Landskeppni í eðlisfræði 2021

Úrslitakeppni (LAUSNIR)

10. maí kl. 09:00-12:00

Leyfileg hjálpargögn: Reiknivél sem geymir ekki texta.

Keppnin samanstendur af 3 dæmum. Athugaðu hvort þú hafir fengið öll dæmin.

Öll dæmin 3 vega jafnt og ekki verður dregið frá fyrir röng svör. Liðunum í hverju dæmi er ekki endilega raðað eftir erfiðleikastigi. Það má alltaf leysa seinni liði þó fyrri liðir hafi ekki verið leystir.

Skrifaðu lausnir þínar snyrtilega á lausnablöð sem þú færð afhent og merktu þau vel.

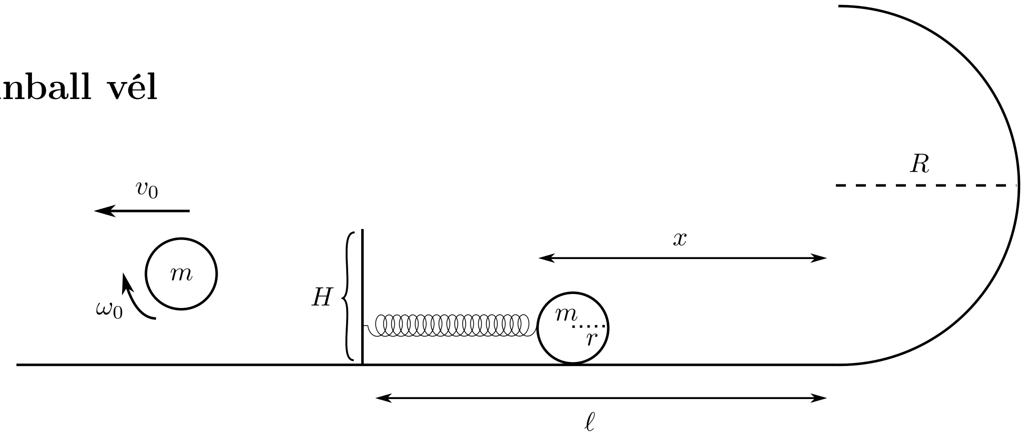
Tekið verður tillit til útreikninga við yfirferð á dæmum.

Góður frágangur hefur jákvæð áhrif!

Tafla yfir þekkta fasta

Nafn	Tákn	Gildi
Hraði ljóss í tómarúmi	c	$3{,}00 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}$
Þyngdarhröðun við yfirborð jarðarinnar	g	$9{,}82\,\mathrm{m/s^2}$
Massi rafeindar	m_e	$9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Rafsvörunarstuðull tómarúms	ϵ_0	$8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C^2\,s^2/(m^3\,kg)}$
Frumhleðslan	e	$1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Þyngdarfastinn	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg\,s^2)}$
Fasti Plancks	h	$6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$

1 Pinball vél



Gormur með gormstuðul k og óstrekkta lengd ℓ er festur við vegg af hæð H. Kúlu með massa m og geisla r er komið þannig fyrir að hún þjappar gorminum saman um vegalengd x. Við enda láréttu brautarinnar er hálfhringlaga gjörð með geisla R. Kúlunni er sleppt þannig af stað að hún rúllar án þess að renna meðfram brautinni þar til að hún sleppur frá gjörðinni í efsta punkti hennar og flýgur hinum megin við vegginn og lendir þar á láréttum fleti. Hverfitregða kúlunnar er $I = \sigma m r^2$ þar sem $\sigma = \frac{2}{5}$. Gera má ráð fyrir að geisli kúlunnar, r, sé lítil í samanburði við geisla gjarðarinnar, R, þ.e.a.s. að $r \ll R$.

A Að brjótast út úr búrinu (5,5 stig)

(a) **(3 stig)** Ákvarðið minnsta gildið á þjöppun gormsins, $x_{\min}$, þannig að kúlan komist upp í efsta punkt gjarðarinnar án þess að losna frá brautinni, einungis sem fall af k, m, g, R og σ.

