Landskeppni í eðlisfræði 2023

Úrslitakeppni

18. mars kl. 09:00-12:00

- Leyfileg hjálpargögn: Reiknivél sem geymir ekki texta.
- Keppnin samanstendur af 3 dæmum. Hvert af þessum þremur dæmum gildir 10 stig.
- Athugaðu hvort þú hafir fengið öll dæmin.
- Ekki er dregið niður fyrir röng svör.
- Liðunum í hverju dæmi er ekki endilega raðað eftir erfiðleikastigi.
- Það má alltaf leysa seinni liði þó fyrri liðir hafi ekki verið leystir.
- Skrifaðu lausnir þínar snyrtilega á lausnablöð sem þú færð afhent og merktu þau vel.
- Tekið verður tillit til útreikninga við yfirferð á dæmum.
- Góður frágangur hefur jákvæð áhrif!

Tafla yfir þekkta fasta

Nafn	Tákn	Gildi
Hraði ljóss í tómarúmi	c	$3{,}00 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}$
Þyngdarhröðun við yfirborð jarðarinnar	g	$9{,}82\,\mathrm{m/s^2}$
Massi rafeindar	m_e	$9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Massi róteindar	m_p	$1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Fasti Coulombs	k	$8{,}99 \cdot 10^{9}\,\mathrm{m^3\,kg/(C^2\,s^2)}$
Rafsvörunarstuðull tómarúms	ϵ_0	$8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C^2\,s^2/(m^3\,kg)}$
Frumhleðslan	e	$1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Þyngdarlögmálsfastinn	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg\,s^2)}$
Stefan-Boltzmann fastinn	σ	$5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W/(m^2\,K^2)}$
Fasti Plancks	h	$6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
Gasfastinn	R	$8{,}314\,\mathrm{J/(mól\,K)}$

1 Teygjustökk (10 stig)

Teygjustökkvari með massa $m = 72{,}0\,\mathrm{kg}$ lætur sig falla úr kyrrstöðu fram af brú í hæð $h = 85{,}0\,\mathrm{m}$ yfir fljóti. Óstrekkt lengd teygjunnar er $\ell_0 = 24{,}0\,\mathrm{m}$ og hún hegðar sér líkt og gormur með gormstuðul $k = 36{,}0\,\mathrm{N/m}$ þegar tognar á henni. Hunsið öll áhrif loftmótsstöðu.

- **(a)** **(0,5 stig)** Hver verður hraði teygjustökkvarans, v_1, rétt áður en að það byrjar að togna á teygjunni?
- **(b)** **(0,5 stig)** Hversu langur tími, t_1, líður frá því að stökkið hefst og þar til að teygjan byrjar að togna?
- **(c)** **(0,5 stig)** Í hvaða hæð, y_0, er teygjustökkvarinn þegar heildarkrafturinn sem að verkar á hann er núll?
- **(d)** **(1,5 stig)** Í hvaða hæð, y_{min}, staðnæmist teygjustökkvarinn áður en teygjan togar hann aftur upp?
- **(e)** **(1 stig)** Hver verður mesti hraði teygjustökkvarans, v_{max}, á leiðinni niður?
- **(f)** **(1 stig)** Hver verður mesta hröðun teygjustökkvarans, a_{max}, á leiðinni niður?
- **(g)** **(2 stig)** Hversu langur tími, τ, líður frá því að það byrjar að togna á teygjunni og þar til að teygjustökkvarinn er í lægstu stöðu?
- **(h)** **(1 stig)** Teiknið graf sem sýnir **hröðun** teygjustökkvarans sem fall af tíma frá því að hann stekkur og þar til að hann staðnæmist í lægstu stöðu.
- **(i)** **(1 stig)** Teiknið graf sem sýnir **hraða** teygjustökkvarans sem fall af tíma frá því að hann stekkur og þar til að hann staðnæmist í lægstu stöðu.
- **(j)** **(1 stig)** Teiknið graf sem sýnir **hæð** teygjustökkvarans sem fall af tíma frá því að hann stekkur og þar til að hann staðnæmist í lægstu stöðu.

Á gröfunum ykkar er ætlast til þess að þið merkið inn helstu stærðir sem koma fyrir í verkefninu.

