Landskeppni í eðlisfræði 2022

Úrslitakeppni

26. mars kl. 09:00-12:00

Leyfileg hjálpargögn: Reiknivél sem geymir ekki texta.

Keppnin samanstendur af 3 dæmum. Athugaðu hvort þú hafir fengið öll dæmin.

Öll dæmin 3 vega jafnt og ekki verður dregið frá fyrir röng svör. Liðunum í hverju dæmi er ekki endilega raðað eftir erfiðleikastigi. Það má alltaf leysa seinni liði þó fyrri liðir hafi ekki verið leystir.

Skrifaðu lausnir þínar snyrtilega á lausnablöð sem þú færð afhent og merktu þau vel.

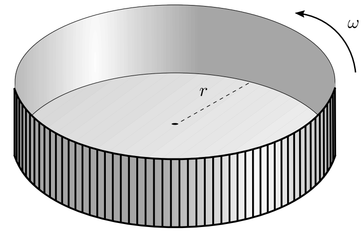
Tekið verður tillit til útreikninga við yfirferð á dæmum.

Góður frágangur hefur jákvæð áhrif!

Tafla yfir þekkta fasta

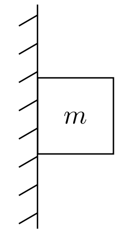
Nafn	Tákn	Gildi
Hraði ljóss í tómarúmi	c	$3{,}00 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}$
Þyngdarhröðun við yfirborð jarðarinnar	g	$9{,}82\,\mathrm{m/s^2}$
Massi rafeindar	m_e	$9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Rafsvörunarstuðull tómarúms	ϵ_0	$8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C^2\,s^2/(m^3\,kg)}$
Frumhleðslan	e	$1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Þyngdarfastinn	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg\,s^2)}$
Fasti Plancks	h	$6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
Gasfastinn	R	$8{,}314\,\mathrm{J/(mol\,K)}$

1 Snúningstromla



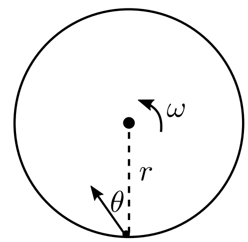
Anna og Baldur eru flóttaleikjahönnuðir hjá Reykjavík Escape Room. Þau eru að sérhanna nýjan flóttaleik fyrir árshátíð eðlisfræðinema. Fórnarlömbumunum er komið fyrir inni í hringlaga tromlu með geisla $r = 10\,\mathrm{m}$ sem snýst með föstum, en óþekktum, hornhraða ω. Eina leiðin til að sleppa út úr tækinu er með því að ákvarða hornhraðann. Anna og Baldur ákveða að prufukeyra flóttaleikinn svo að hann sé nógu skemmtilegur fyrir kröfuharða eðlisfræðinemana.

(a) **(2 stig)** Anna leggur kubb með massa $m = 2{,}0\,\mathrm{kg}$ upp við vegg snúningstromlunar og tekur eftir því að kubburinn dettur ekki niður heldur rétt helst kyrr í sömu hæð. Núningsstuðullinn milli kubbsins og veggjarins er $\mu = 0{,}25$. Hver þarf þá hornhraði tromlunnar, ω, að vera til þess að kubburinn rétt haldist kyrr við vegginn í fastri hæð?



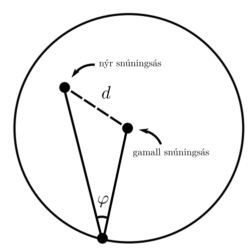
Mynd 1: Fyrir (a)-lið

(b) **(3 stig)** Eftir að þau hafa ákvarðað hornhraðann á tækinu þá eru fórnarlömbin beðin um að setjast í stól sem er festur við vegginn og spenna beltin. Þá er hornhraðinn á tækinu hækkaður upp í nýtt, óþekkt gildi og í miðju gólfinu á tromlunni opnast lítil hola. Sætið þeirra er útbúið með gráðuboga og með því að ýta á takka er hægt að skjóta kúlu lárétt af stað með óþekktum hraða v_k úr hæð $h = 1{,}0\,\mathrm{m}$ með stillanlegu horni θ. Markmiðið er að skjóta kúlunni ofan í litlu holuna í miðjunni á tromlunni. Anna tekur eftir því að ef að til þess að hitta ofan í holuna þá þarf hún að skjóta kúlunni með horni $\theta = 45°$ til vinstri miðað við stefnuna beint inn að miðju hringsins. Hver er hornhraði tromlunnar?