Lausn: Höfum að kraftajafnan í efsta punkti gefur að:

$$ma = m\frac{v^2}{R} = \text{Þ} + mg \implies \text{Þ} = m\frac{v^2}{R} - mg > 0$$

Orkuvarðveislan gefur síðan að:

$$\frac{1}{2}kx^2 = 2mgR + \frac{1}{2}(1+\sigma)v^2 \implies mv^2 = \frac{kx^2 - 4mgR}{1+\sigma}$$

En þar með ályktum við að:

$$\begin{aligned} m\frac{v^2}{R} - mg > 0 &\implies \frac{kx^2}{(1+\sigma)R} - \frac{4mg}{(1+\sigma)} - mg > 0 \\ &\implies x^2 > (1+\sigma)\left(\frac{4}{1+\sigma} + 1\right)\frac{mgR}{k} = (5+\sigma)\frac{mgR}{k}. \end{aligned}$$

Þannig að við ályktum að:

$$x_{\min} = \sqrt{(5+\sigma)\frac{mgR}{k}}.$$

(b) **(2,5 stig)** Ákvarðið minnsta gildið á þjöppun gormsins, x_{sleppur}, þannig að kúlan flýgur yfir vegginn og lendir hinum megin á jörðinni, einungis sem fall af m, ℓ, g, R, H, k og σ.

Lausn: Við höfum þá samkvæmt stöðujöfnunum að:

$$\begin{pmatrix} \ell \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} vt \\ 2R - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$$

Neðri jafnan gefur því að:

$$t = \sqrt{\frac{4R - 2H}{g}}$$

En þar með er:

$$v = \frac{\ell}{t} = \sqrt{\frac{\ell^2 g}{4R - 2H}}.$$

Samkvæmt orkuvarðveislunni höfðum við að hraði kúlunnar þegar að hún losnaði var gefinn með:

$$v = \sqrt{\frac{\frac{k}{m}x^2 - 4gR}{1 + \sigma}} = \frac{\ell}{t} = \sqrt{\frac{\ell^2 g}{4R - 2H}}$$

En þar með höfum við að:

$$\frac{\ell^2 g}{4R - 2H}(1 + \sigma) = \frac{k}{m}x^2 - 4gR \implies x_{\text{sleppur}} = \sqrt{\frac{m\ell^2 g(1 + \sigma)}{2k(2R - H)} + \frac{4mgR}{k}}.$$

B Renna og rúlla (4,5 stig)

Gerum nú ráð fyrir að $x > x_{\text{sleppur}}$ svo a kúlan sleppur út úr búrinu og lendir hinum megin við vegginn. Eini krafturinn sem verkar á kúluna á meðan hún er í frjálsu falli er þyngdarkrafturinn. Þar með mun kúlan lenda á jörðinni með sama lárétta hraða, v_0, og hún yfirgaf gjörðina með. Þyngdarkrafturinn veldur engu kraftvægi í kasthreyfingunni svo að kúlan mun einnig lenda á jörðinni með sama hornhraða, ω_0, og hún yfirgaf gjörðina með. Hinsvegar þá er hornhraði kúlunnar í öfuga stefnu þegar hún lendir miðað við hvað hann þyrfti að vera svo að kúlan gæti haldið áfram að rúlla án þess að renna við lendingu. Þegar að kúlan lendir á jörðinni þá mun hún þess vegna renna til í einhvern tíma, τ, áður en að hún byrjar að rúlla aftur án þess að renna.

Látum nú núningsstuðulinn milli kúlunnar og flatarins sem að hún lendir á vera μ. Athugið að á meðan að kúlan rennur meðfram yfirborðinu þá finnur hún fyrir hreyfinúningskrafti, $F_{\text{nún}} = \mu Þ$, þar sem Þ er þverkraft-urinn sem verkar á kúluna, en þegar að kúlan rúllar án þess að renna þá finnur hún fyrir kyrrstöðunúning, $F_{\text{nún}} \leq \mu Þ$. Athugið einnig að á meðan að kúlan rennur meðfram yfirborðinu þá er EKKI satt að $a = r\alpha$.