Lausn:

(a) Við höfum þá að $mg\ell_0 = \frac{1}{2}mv_1^2 \implies v_1 = \sqrt{2g\ell_0} = 21{,}7\,\mathrm{m/s}$.

(b) Þá er $\ell_0 = \frac{1}{2}gt_1^2 \implies t_1 = \sqrt{\frac{2\ell_0}{g}} = 2{,}21\,\mathrm{s}$.

(c) Kraftajafnvægið er gefið með:

$$mg = kx_0 \implies x_0 = \frac{mg}{k} = 19{,}6\,\mathrm{m}.$$

En þá er $y_0 = h - \ell_0 - x_0 = 41{,}4\,\mathrm{m}$.

(d) Látum teygjuna strekkjast um $x_{\max}$ þá er $y_{\min} = h - \ell_0 - x_{\max}$ og við höfum að:

$$mg(\ell_0 + x_{\max}) = \frac{1}{2}kx_{\max}^2 \implies \frac{1}{2}kx_{\max}^2 - mgx_{\max} - mg\ell_0 = 0$$

sem er 2. stigs margliða fyrir $x_{\max}$ sem við getum leyst samkvæmt:

$$x_{\max} = \frac{mg \pm \sqrt{m^2g^2 + 2mgk\ell_0}}{k} = \frac{mg}{k}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2k\ell_0}{mg}}\right) = \begin{cases} 56{,}1\,\mathrm{m} \\ -16{,}8\,\mathrm{m}. \end{cases}$$

Veljum jákvæðu lausnina. Þar með er lægsta staðan: $y_{\min} = h - \ell_0 - x_{\max} = 4{,}9\,\mathrm{m}$.

(e) Mesti hraðinn er tekinn þegar að hröðunin verður núll svo það er einmitt í kraftajafnvægisstöðunni. Því er mesti hraðinn:

$$mg(h - y_0) = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 \implies v_{\max} = \sqrt{2g(h - y_0) - \frac{k}{m}x_0^2} = 25{,}8\,\mathrm{m/s}.$$

(f) Mesta hröðunin er tekin í neðsta punktinum þannig að við höfum að:

$$ma_{\max} = kx_{\max} - mg \implies a_{\max} = \frac{k}{m}x_{\max} - g = 18{,}2\,\mathrm{m/s^2}, \qquad \text{í stefnuna upp.}$$

(g) Um leið og teygjan byrjar að togna þá höfum við einfalda sveifluhreyfingu með sveiflutíðni

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 0{,}707\,\mathrm{rad/s}, \qquad \text{og sveiflutíma} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 8{,}89\,\mathrm{s}.$$

Hinsvegar, þá byrjar sveifluhreyfingin hvorki í útslagi né jafnvægisstöðu svo $\frac{T}{4} < \tau < \frac{T}{2}$. Lýsum sveifluhreyfingunni um jafnvægisstöðuna með $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ þá er $A = x_{\max} - x_0 = 36{,}5\,\mathrm{m}$ og við fáum að:

$$x(0) = A\sin(\varphi) = -x_0 \implies \varphi = \arcsin\left(-\frac{x_0}{A}\right) = -0{,}569\,\mathrm{rad}.$$

En þar með er tíminn gefinn með:

$$x(\tau) = A \implies \omega\tau + \varphi = \frac{\pi}{2} \implies \tau = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = 3{,}03\,\mathrm{s}.$$

Athugum einnig á þessum tímapunkti að tíminn sem líður þar til að teygjustökkvarinn er í kraftajafnvægisstöðu teygjunnar er gefinn með:

$$\omega t_0 + \varphi = 0 \implies t_0 = -\frac{\varphi}{\omega} = 0{,}805\,\mathrm{s}.$$

(h) Skoðum eftirfarandi gildistöflu:

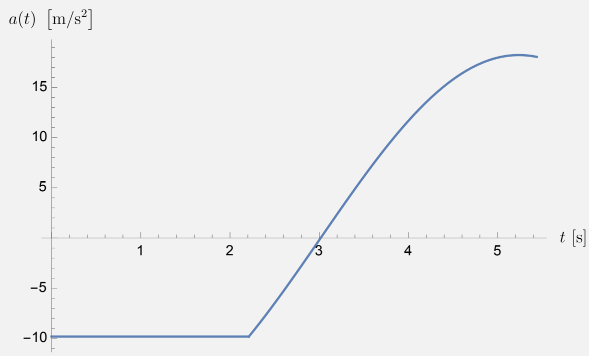
Tími	Hröðun	Hraði	Hæð	Lýsing
$t_1 = 2{,}21\,\mathrm{s}$	$a_1 = -9{,}82\,\mathrm{m/s^2}$	$v_1 = -21{,}7\,\mathrm{m/s}$	$y_1 = 61{,}0\,\mathrm{m}$	Teygja tognar
$t_2 = 3{,}02\,\mathrm{s}$	$a_2 = -0{,}00\,\mathrm{m/s^2}$	$v_2 = -25{,}8\,\mathrm{m/s}$	$y_2 = 41{,}4\,\mathrm{m}$	Kraftajafnvægi
$t_3 = 5{,}24\,\mathrm{s}$	$a_3 = +18{,}2\,\mathrm{m/s^2}$	$v_3 = -0{,}00\,\mathrm{m/s}$	$y_3 = 4{,}91\,\mathrm{m}$	Lægsta staða

Ferlunum er síðan lýst með:

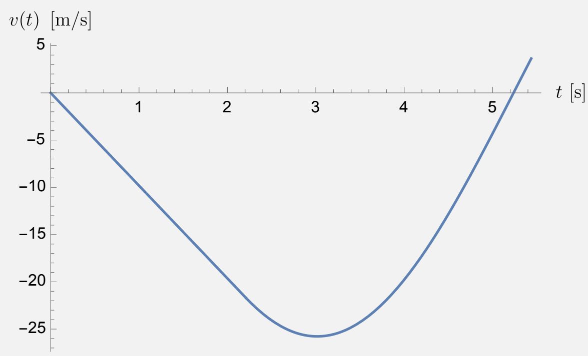
$$a(t) = \begin{cases} -g, & 0 \le t \le t_1 \\ \omega^2 A \sin(\omega(t - t_1) + \varphi), & t_1 \le t \le t_3, \end{cases} \quad v(t) = \begin{cases} -gt, & 0 \le t \le t_1 \\ -A\omega \cos(\omega(t - t_1) + \varphi), & t_1 \le t \le t_3, \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} h - \frac{1}{2} g t^2, & 0 \le t \le t_1 \\ y_0 - A \sin(\omega(t - t_1) + \varphi), & t_1 \le t \le t_3. \end{cases}$$

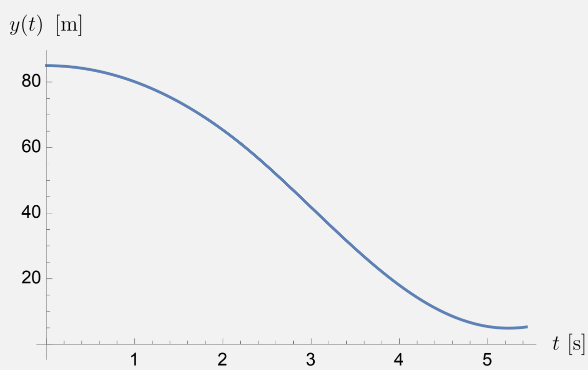
Gröfin verða því:



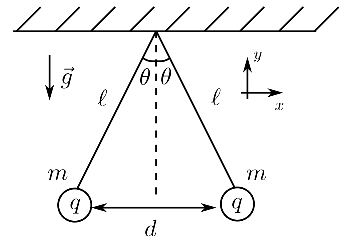
(i)



(j)



2 Tvö verkefni í rafsegulfræði (10 stig)



Hluti A: Tvær kúlur sem hanga í bandi (5 stig)

Lítum á uppstillinguna hér til hægri. Tvær kúlur með massa m og hleðslu $+q$ hafa verið hengdar í massalaust band af lengd ℓ. Í jafnvægisstöðu kerfisins eru kúlurnar í fjarlægð d frá hvor annarri og böndin mynda horn θ miðað við lóðrétt. Hunsið þyngdarlögmálskraftinn milli kúlnanna en takið tillit til þyngdarkrafts jarðar.

(a) **(1,5 stig)** Ákvarðið fjarlægðina, d, á milli hleðslanna sem fall af q, m, θ og þekktum föstum.

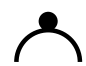
Það sem eftir er af dæminu látum við hleðslurnar tvær, $+q$, vera fastar í $(+\frac{d}{2},0)$ og $(-\frac{d}{2},0)$.