Mynd 2: Fyrir (b)-lið

Nú er snúningsás tromlunnar færður um vegalengd $d = 2{,}0\,\mathrm{m}$ frá miðjunni og hornhraðanum breytt. Látum φ vera skilgreint eins og á mynd 3. Nú er miðsóknarkrafturinn ($F_{\text{mið}}$) ekki lengur inn að miðju hringsins heldur er hann alltaf í áttina að snúningsásnum. Hinsvegar er þverkrafturinn (Þ) alltaf inn að miðju hringsins og til þess að kraftajafnan stemmi þá verður hluturinn að finna fyrir bæði lóðréttum (F_y) og láréttum (F_x) núningskrafti.



Mynd 3: Fyrir (cd)-lið

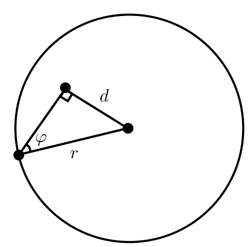
(c) **(1 stig)** Sýnið að ávallt gildi að:

$$F_x = F_{\text{mið}} \sin\varphi, \qquad \text{Þ} = F_{\text{mið}} \cos\varphi.$$

(d) **(2 stig)** Sýnið að til þess að kubburinn haldist uppi þarf:

$$F_{\text{mið}} \geq \frac{mg}{\sqrt{\mu^2 \cos^2\varphi - \sin^2\varphi}}.$$

(e) **(2 stig)** Anna tekur eftir því að kubburinn helst rétt svo uppi í uppstillingunni sem að sést á mynd 4. Hver er hornhraði tromlunnar?



Mynd 4: Fyrir (e)-lið

Lausn:

(a) Höfum þá að:

$$\begin{pmatrix} m\omega^2 r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Þ \\ F_{\text{nún}} - mg \end{pmatrix}$$

Svo við ályktum að:

$$mg = F_{\text{nún}} \leq \mu Þ = \mu m \omega^2 r$$

En þar með er:

$$\omega^2 \geq \frac{g}{\mu r} \implies \omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{\mu r}} = 1{,}98\,\text{rad/s}.$$

(b) Í viðmiðunarkerfi jarðar (sem snýst ekki) er hraði boltans:

$$\vec{v}_{\text{bolti}} = \begin{pmatrix} \omega r - v_k \sin\theta \\ v_k \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_b \end{pmatrix}.$$

Til þess að hitta þarf tíminn sem líður að vera:

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \implies t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}451\,\text{s}.$$

Þannig að lárétta stöðujafnan $v_b t = r$ gefur að:

$$v_b = \frac{r}{t} = r\sqrt{\frac{g}{2h}} = 22{,}2\,\text{m/s}.$$

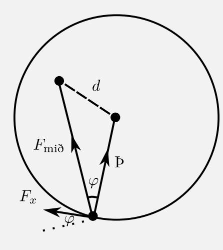
þannig að

$$v_k = \frac{v_b}{\cos\theta} = \frac{r}{\cos\theta}\sqrt{\frac{g}{2h}} = 31{,}3\,\text{m/s}$$

En þar með ályktum við að:

$$\omega = \frac{v_k \sin\theta}{r} = \tan\theta \sqrt{\frac{g}{2h}} = 2{,}22\,\text{rad/s}.$$

(c) Kraftamyndin verður þá:



Sem gefur þá strax að:

$$Þ = F_{\text{mið}} \cos\varphi, \qquad F_x = F_{\text{mið}} \sin\varphi$$

(d) Í lóðréttu stefnuna höfum við hinsvegar að:

$$F_y = mg$$

og til þess að hann haldist uppi þarf:

$$F_{\text{nún}} \leq \mu Þ$$

En þar með fáum við að:

$$F_{\text{mið}}^2 \sin^2\varphi + (mg)^2 = F_x^2 + F_y^2 = F_{\text{nún}}^2 \leq \mu^2 Þ^2 = \mu^2 F_{\text{mið}}^2 \cos^2\varphi.$$

En þar með ályktum við að:

$$F_{\text{mið}} \geq \frac{mg}{\sqrt{\mu^2\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}}.$$