(c) **(0,5 stig)** Skrifið niður kraftajöfnu fyrir kúluna á meðan að hún rennur og ákvarðið hröðun kúlunnar, a einungis sem fall af μ, m, g, σ og r.

Lausn: Kraftajafnan gefur að:

$$\begin{pmatrix} ma \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_{\text{nún}} \\ Þ - mg \end{pmatrix}$$

En þar sem að hér er um hreyfinúning að ræða því kúlan rennur meðfram yfirborðinu þá er $F_{\text{nún}} = \mu Þ = \mu mg$ og því höfum við að:

$$a = -\mu g.$$

(d) **(0,5 stig)** Skrifið niður kraftvægisjöfnu fyrir kúluna á meðan að hún rennur og ákvarðið hornhröðun kúlunnar, α, einungis sem fall af μ, m, g, σ og r.

Lausn: Kraftvægið er þá gefið með:

$$I\alpha = rF_{\text{nún}} = \mu mgr$$

og þar sem að $I = \sigma mr^2$ þá höfum við að:

$$\alpha = \frac{\mu mgr}{\sigma mr^2} = \frac{\mu g}{\sigma r}.$$

(e) **(1 stig)** Ákvarðið tímann, τ, sem líður þar til að kúlan byrjar aftur að rúlla án þess að renna einungis sem fall af $\sigma, v_0, \omega_0, r, g$ og μ. Athugið að kúlan mun byrja aftur að rúlla án þess að renna þegar $v(\tau) = r\omega(\tau)$ þar sem $v(0) = v_0$ og $\omega(0) = -\omega_0$.

Lausn: Við höfum þá að $v(t) = v_0 - \mu gt$ og $\omega(t) = -\omega_0 + \frac{\mu g}{\sigma r}t$ og kúlan mun byrja að rúlla án þess að renna þegar

$$v(t) = r\omega(t) \implies v_0 - \mu gt = -\omega_0 r + \frac{\mu g}{\sigma}t$$

En þar með höfum við að hún byrjar að rúlla án þess að renna eftir tíma:

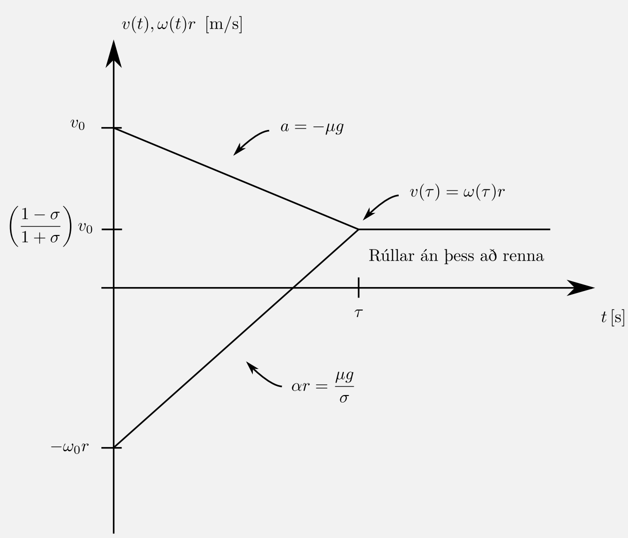
$$\tau = \frac{\sigma(v_0 + \omega_0 r)}{\mu g(1+\sigma)} = \frac{2v_0}{\mu g} \cdot \frac{\sigma}{1+\sigma}.$$

(f) **(2,5 stig)** Teiknið graf sem sýnir hraða kúlunnar, $v(t)$ sem fall af tíma, t. Teiknið inn á sama graf stærðina $r\omega(t)$. Merkið ásana og setjið inn á grafið ykkar eftirfarandi stærðir: $v(0), \omega(0)r, \tau, v(\tau), \omega(\tau)r$.