(b) **(2 stig)** Í hvaða punkti (x_e, y_e) væri hægt að koma fyrir rafeind með massa $m_e \ll m$ og hleðslu $-e \ll q$ þannig að rafeindin sé í kraftajafnvægi? Gerið þá nálgun að $x_e \ll \frac{d}{2}$ og $y_e \ll \frac{d}{2}$. Skilið svarinu ykkar sem fall af q, e, m_e, d og þekktum föstum.

(c) **(0,5 stig)** Tökum nú rafeindina í burtu. Í hvaða punkti (x_p, y_p) væri hægt að koma fyrir róteind með massa $m_p \ll m$ og hleðslu $+e \ll q$ þannig að róteindin sé í kraftajafnvægi?

Við segjum að jafnvægisstaða fyrir ögn sé *stöðug* ef að lítil frávik frá jafnvægisstöðunni valda því að ögnin færist aftur í átt að jafnvægisstöðunni. Við segjum að jafnvægisstaða sé *óstöðug* ef að lítil frávik frá jafnvægisstöðunni valda því að ögnin færist burt frá jafnvægisstöðunni. Í tvívíðum verkefnum (eins og þessu) getur ögnin verið í *nærstöðugu* jafnvægi en það þýðir að ögnin leitar einungis aftur í jafnvægisstöðuna fyrir lítil frávik í tilteknar stefnur en leitar burt frá jafnvægisstöðunni fyrir allar aðrar stefnur.

Stöðugt jafnvægi



Óstöðugt jafnvægi

(d) **(0,5 stig)** Er rafeindin í (x_e,y_e) í stöðugu, óstöðugu eða nærstöðugu jafnvægi? Ef hún er í nærstöðugu jafnvægi þá þurfið þið að taka fram í hvaða stefnur hreyfingin er stöðug.

(e) **(0,5 stig)** Er róteindin í (x_p,y_p) í stöðugu, óstöðugu eða nærstöðugu jafnvægi? Ef hún er í nærstöðugu jafnvægi þá þurfið þið að taka fram í hvaða stefnur hreyfingin er stöðug.

Hluti B: Olíudropatilraun Millikans og Fletchers (5 stig)

Olíudropi með geisla r og eðlismassa ρ ber neikvæða hleðslu $-q$. Olíudropanum hefur verið komið fyrir milli tveggja platna í plötuþétti með einsleitt rafsvið E_0 sem liggur í lóðrétta stefnu.

(f) **(0,6 stig)** Rafsviðið er stillt þannig að olíudropinn helst kyrr í lausu lofti. Eðlismassi loftsins er ρ_ℓ. Ákvarðið hleðslu olíudropans, $-q$, sem fall af $E_0, r, q, \rho, \rho_\ell$ og þekktum föstum.

Nú slökkvum við skyndilega á rafsviðinu þannig að olíudropinn byrjar að falla til jarðar. Þá verkar á hann loftmótsstöðukraftur sem er gefinn samkvæmt lögmáli Stokes með $F_S = 6\pi\eta r v$ þar sem að η er seigjustuðull lofts, r er geisli olíudropans og v er hraði dropans.

(g) **(0,7 stig)** Ákvarðið lokahraða olíudropans, v_∞, niður á við sem fall af η, r, ρ, ρ_ℓ og þekktum föstum.

(h) **(0,7 stig)** Hinsvegar, ef við í staðinn aukum styrk rafsviðsins þannig að $E > E_0$ þá mun olíudropinn ferðast upp á við. Hver verður lokahraði dropans, u_∞, upp á við?

Eftirfarandi mæligögn eru tekin beint úr verkbók Millikans. Olíudropa var komið fyrir í þétti með einsleitt, lóðrétt rafsvið, $E = 3{,}19 \cdot 10^5\,\mathrm{N/m}$, sem hægt var að kveikja og slökkva á. Eðlismassi olíu er $\rho = 919{,}9\,\mathrm{kg/m^3}$, eðlismassi lofts er $\rho_\ell = 1{,}2\,\mathrm{kg/m^3}$ og segjustuðull lofts er $\eta = 1{,}80 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg/(s \cdot m)}$. Millikan mældi tímann sem það tók olíudropann að ferðast lóðrétta vegalengd $h = 10{,}21\,\mathrm{mm}$ milli tveggja punkta á skjá.