(e) Þar sem að kubburinn helst rétt svo uppi þá gildir jafnaðarmerkið og við höfum að fjarlægðin að snúningsásnum, x, í þessari stöðu er:

$$x = r\cos\varphi$$

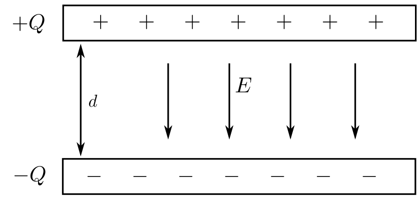
En við sjáum þar að auki að:

$$r\sin\varphi = d \implies \varphi = \arcsin\left(\frac{d}{r}\right) = 11{,}5°.$$

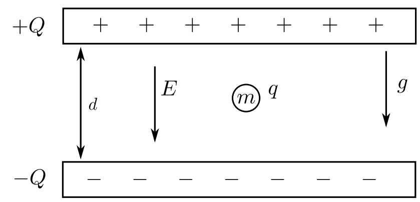
En þar með er $x = r\cos\varphi = 9{,}80\,\text{m}$ svo við ályktum að:

$$m\omega^2 x = \frac{mg}{\sqrt{\mu^2\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}} \implies \omega = \sqrt{\frac{g}{x\sqrt{\mu^2\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}}} = 2{,}65\,\text{rad/s}.$$

2 Skopparapeningur

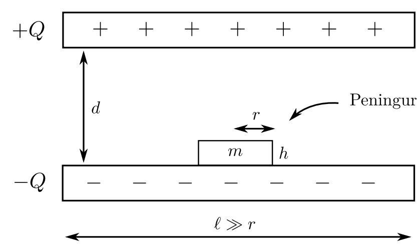


Plötuþéttir samanstendur af tveimur plötum með flatarmál A í fjarlægð d frá hvor annarri. Plöturnar hafa gagnstæða hleðslu $\pm Q$. Inni í plötuþéttinum er einsleitt rafsvið E sem stefnir niður í áttina að neikvæðu plötu plötuþéttisins.



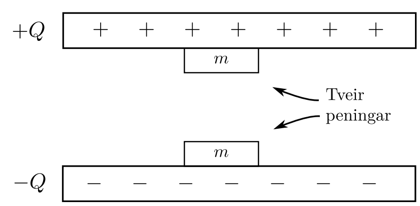
(a) **(1 stig)** Hugsum okkur að lítið rykkorn með massa m og hleðslu q sé inni í plötuþéttinum. Fyrir tiltekið gildi á hleðslunni, q, þá mun rykkornið svífa í lausu lofti. Ákvarðið hleðsluna q og formerki hennar. Táknið svarið ykkar sem fall af q, g og E.

(b) **(1 stig)** Nú skulum við í staðinn leggja óhlaðinn pening með massa m, geisla $r \ll \ell$ og hæð $h \ll d$ ofan á neikvæðu plötu plötuþéttisins. Við snertinguna fær peningurinn hleðslu $q = -\alpha Q$ þar sem $\alpha \ll 1$. Hvert er minnsta gildið á α þannig að peningurinn lyftist á loft?



(c) **(1 stig)** Ef peningurinn lyftist á loft, hversu langur tími, t_1, líður þá þar til að hann lendir á efri plötunni? Táknið svarið ykkar sem fall af m, d, α, Q og E.

(d) **(1 stig)** Þegar að peningurinn lendir á efri plötunni þá fær hann hleðslu $q = +\alpha Q$. Hversu langur tími, t_2, líður þá þar til að peningurinn lendir aftur á neðri plötunni? Táknið svarið sem fall af m, d, α, Q og E.



(e) **(1 stig)** Hugsum okkur nú að við komum fyrir tveimur óhlöðnum peningum inni í plötuþéttinum. Annar byrjar við neikvæðu plötuna $(-Q)$ og hinn við jákvæðu plötuna $(+Q)$. Peningunum er báðum sleppt við tímann $t = 0\,\mathrm{s}$. Ákvarðið tímann, τ, sem líður þar til að peningarnir lenda í árekstri við hvorn annan. Táknið svarið ykkar sem fall af m, d, α, Q og E.

(Ath: Hunsið rafkraftinn sem að verkar á milli peninginanna. Hann er óverulegur í samanburði við rafkraftinn vegna rafsviðsins.)

(f) **(3 stig)** Peningarnir festast saman í árekstrinum og samanlögð hleðslan á peningunum dreifist jafnt yfir yfirborð samsetta peningsins. Ákvarðið tímann, T, sem líður frá því að peningunum var sleppt og þar til að þeir lenda á neðri plötu plötuþéttisins. Táknið svarið ykkar sem fall af m, d, α, Q og E.