Lausn: Við byrjum fyrst á því að ákvarða $v(\tau)$. Höfum að:

$$v(\tau) = v_0 - \mu g\tau = \left(1 - \frac{2\sigma}{1+\sigma}\right)v_0 = \left(\frac{1-\sigma}{1+\sigma}\right)v_0.$$

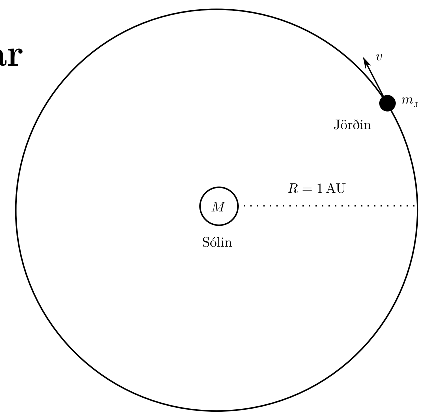
Grafið verður því:



2 Að senda geislavirkan úrgang til sólarinnar

[**Ath:** Í þessu dæmi er beðið um tölulegt gildi sem svar í öllum liðum.]

Við framleiðslu á kjarnaorku myndast gjarnan geislavirkur úrgangur sem er skaðlegur fyrir bæði menn og umhverfið. Nýlega hafa stjórnmálamenn með litla eðlisfræðiþekkingu lagt til að senda geislavirkan úrgang til sólarinnar. Í þessu dæmi munum við skoða þessa tillögu út frá eðlisfræðilegum sjónarmiðum.



Mynd 1: Jörðin er á hringhreyfingu umhverfis sólina með geisla $R = 1\,\mathrm{AU}$.

Við lítum á sem svo að jörðin sé á fullkominni hringhreyfingu um sólina í fjarlægð $R = 1\,\mathrm{AU} = 1{,}50 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$ frá miðju sólarinnar. Massi sólarinnar er $M = 1{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ og massi jarðarinnar er $m_J = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$.

(a) **(1 stig)** Hver er brautarhraði jarðarinnar, v_J, umhverfis sólina?

Lausn: Fáum þar sem að hún er á hringhreyfingu umhverfis sólina að:

$$m\frac{v^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} \implies v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3/kg\,s^2} \cdot 2{,}0 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}}{1{,}5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}}} = 29{,}8\,\mathrm{km/s}.$$

Hefðum líka getað athugað að:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \cdot 1{,}5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}}{365{,}25 \cdot 24 \cdot 60^2\,\mathrm{s}} = 29{,}9\,\mathrm{km/s}.$$

Lausnarhraði er skilgreindur sem minnsti hraðinn, v_ℓ, sem hlutur þarf að hafa til þess að sleppa út úr þyngdarsviði (Athugið að í $r = \infty$ er stöðuorka þyngdarkraftsins $U_G = 0$ og til þess að sleppa þarf hreyfiorkan í $r = \infty$ að vera $K \geq 0$).

(b) **(1 stig)** Með hversu miklum hraða (afstætt miðað við jörðina) þyrftum við að skjóta eldflaug upp frá jörðinni (samsíða brautarstefnu hennar) þannig að hún myndi losna út úr sólkerfinu?

Lausn: Til þess að sleppa út í $r = \infty$ frá sólinni þá þarf heildarorkan í $r = \infty$ að vera stærri en eða jöfn núll. Við höfum því að:

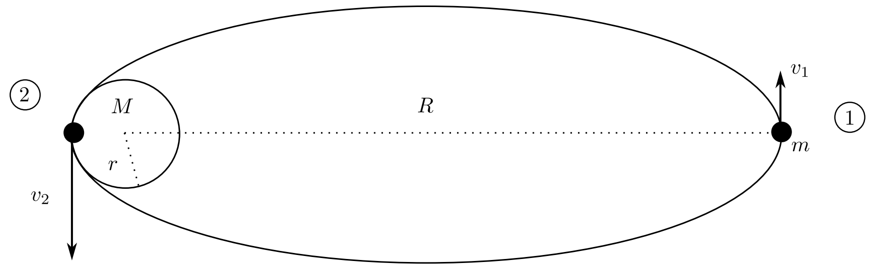
$$\frac{1}{2}mv_\ell^2 - \frac{GMm}{R} \geq 0 \implies v_\ell = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

En þá þarf afstæður hraði geimflaugarinnar miðað við jörðina (því geimflaugin er stödd á jörðinni og hefur því sama hraða og jörðin þegar hún er kyrrstæð) að vera:

$$v_\ell - v_J = \sqrt{\frac{2GM}{R}} - \sqrt{\frac{GM}{R}} = \left(\sqrt{2} - 1\right) v_J = 12{,}4\,\mathrm{km/s}.$$

[*Ef þér tókst ekki að leysa annað hvort **(a)** eða **(b)** lið máttu nota framvegis að brautarhraði jarðarinnar sé* $v = 30\,\mathrm{km/s}$ *og að afstæður hraði geimflaugarinnar miðað við jörðina þyrfti að vera* $13\,\mathrm{km/s}$ *hið minnsta.*]

Við skjótum nú geimflaug af stað frá jörðinni með allan geislavirka úrganginn á sporbaug (með miðju sólarinnar í öðrum brennipunktinum) eins og sést á mynd 2 hér fyrir neðan. Látum heildarmassa geimflaugarinnar vera m. Látum ① tákna staðsetningu geimflaugarinnar þegar henni er sleppt af stað frá jörðinni (í fjarlægð R frá miðju sólarinnar) með hraða v_1. Látum ② tákna staðsetningu geimflaugarinnar þegar hún snertir yfirborð sólarinnar í fjarlægð $r = 6{,}96 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$ (sem er geisli sólarinnar) með hraða v_2.



Mynd 2: Tillaga að því hvernig væri hægt að senda geislavirka úrganginn til sólarinnar.

(c) **(3 stig)** Ákvarðið töluleg gildi á brautarhröðunum v_1 og v_2 með orku- og hverfiþungavarðveislu.

Lausn: Orkuvarðveislan gefur að:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r}$$

Við notum síðan að hverfiþungi geimflaugarinnar er varðveittur (því þyngdarlögmálskrafturinn er miðlægur kraftur) og hornið sem skriðþungi geimflaugarinnar myndar við geislann, $\vec{r}$, er $\theta = 90°$ í 1 og 2. Þar með ályktum við að hverfiþungavarðveislan gefur að:

$$mv_1R = mv_2r$$

Við stingum því inn $v_1 = \frac{r}{R}v_2$ inn í orkuvarðveisluna og fáum:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{r}{R}v_2\right)^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r} \implies v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{\frac{r}{R}(r+R)}} = 616\,\text{km/s}.$$

En þar með höfum við að:

$$v_1 = \frac{r}{R}v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{\frac{R}{r}(r+R)}} = 2{,}86\,\text{km/s}.$$

(d) **(1 stig)** Með hversu miklum hraða (afstætt miðað við jörðina) þyrftum við að skjóta eldflauginni upp frá jörðinni (samsíða brautarstefnu hennar en í gagnstæða stefnu) þannig að hún myndi enda í sólinni? Hvort væri þá erfiðara að skjóta geimflauginni inn að sólinni eða út úr sólkerfinu?

Lausn: Þá þyrfti afstæður hraði eldflaugarinnar miðað við jörðina að vera:

$$v_J - v_1 = 26{,}9\,\text{km/s} > 12{,}4\,\text{km/s},$$

svo við ályktum að það væri erfiðara að senda eldflaugina inn að sólinni heldur en út úr sólkerfinu.