(i) **(2 stig)** Þegar slökkt var á rafsviðinu tók það olíudropann $t_g = 13{,}6\,\mathrm{s}$ að ferðast á milli punktana. Þegar kveikt var á rafsviðinu tók það $t_E = 34{,}7\,\mathrm{s}$. Hver var hleðsla dropans?

(j) **(1 stig)** Í næstu mælingu tók Millikan hinsvegar eftir því að nú mældist $t_g = 13{,}6\,\mathrm{s}$ eins og áður en nú var hinvsegar $t_E = 84{,}5\,\mathrm{s}$. Hann ályktaði að það væri vegna þess að olíudropinn hefði í millitíðinni gleypt hlaðna jón í andrúmsloftinu. Hver var hleðsla jónarinnar sem olíudropinn gleypti?

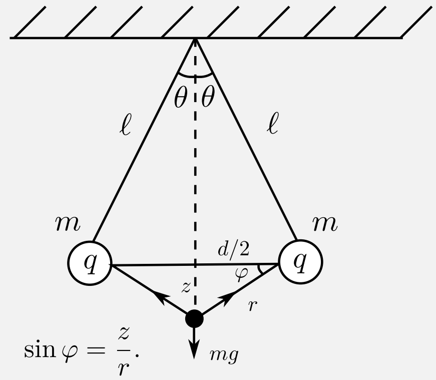
Lausn: Hluti A:

(a) Við skrifum niður kraftajöfnuna fyrir vinstri kúluna

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T\sin\theta - \frac{kq^2}{d^2} \\ T\cos\theta - mg \end{pmatrix}.$$

Með því að deila jöfnunum í hvor aðra sjáum við að:

$$\tan\theta = \frac{kq^2}{mgd^2} \implies d = \sqrt{\frac{kq^2}{mg\tan\theta}}.$$



(b) Rafeindin verður að vera með $x_e = 0$ og hún verður að vera með $y_e = -z < 0$. Kraftamyndin verður eins og á mynd hér til hægri. Kraftajafnvægið gefur því að:

$$\frac{2kqe}{r^2}\sin\varphi = m_e g, \qquad \text{þar sem} \qquad r = \sqrt{z^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}, \qquad \sin\varphi = \frac{z}{r}.$$

Þannig að við höfum að:

$$m_e g = \frac{2kqez}{\left(z^2 + (d/2)^2\right)^{3/2}} = \frac{16kqez}{d^3}\left(1 + \left(\frac{2z}{d}\right)^2\right)^{-3/2} \approx \frac{16kqez}{d^3}.$$

En þar með höfum við að:

$$z = \frac{m_e g d^3}{16kqe}, \qquad \text{þannig að} \qquad (x_e, y_e) = \left(0, -\frac{m_e g d^3}{16kqe}\right).$$

(c) Þá þarf róteindin enn að vera á línunni milli hleðslanna. Hinsvegar þarf hún núna að vera með $y_p = +z > 0$ og kraftamyndin verður eins og áður nema við fáum að:

$$(x_p, y_p) = \left(0, +\frac{m_p g d^3}{16kqe}\right).$$

(d) Rafeindin er í nærstöðugu jafnvægi þar sem að stöðugu tilfærslurnar eru í $\pm y$ stefnu.

Skoðum hvað gerist ef að rafeindinni er hnikað til í einhverja aðra stefnu heldur en y-stefnuna. Þá mun rafeindin vera örlítið nær annarri hleðslunni heldur en hinni og því mun hún finna fyrir láréttum heildarkrafti í stefnuna að þeirri hleðslu og þar með færast burt frá jafnvægisstöðunni.

Hinsvegar, ef henni er hnikað til í y-stefnu þá er hún enn í sömu fjarlægð frá báðum hleðslum. Fyrir tilfærslur í jákvæða y-stefnu minnkar hornið svo að heildarkrafturinn í lóðrétta stefnu minnkar en þá snýr rafeindin aftur í jafnvægisstöðuna. Fyrir tilfærslur í neikvæða y-stefnu þá stækkar hornið en þá stækkar lóðrétti þáttur rafkraftsins og dregur hana því aftur upp.