(g) **(2 stig)** Teiknið graf sem sýnir hæð efri peningins sem fall af tíma.

Lausn:

(a) Við höfum þá að:

$$mg = qE \implies q = \frac{mg}{E}$$

Þar sem að rafkrafturinn þarf að verka upp til þess að vinna gegn þyngdarkraftinum er hleðslan neikvæð.

(b) Þá þarf $\alpha QE > mg \implies \alpha > \frac{mg}{QE}$.

(c) Þá er:

$$ma_1 = qE - mg \implies a_1 = \frac{qE}{m} - g = \frac{\alpha QE}{m} - g$$

Svo tíminn sem líður er:

$$\frac{1}{2}a_1 t_1^2 = d \implies t_1 = \sqrt{\frac{2d}{a_1}} = \sqrt{\frac{2d}{\frac{\alpha QE}{m} - g}}$$

(d) Þá er hröðunin:

$$ma_2 = qE + mg \implies a_2 = \frac{qE}{m} + g = \frac{\alpha QE}{m} + g$$

Svo tíminn sem líður er:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2d}{a_2}} = \sqrt{\frac{2d}{\frac{\alpha QE}{m} + g}}.$$

(e) Höfum þá að peningarnir ferðast í heildina d:

$$d_1 = \frac{1}{2}a_1\tau^2, \qquad d_2 = \frac{1}{2}a_2\tau^2$$

$$d = d_1 + d_2 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)\tau^2 \implies \tau = \sqrt{\frac{2d}{a_1 + a_2}} = \sqrt{\frac{md}{\alpha QE}}.$$

(f) Athugum fyrst hraðann eftir áreksturinn með skriðþungavarðveislu:

$$mv_2 - mv_1 = 2mv \implies v = \frac{v_2 - v_1}{2}$$

En hér er $v_1 = a_1\tau$ og $v_2 = a_2\tau$ svo $v_2 - v_1 = (a_2 - a_1)\tau = 2g\tau$ þannig að $v = g\tau$. Áreksturinn gerist í hæðinni:

$$D = \frac{1}{2}a_1\tau^2$$

og engin hleðsla er eftir á samsetta peningnum svo hröðunin er g:

$$\frac{1}{2}a_1\tau^2 = \tau g t + \frac{1}{2}g t^2 \implies t = \frac{-2\tau \pm \sqrt{4\tau^2 + 4\frac{a_1}{g}\tau^2}}{2}$$

Við veljum jákvæðu rótina og höfum að:

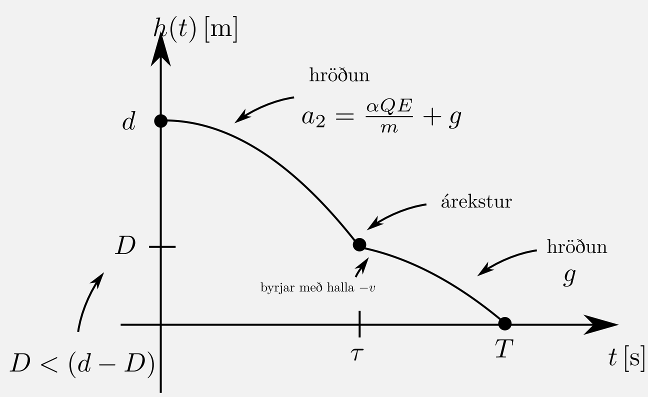
$$t = \tau\left(\sqrt{1 + \frac{a_1}{g}} - 1\right)$$

En þá er $T = \tau + t$ svo:

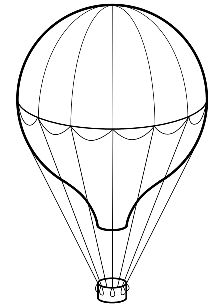
$$T = \tau\sqrt{1 + \frac{a_1}{g}} = \tau\sqrt{\frac{\alpha Q E}{m g}} = \sqrt{\frac{d}{g}}.$$

Önnur einföld leið til þess að sjá þetta er að skoða massamiðju peninganna. Massamiðjan finnur einungis fyrir þyngdarkraftinum og fellur hálfa lengd plötuþéttisins.