(e) **(2 stig)** Notið 3. lögmál Keplers til þess að ákvarða tölulegt gildi á tímanum, τ, sem það tekur geimflaugina að ferðast frá jörðinni og til sólarinnar.

Lausn: Við höfum þá að miðvik sporbrautarinnar er $a = \frac{r+R}{2}$ og við sjáum að $\tau = \frac{1}{2}T$ þar sem T er umferðartími plánetunnar. En þá höfum við samkvæmt þriðja lögmáli Keplers að:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \implies T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}a^{3/2} = 130{,}2\,\text{dagar} \implies \tau = 65{,}1\,\text{dagar}.$$

(f) **(2 stig)** Því miður þá hæfir ruslið ekki sólina og heldur því áfram á sömu sporbraut umhverfis sólina. Mun ruslið einhvern tímann lenda i árekstri við jörðina? Ef svo er, eftir hversu mörg ár? Takið fram þær nálganir (ef einhverjar) sem þið notið við úrlausn ykkar. Hér verður gefið stig fyrir úrlausnina ykkar og þær hugmyndir sem þið varpið fram frekar heldur en endilega nákvæmt svar.

Lausn: Við höfðum sýnt að umferðartími geimflaugarinnar væri $T_{\text{rusl}} = 130{,}2\,\text{dagar}$. Það þýðir að þegar að geimflaugin fer eina umferð þá hefur jörðin farið:

$$p = \frac{T_{\text{rusl}}}{T_{\text{Jörð}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1 + \frac{r}{R}\right)^{3/2} = 0{,}356$$

úr umferð. Við skoðum því hvenær þetta verður svo gott sem heil tala. Við þurfum að setja einhver viðmið eins og að þær lendi í árekstri ef að það munar minna heldur en einum degi á brautarstöðum þeirra. Látum $[x] \in$ tákna námundun rauntölunnar, x að næstu heilu tölu. Látum n tákna fjölda umferða sem að eldflaugin hefur lokið. Við viljum skoða fyrir hvaða n við höfum að:

$$\big|[np] - np\big| < \frac{1\,\text{dagur}}{365{,}25\,\text{dagar}} = 2{,}73 \cdot 10^{-3}.$$

Sem þýðir að við tökum fyrstu heiltöluna, m, þannig að gildið á np fellur innan $[0{,}9973, 1{,}0027]$ við heila tölu. Það er auðvelt að ítra þetta á reiknivél með ANS-ítrun (sérstaklega ef maður gerir: SHIFT - Mode Setup - 2: LineIO). Við fáum að þetta gerist eftir:

$$m = 68\,\text{ár}.$$

Þá hefur eldflaugin farið $n = 191$ umferð í kringum sólina og þá munar:

$$\big|mT_{\text{jörð}} - nT_{\text{rusl}}\big| = 7\,\text{klst}.$$

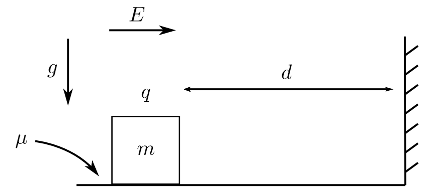
3 Kubbur í rafsegulsviði

A Kubbur í rafsviði (5 stig)

Lítum á kubb með massa m og jákvæða hleðslu q sem stendur kyrr á láréttum fleti í fjarlægð d frá hörðum vegg. Látum núningsstuðulinn milli kubbsins og flatarins vera μ. Á kubbinn verkar einsleitt rafsvið E í lárétta stefnu til hægri og þyngdarsvið g í lóðrétta stefnu niður, eins og sjá má á mynd 1 hér til hægri.

(a) **(1 stig)** Ákvarðið tímann, t_0, sem líður frá því að kubbnum er sleppt úr kyrrstöðu í fjarlægð d frá veggnum og þar til hann skellur á veggnum í fyrsta skipti, einungis sem fall af m, d, q, g, μ og E.

