að ögnin færist burt frá jafnvægisstöðunni. Í tvívíðum verkefnum (eins og þessu) getur ögnin verið í *nærstöðugu* jafnvægi en það þýðir að ögnin leitar einungis aftur í jafnvægisstöðuna fyrir lítil frávik í tilteknar stefnur en leitar burt frá jafnvægisstöðunni fyrir allar aðrar stefnur.

(d) **(0,5 stig)** Er rafeindin í (x_e,y_e) í stöðugu, óstöðugu eða nærstöðugu jafnvægi? Ef hún er í nærstöðugu jafnvægi þá þurfið þið að taka fram í hvaða stefnur hreyfingin er stöðug.

(e) **(0,5 stig)** Er róteindin í (x_p,y_p) í stöðugu, óstöðugu eða nærstöðugu jafnvægi? Ef hún er í nærstöðugu jafnvægi þá þurfið þið að taka fram í hvaða stefnur hreyfingin er stöðug.

Hluti B: Olíudropatilraun Millikans og Fletchers (5 stig)

Olíudropi með geisla r og eðlismassa ρ ber neikvæða hleðslu $-q$. Olíudropanum hefur verið komið fyrir milli tveggja platna í plötuþétti með einsleitt rafsvið E_0 sem liggur í lóðrétta stefnu.

(f) **(0,6 stig)** Rafsviðið er stillt þannig að olíudropinn helst kyrr í lausu lofti. Eðlismassi loftsins er ρ_ℓ. Ákvarðið hleðslu olíudropans, $-q$, sem fall af $E_0, r, q, \rho, \rho_\ell$ og þekktum föstum.

Nú slökkvum við skyndilega á rafsviðinu þannig að olíudropinn byrjar að falla til jarðar. Þá verkar á hann loftmótsstöðukraftur sem er gefinn samkvæmt lögmáli Stokes með $F_S = 6\pi\eta r v$ þar sem að η er seigjustuðull lofts, r er geisli olíudropans og v er hraði dropans.

(g) **(0,7 stig)** Ákvarðið lokahraða olíudropans, v_∞, niður á við sem fall af η, r, ρ, ρ_ℓ og þekktum föstum.

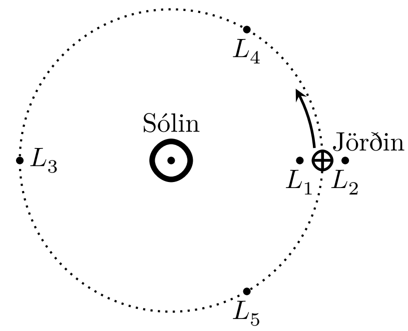
(h) **(0,7 stig)** Hinsvegar, ef við í staðinn aukum styrk rafsviðsins þannig að $E > E_0$ þá mun olíudropinn ferðast upp á við. Hver verður lokahraði dropans, u_∞, upp á við?

Eftirfarandi mæligögn eru tekin beint úr verkbók Millikans. Olíudropa var komið fyrir í þétti með einsleitt, lóðrétt rafsvið, $E = 3{,}19 \cdot 10^5\,\mathrm{N/m}$, sem hægt var að kveikja og slökkva á. Eðlismassi olíu er $\rho = 919{,}9\,\mathrm{kg/m^3}$, eðlismassi lofts er $\rho_\ell = 1{,}2\,\mathrm{kg/m^3}$ og segjustuðull lofts er $\eta = 1{,}80 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg/(s \cdot m)}$. Millikan mældi tímann sem það tók olíudropann að ferðast lóðrétta vegalengd $h = 10{,}21\,\mathrm{mm}$ milli tveggja punkta á skjá.

(i) **(2 stig)** Þegar slökkt var á rafsviðinu tók það olíudropann $t_g = 13{,}6\,\mathrm{s}$ að ferðast á milli punktana. Þegar kveikt var á rafsviðinu tók það $t_E = 34{,}7\,\mathrm{s}$. Hver var hleðsla dropans?

(j) **(1 stig)** Í næstu mælingu tók Millikan hinsvegar eftir því að nú mældist $t_g = 13{,}6\,\mathrm{s}$ eins og áður en nú var hinvsegar $t_E = 84{,}5\,\mathrm{s}$. Hann ályktaði að það væri vegna þess að olíudropinn hefði í millitíðinni gleypt hlaðna jón í andrúmsloftinu. Hver var hleðsla jónarinnar sem olíudropinn gleypti?

3 James Webb geimsjónaukinn (10 stig)



Lagrange-punktar fyrir kerfi jarðarinnar ($M_{\text{jörð}} = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$) og sólarinnar ($M_{\text{sól}} = 1{,}98 \cdot 10^{30}\,\text{kg}$) eru fimm talsins ($L_1, L_2, L_3, L_4$ og L_5) og þá má sjá á mynd hér til hægri. Lagrange-punktar eru skilgreindir sem þeir punktar þar sem að lítill hlutur með massa m helst á braut um sólina þannig að innbyrðis afstaða hlutanna þriggja helst óbreytt. Í Lagrange-punktinum er því miðsóknarkrafturinn sem verkar á þriðja hlutinn jafn samanlögðum þyngdarlögmálskröftunum frá hinum hnöttunum tveimur. Gera má ráð fyrir að jörðin sé á hringlaga sporbraut um sólina með geisla $R = 1{,}50 \cdot 10^{11}\,\text{m}$.