(g) Grafið verður þá:



3 Phileas Fogg og loftbelgurinn



Phileas Fogg ætlar að fljúga loftbelg. Til að byrja með stendur loftbelgurinn kyrr á jörðinni þar sem hitastigið er $T_0 = 15\,^\circ\mathrm{C}$ og loftþrýstingurinn er $P_0 = 1\,\mathrm{atm} = 101{,}3\,\mathrm{kPa}$. Eðlismassi lofts við þetta hitastig er $\rho_0 = 1{,}225\,\mathrm{kg/m^3}$. Loftbelgurinn vegur $M_b = 325\,\mathrm{kg}$ (karfan, dúkurinn og Phileas) og rúmmál belgsins er $V_b = 1000\,\mathrm{m^3}$. Phileas kveikir á stillanlega gashitaranum og hitar loftið inni í belgnum upp í hitastig T_b. Látum loftið fyrir utan belginn hafa hitastig T_u, þrýsting P_u og eðlismassa ρ_u. Mólmassi lofts er $\mu = 0{,}029\,\mathrm{kg/mól}$.

(a) **(1 stig)** Notið lögmál Arkímedesar (hér er flæðiefnið loftið fyrir utan belginn) til þess að finna skilyrði fyrir því að loftbelgurinn geti tekið á loft. Hver má eðlismassi loftsins inni í belgnum, ρ_b, vera hið mesta til þess að loftbelgurinn geti tekið á loft?

(b) **(1 stig)** Sýnið að umrita megi gaslögmálið, $PV = nRT$, yfir á formið:

$$P\mu = \rho RT.$$

þar sem $\mu = \frac{m}{n}$ er mólmassi gasins, m er massi þess og R er gasfastinn.

(c) **(1 stig)** Þar sem að loftbelgurinn er opinn að neðan þá er þrýstingurinn inni í belgnum jafn þrýstingnum fyrir utan belginn, það er $P_b = P_u$. Notið liðinn á undan til þess að sýna að alltaf gildir að:

$$\rho_b T_b = \rho_u T_u$$

(d) **(1 stig)** Ákvarðið tölulegt gildi á hitastiginu, T_b, sem að Phileas þarf að stilla gashitarann á hið minnsta til þess að geta tekið á loft.

Nú er Phileas Fogg búinn að taka á loft og svífur um háloftinn. En hann tekur eftir því að þegar ofar dregur þá er erfiðara að ná andanum og hann ályktar að það sé vegna þess að loftþrýstingurinn minnkar þegar ofar dregur. Hann hefur einnig tekið eftir því að þegar ofar dregur þá verður kaldara. Látum því $\rho(h)$ tákna eðlismassa loftsins fyrir utan belginn í hæð h. Eins látum og við $T(h)$ og $P(h)$ tákna annars vegar hitastig og hinsvegar þrýsting loftsins fyrir utan belginn í hæð h yfir jörðu.

(e) **(1 stig)** Phileas gerir hitastigsmælingar í vaxandi hæð yfir jörðu og skráir niður í eftirfarandi töflu:

h [m]	0	100	200	300	400	500
$T(h)$ [°C]	15	14	13	12	11	10

Hann áætlar að lýsa megi hitastiginu, $T(h)$, í hæð h yfir jörðu með línulegu falli $T(h) = T_0 - \alpha h$. Notið mælingar Phileasar til þess að ákvarða tölulegt gildi á fastanum α.

(f) **(1 stig)** Samkvæmt lögmáli Pascals þá breytist loftþrýstingurinn með hæð samkvæmt: $\Delta P = -\rho g \Delta h$. Á örsmæðarformi getum við því skrifað þetta sem afleiðuna $\frac{dP}{dh} = -\rho(h)g$. Notið gaslögmálið til þess að sýna að til séu fastar a og b (og ákvarðið fastana) þannig að:

$$\frac{dP}{dh} = -\frac{P}{a - bh} \tag{1}$$

(g) **(2 stig)** Sýnið, með því að leysa diffurjöfnuna í jöfnu (1) hér á undan að til séu fastar A og B (og ákvarðið fastana) þannig að lýsa megi loftþrýstingnum í hæð h með jöfnunni:

$$P(h) = P_0 \left(1 - Ah\right)^B$$

(h) **(2 stig)** Nú ætlar Phileas að fljúga yfir Alpana sem hafa hæð $h = 4800\,\mathrm{m}$. Hvert þarf hitastigið inni í belgnum, $T_b(h)$ að vera hið minnsta í þessari hæð til þess að hann komist yfir Alpana?