(b) **(0,5 stig)** Ákvarðið hraða kubbsins, v_0, rétt áður en hann skellur á veggnum í fyrsta skipti, einungis sem fall af m, d, q, g, μ og E.

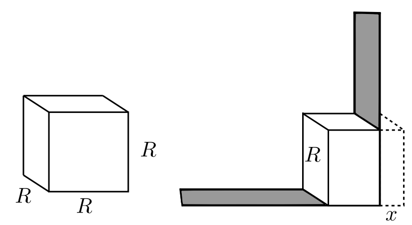


Mynd 1: Uppstillingin í lið (a) og (b).

Við viljum nú skoða hvað gerist þegar að kubburinn lendir í árekstri við vegginn eins og sjá má á mynd 3 hér til hægri. Kubburinn er teningslaga með allar hliðarlengdir R. Þegar hann lendir í árekstri við harða vegginn, þá þjappast ein hlið kubbsins saman þannig að hún styttist um vegalengd x. Einfalt líkan af árekstri kubbsins við vegginn lítur á sem svo að krafturinn, $F(x)$, sem verkar milli veggsins og kubbsins sé eins og frá gormi með gormstuðul $k = KR$, og er því gefinn með: $F(x) = -KRx$ þar sem K er fasti sem kallast rýmisfjöðrunarstuðull og er háður efninu sem kassinn er samsettur úr.

(c) **(0,5 stig)** Ákvarðið mestu þjöppun kassans, $x_{\max}$, í árekstrinum, einungis sem fall af $m, d, q, g, v_0, t_0, E, K$ og R.

(d) **(1,5 stig)** Ákvarðið tímann, T, sem að árekssturinn við vegginn tekur, einungis sem fall af $m, d, q, g, v_0, t_0, E, K$ og R.



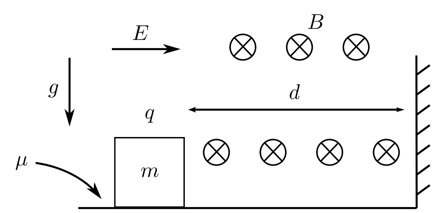
Mynd 2: Uppstillingin í lið (d) og (e).

Þar sem að gormkrafturinn $F(x)$ í liðum **(c)** og **(d)** er geyminn þá getum við gert ráð fyrir að árekstrarnir við vegginn séu alfjaðrandi (þ.e.a.s. að engin orka tapast við árekssturinn) og að þar með endurkastist kassinn með sama hraða til baka og hann lenti á veggnum með.

(e) **(1,5 stig)** Látum d_n tákna mestu fjarlægðina frá veggnum sem að kubburinn nær eftir n-ta árekstur við vegginn (þá er $d_0 = d$). Sýnið að þá sé til fasti α þannig að: $d_{n+1} = \alpha\, d_n$ og ákvarðið fastann α einungis sem fall af μ, m, q, g og E.

B Flugtak (5 stig)

Nú kveikjum við á einsleitu segulsviði, B, inn í blaðið og setjum kubbinn aftur í fjarlægð d frá veggnum eins og sést hér til hægri á mynd 3.



Mynd 3: Uppstillingin í hluta B.

(f) **(1 stig)** Ákvarðið hraða kubbsins, v, þegar hann losnar frá fletinum, einungis sem fall af m, q, g og B.

(g) **(1,5 stig)** Notið kraftajöfnuna til að sýna að til séu fastar β og γ þ.a. hröðun kassans (á meðan að hann er í snertingu við lárétta flötinn) sé gefin með:

$$a = \frac{dv}{dt} = \beta v + \gamma$$

Ákvarðið fastana β og γ einungis sem fall af m, d, q, g, μ, E og B.

(h) **(2,5 stig)** Leysið diffurjöfnuna í liðnum hér á undan til þess að ákvarða tímann, τ, sem líður þar til að kubburinn tekur á loft einungis sem fall af $\beta, \gamma, \mu, g, m, q, E$ og B.