(e) Róteindin er í nærstöðugu jafnvægi þar sem að stöðugu tilfærslurnar eru í $\pm x$ stefnu.

Skoðum hvað gerist þegar að róteindinni er hnikað beint upp. Þá mun hornið stækka svo að lóðrétti þáttur rafkraftsins eykst en þá færist ögnin ofar. Hinsvegar þegar henni er hnikað beint niður þá mun hornið minnka svo að lóðrétti þáttur rafkraftsins minnkar og þar með fellur hún niður. Í báðum tilvikum færist hún því fjær jafnvægisstöðunni.

Hinsvegar ef að hún finnur fyrir færslu einungis í lárétta stefnu þá verður hún nær annarri hleðslunni heldur en hinni en það veldur því að sú hleðsla hrindir henni frá sér og aftur til baka í jafnvægisstöðuna. Allar aðrar stefnur hafa lóðréttan þátt sem færir hana úr jafnvægi.

Lausn: Hluti B:

(f) Þar sem að hleðslan er neikvæð þá er stefna rafsviðsins niður. Kraftajafnvægið gefur því að:

$$qE_0 = (\rho - \rho_\ell)\frac{4\pi}{3}r^3 g \implies q = \frac{4\pi(\rho - \rho_\ell)r^3 g}{3E_0}.$$

(g) Lokahraði dropans ákvarðast af því að þá er hröðunin núll í kraftajafnvæginu svo:

$$6\pi\eta r v_\infty = (\rho - \rho_\ell)\frac{4\pi}{3}r^3 g \implies v_\infty = \frac{2(\rho - \rho_\ell)r^2 g}{9\eta}.$$

(h) Þá færist dropinn upp svo að kraftajafnvægið gefur að:

$$qE = 6\pi\eta r u_\infty + (\rho - \rho_\ell)\frac{4\pi}{3}r^3 g \implies u_\infty = \frac{qE}{6\pi\eta r} - v_\infty.$$

(i) Með því að leysa fyrir q úr (h)-lið fæst:

$$q = \frac{6\pi\eta r}{E}(v_\infty + u_\infty)$$

Leysum fyrir r úr (g)-lið til þess að fá:

$$r = \sqrt{\frac{9\eta v_\infty}{2(\rho - \rho_\ell)g}}$$

Saman gefur þetta því:

$$q = \frac{9\pi\eta}{E}(v_\infty + u_\infty)\sqrt{\frac{2\eta v_\infty}{(\rho - \rho_\ell)g}}.$$

Ef við gerum ráð fyrir því að kennitíminn (sem fæst við að leysa diffurjöfnuna), $\tau = \frac{2\rho r^2}{9\pi\eta} \ll 1$, sem líður þar til að ögnin nær lokahraða sínum þá gildir að:

$$v_\infty = \frac{h}{t_g}, \qquad u_\infty = \frac{h}{t_E}$$

Þar með fáum við að fyrir gefnu stærðirnar í þessari mælingu:

$$q_1 = \frac{9\pi\eta h}{E}\left(\frac{1}{t_g} + \frac{1}{t_E}\right)\sqrt{\frac{2\eta h}{(\rho - \rho_\ell)g t_g}} = 2{,}89 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{C} = 18e.$$

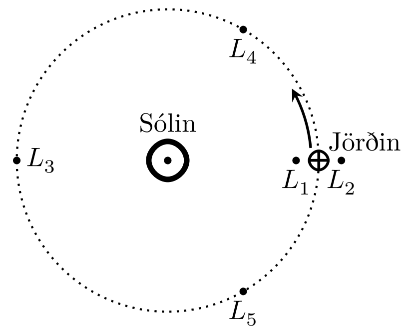
Munum síðan að hleðsla olíudropans var neikvæð svo $q_1 = -18e$.

(j) Af því að t_g helst óbreytt þá getum við ályktað að massi dropans breyttist ekki með marktækum hætti. Þá fæst eins og í liðnum á undan að hleðsla dropans sé gefin með:

$$q_2 = -\frac{9\pi\eta h}{E}\left(\frac{1}{t_g} + \frac{1}{t_E}\right)\sqrt{\frac{2\eta h}{(\rho - \rho_\ell)g t_g}} = -2{,}41 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{C} = -15e.$$

En þar með var jónin með jákvæða hleðslu $q_{\text{jón}} = \Delta q = +3e$.