Lausn:

(a) Höfum að til þess að hann lyftist þarf:

$$\rho_u V_b g \geq M_b g + \rho_b V_b g$$

Sem gefur því að:

$$\rho_b \leq \rho_u - \frac{M_b}{V_b} = 1{,}225\,\mathrm{kg/m^3} - \frac{325\,\mathrm{kg}}{1000\,\mathrm{m^3}} = 0{,}900\,\mathrm{kg/m^3}$$

(b) Fáum að:

$$PV = nRT \implies P\frac{1}{n} = \frac{1}{V}RT \implies P\frac{m}{n} = \frac{m}{V}RT \implies P\mu = \rho RT.$$

(c) Nú er $\rho T = \frac{P\mu}{R}$ = fasti svo að ρT er einnig fasti. En þar með gildir að:

$$\rho_b T_b = \frac{P\mu}{R} = \rho_u T_u.$$

(d) Þá er $\rho_u = \rho_0$ og $T_u = T_0$ svo:

$$\rho_b = \frac{\rho_0 T_0}{T_b}$$

Þar að auki sem $\rho_b \leq \rho_0 - \frac{M}{V_b}$.
En því fæst:

$$\frac{\rho_0 T_0}{T_b} \leq \rho_0 - \frac{M}{V_b} = \frac{\rho_0 V_b - M}{V_b} \implies T_b \geq \frac{\rho_0 T_0 V_b}{\rho_0 V_b - M} = 392\,\mathrm{K} = 119\,^\circ\mathrm{C}.$$

(e) Lækkar um $1\,^\circ\mathrm{C}$ per $100\,\mathrm{m}$ og því er hallatalan:

$$\alpha = -\frac{dT}{dh} = \frac{1}{100} = 0{,}01\,\mathrm{K/m}.$$

(f) Höfum að:

$$P\mu = \rho RT \implies \rho(h) = \frac{\mu}{R} \cdot \frac{P(h)}{T(h)}.$$

svo:

$$\frac{dP}{dh} = -\rho(h)g = -\frac{\mu g}{R} \cdot \frac{P}{T(h)} = -\frac{\mu g}{R} \cdot \frac{P}{T_0 - \alpha h} = -\frac{P}{\frac{RT_0}{\mu g} - \left(\frac{\alpha R}{\mu g}\right) h}$$

þannig að:

$$a = \frac{RT_0}{\mu g} = 8410\,\mathrm{m}, \quad \text{og} \quad b = \frac{\alpha R}{\mu g} = 0{,}292.$$

(g) Með aðskilnaði breytistærða fæst að:

$$\int_{P_0}^{P(h)} \frac{dP}{P} = -\int_0^h \frac{dh}{a-bh} \implies \ln\left(\frac{P(h)}{P_0}\right) = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{a-bh}{a}\right)$$

Sem gefur því að:

$$P(h) = P_0\left(1 - \frac{b}{a}h\right)^{\frac{1}{b}}$$

þannig að:

$$A = \frac{b}{a} = \frac{\frac{\alpha R}{\mu g}}{\frac{RT_0}{\mu g}} = \frac{\alpha}{T_0}, \qquad \text{og} \qquad B = \frac{1}{b} = \frac{\mu g}{\alpha R}.$$

Svo við ályktum að:

$$P(h) = P_0\left(1 - \frac{\alpha}{T_0}h\right)^{\frac{\mu g}{\alpha R}}$$

(h) Við athugum þá að:

$$\rho(h) = \frac{P(h)\mu}{RT(h)} = \frac{P_0\mu}{RT_0}\left(1 - \frac{\alpha}{T_0}h\right)^{\frac{\mu g}{\alpha R}-1} = \rho_0\left(1 - \frac{\alpha}{T_0}h\right)^{\frac{\mu g}{\alpha R}-1} = 0{,}787\,\mathrm{kg/m^3}$$

Þar að auki sem að hitastigið fyrir utan belgin er $T(h) = T_0 - \alpha h = -33\,^\circ\mathrm{C} = 240\,\mathrm{K}$. En þar með höfum við að hitastig belgsins verður að vera að minnsta kosti:

$$T_b \geq \frac{\rho(h)T(h)}{\rho(h) - \frac{M_b}{V_b}} = 409\,\mathrm{K} = 136\,^\circ\mathrm{C}.$$