Lausn:

(a) Við höfum þá að kraftajafnan gefur (að því gefnu að $F_E > F_{\text{nún}}$).

$$ma = qE - \mu mg \implies a = \frac{qE}{m} - \mu g.$$

En þar með er:

$$d = \frac{1}{2}at_0^2 \implies t_0 = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{2d}{\frac{qE}{m} - \mu g}}.$$

(b) Þá höfum við að:

$$v_0 = \sqrt{2ad} = \sqrt{\frac{2d}{m}(qE - \mu mg)}.$$

(c) Þar sem að þetta heðgar sér eins og gormur þá höfum við að öll hreyfiorka kubbsins breytist í gormstöðuorku svo:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}kx^2 \implies x_{\max} = v_0\sqrt{\frac{m}{k}} = v_0\sqrt{\frac{m}{KR}}.$$

(d) Kassinn er í árekstri við vegginn í hálfan sveiflutíma gormsins svo að við höfum að:

$$\tau = \frac{T}{2} = \frac{\frac{2\pi}{\omega}}{2} = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{m}{KR}}.$$

Þar sem að sveiflutíðnin gormsins er gefin með $\omega = \sqrt{\frac{KR}{m}}$.

(e) Orkan sem tapast út úr kerfinu er aðeins vegna vinnu núningskraftsins svo við höfum að:

$$qEd_n - \mu mg(d_n + d_{n+1}) = qEd_{n+1} \implies d_{n+1} = \left(\frac{qE - \mu mg}{qE + \mu mg}\right)d_n.$$

Við ályktum því að:

$$\alpha = \frac{qE - \mu mg}{qE + \mu mg}$$

(f) Þá er kraftajafnan:

$$\begin{pmatrix} ma \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qE - \mu Þ \\ Þ + qvB - mg \end{pmatrix}$$

Kubburinn helst í snertingu við gólfið þar til $Þ = 0$ en þá er:

$$0 = Þ = mg - qvB \implies v = \frac{mg}{qB}.$$

(g) Kraftajafnan gefur þá að á meðan kubburinn er í snertingu við gólfið er $Þ = mg - qvB$ svo:

$$ma = qE - \mu Þ = qE - \mu(mg - qvB) = \mu qBv + (qE - \mu mg)$$

Við ályktum því að $\beta = \frac{\mu qB}{m}$ og $\gamma = \frac{qE}{m} - \mu g$.

(g) Við höfum þá að:

$$\frac{dv}{dt} = \beta v + \gamma$$

og með því að beita aðskilnaði breytistærða fáum við að:

$$\int_0^{v(t)} \frac{dv}{\beta v + \gamma} = \int_0^t dt$$

En með því að tegra báðar hliðar þá fáum við að:

$$\left[\frac{1}{\beta}\ln(\beta v + \gamma)\right]_0^{v(t)} = [t]_0^t$$

Sem gefur því að:

$$\frac{1}{\beta}\ln\big(\beta v(t) + \gamma\big) - \frac{1}{\beta}\ln(\gamma) = t$$

Sem við tökum saman þannig að:

$$\ln\left(\frac{\beta}{\gamma}v(t) + 1\right) = \beta t \implies v(t) = \frac{\gamma}{\beta}\left(e^{\beta t} - 1\right)$$

Kubburinn losnar þegar $Þ = 0$ svo við höfum að:

$$Þ(\tau) = 0 \implies mg - qv(\tau)B = 0 \implies mg = \frac{q\gamma B}{\beta}(e^{\beta\tau} - 1) \implies \tau = \frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{\beta mg}{q\gamma B} + 1\right).$$

Ef við stingum inn föstunum β og γ úr liðnum á undan þá höfum við að:

$$\tau = \frac{m}{\mu qB}\ln\left(\frac{qE}{qE - \mu mg}\right)$$

og þá sér í lagi þá fáum við að hraði hans þegar hann losnar er (eðlilega) gefinn með:

$$v(\tau) = \frac{mg}{qB}.$$