(a) **(3 stig)** James Webb sjónaukanum ($m = 6200\,\text{kg}$) hefur verið komið fyrir í Lagrange-punktinum L_2. Látum $d \ll R$ tákna fjarlægð James Webb sjónaukans frá jörðu. Gefið tölulegt mat á fjarlægðinni d.

Ath: Við yfirferð verður gefið í samræmi við það hversu nálægt réttu gildi þið komist.

Það sem eftir er af dæminu megið þið gera ráð fyrir að sjónaukinn sé í fjarlægð R frá sólinni.

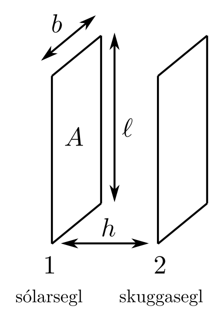
Samkvæmt Stefan-Boltzmann lögmálinu geisla allir hlutir frá sér varmageislun með afli, $P = \epsilon\sigma A T^4$, Þar sem að T er hitastig hlutarins, A er yfirborðsflatarmál hans, $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\text{W}/(\text{m}^2\,\text{K}^4)$ er fasti sem nefnist Stefan-Boltzmann fastinn og ϵ er eðlisgeislun/eðlisgleypni hlutarins sem segir til um hversu vel hluturinn geislar frá sér eða gleypir til sín varmageislun. Fyrir fullkominn svarthlut er $\epsilon = 1$.

(b) **(0,3 stig)** Líta má á sólina sem fullkominn svarthlut með yfirborðshitastig $T_{\text{sól}} = 5778\,\text{K}$ og með geisla $R_{\text{sól}} = 6{,}96 \cdot 10^8\,\text{m}$. Hvert er varmageislunarafl sólarinnar, $P_{\text{sól}}$?

(c) **(0,8 stig)** Yfirborðsflatarmál þess hluta James Webb sjónaukans sem snýr að sólinni er $A_{\text{JW}} = 300\,\text{m}^2$. Hvert er afl þess hluta sólarljóssins, P_0, sem fellur á sjónaukann?

(d) **(1 stig)** James Webb sjónaukinn er illa varinn gagnvart varmageislun frá sólinni. Ef ekkert er gert til þess að skýla honum frá geislum sólarinnar þá mun hann ná varmajafnvægi þegar að varmageislunin sem að hann gleypir frá sólinni er jöfn varmageisluninni sem James Webb sjónaukinn sendir frá sér sem fullkominn svarthlutur. Í þessum lið gerum við grófa nálgun og lítum á sjónaukann sem eina plötu með flatarmál $A_{\text{JW}} = 300\,\text{m}^2$ sem er svo þunn að hitastigið er það sama báðum megin á plötunni. Hvert verður lokahitastig sjónaukans ef ekkert er gert til þess að skýla honum frá geislum sólarinnar?

Til þess að lækka hitastig sjónaukans þá er James Webb sjónaukinn með fimm segl, hvert með flatarmál $A = \ell b$. Fjarlægðin á milli seglanna er h. Til einföldunar skoðum við uppstillingu með einungis tveimur seglum. Köllum seglið sem snýr að sólinni sólarsegl en hitt seglið skuggasegl. Yfirborð seglanna hafa verið húðuð með kísil þannig að eðlisgeislun yfirborðsins er ϵ. Þetta þýðir að líkurnar á því að yfirborð seglanna gleypi ljóseind eru ϵ en líkurnar á því að ljóseindin endurkastist eru $1 - \epsilon$. Sólarseglið er við hitastig T_1 og geislar frá sér með varmaafli P_1. Skuggaseglið er við hitastig T_2 og geislar frá sér með varmaafli P_2. Seglin eru í varmajafnvægi og senda frá sér geislun jafnt í allar áttir. Látum $\alpha + \beta + \gamma = 1$ vera skilgreind þannig að:



- Hlutfall geislunarinnar frá sólarseglinu sem skuggaseglið gleypir í sig er α.
- Hlutfall geislunarinnar sem fer frá sólarseglinu út í tómarúmið (líka á milli seglanna) er β.
- Hlutfall geislunarinnar sem sólarseglið gefur frá sér sem endurvarpast af skuggaseglinu og er aftur gleypt af sólarseglinu er γ. Þar sem að $\epsilon \ll 1$ gerum við þar að auki þá nálgun að $\gamma = \alpha$.

(e) **(0,7 stig)** Skrifið niður jöfnu fyrir varmajafnvægi sólarseglsins sem fall af $P_0, P_1, P_2, \alpha, \beta$ og γ.

(f) **(0,7 stig)** Skrifið niður jöfnu fyrir varmajafnvægi skuggaseglsins sem fall af $P_0, P_1, P_2, \alpha, \beta$ og γ.

(g) **(1,5 stig)** Metið α, β og γ sem fall af ℓ, b, h og ϵ.

(h) **(2 stig)** Hvert verður lokahitastig seglanna ef $\ell = 21{,}2\,\text{m}$, $b = 14{,}2\,\text{m}$, $h = 25\,\text{cm}$ og $\epsilon = 0{,}05$?

(Ef ykkur tókst ekki að ákvarða α, β og γ í (g)-lið megið þið nota að $\alpha = \gamma = 0{,}157$ og $\beta = 0{,}686$).