3 James Webb geimsjónaukinn (10 stig)



Lagrange-punktar fyrir kerfi jarðarinnar ($M_{\text{jörð}} = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$) og sólarinnar ($M_{\text{sól}} = 1{,}98 \cdot 10^{30}\,\text{kg}$) eru fimm talsins ($L_1, L_2, L_3, L_4$ og L_5) og þá má sjá á mynd hér til hægri. Lagrange-punktar eru skilgreindir sem þeir punktar þar sem að lítill hlutur með massa m helst á braut um sólina þannig að innbyrðis afstaða hlutanna þriggja helst óbreytt. Í Lagrange-punktinum er því miðsóknarkrafturinn sem verkar á þriðja hlutinn jafn samanlögðum þyngdarlögmálskröftunum frá hinum hnöttunum tveimur. Gera má ráð fyrir að jörðin sé á hringlaga sporbraut um sólina með geisla $R = 1{,}50 \cdot 10^{11}\,\text{m}$.

(a) **(3 stig)** James Webb sjónaukanum ($m = 6200\,\text{kg}$) hefur verið komið fyrir í Lagrange-punktinum L_2. Látum $d \ll R$ tákna fjarlægð James Webb sjónaukans frá jörðu. Gefið tölulegt mat á fjarlægðinni d.

Ath: Við yfirferð verður gefið í samræmi við það hversu nálægt réttu gildi þið komist.

Það sem eftir er af dæminu megið þið gera ráð fyrir að sjónaukinn sé í fjarlægð R frá sólinni.

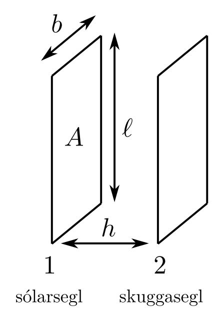
Samkvæmt Stefan-Boltzmann lögmálinu geisla allir hlutir frá sér varmageislun með afli, $P = \epsilon\sigma A T^4$, Þar sem að T er hitastig hlutarins, A er yfirborðsflatarmál hans, $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\text{W}/(\text{m}^2\,\text{K}^4)$ er fasti sem nefnist Stefan-Boltzmann fastinn og ϵ er eðlisgeislun/eðlisgleypni hlutarins sem segir til um hversu vel hluturinn geislar frá sér eða gleypir til sín varmageislun. Fyrir fullkominn svarthlut er $\epsilon = 1$.

(b) **(0,3 stig)** Líta má á sólina sem fullkominn svarthlut með yfirborðshitastig $T_{\text{sól}} = 5778\,\text{K}$ og með geisla $R_{\text{sól}} = 6{,}96 \cdot 10^8\,\text{m}$. Hvert er varmageislunarafl sólarinnar, $P_{\text{sól}}$?

(c) **(0,8 stig)** Yfirborðsflatarmál þess hluta James Webb sjónaukans sem snýr að sólinni er $A_{\text{JW}} = 300\,\text{m}^2$. Hvert er afl þess hluta sólarljóssins, P_0, sem fellur á sjónaukann?

(d) **(1 stig)** James Webb sjónaukinn er illa varinn gagnvart varmageislun frá sólinni. Ef ekkert er gert til þess að skýla honum frá geislum sólarinnar þá mun hann ná varmajafnvægi þegar að varmageislunin sem að hann gleypir frá sólinni er jöfn varmageisluninni sem James Webb sjónaukinn sendir frá sér sem fullkominn svarthlutur. Í þessum lið gerum við grófa nálgun og lítum á sjónaukann sem eina plötu með flatarmál $A_{\text{JW}} = 300\,\text{m}^2$ sem er svo þunn að hitastigið er það sama báðum megin á plötunni. Hvert verður lokahitastig sjónaukans ef ekkert er gert til þess að skýla honum frá geislum sólarinnar?

Til þess að lækka hitastig sjónaukans þá er James Webb sjónaukinn með fimm segl, hvert með flatarmál $A = \ell b$. Fjarlægðin á milli seglanna er h. Til einföldunar skoðum við uppstillingu með einungis tveimur seglum. Köllum seglið sem snýr að sólinni sólarsegl en hitt seglið skuggasegl. Yfirborð seglanna hafa verið húðuð með kísil þannig að eðlisgeislun yfirborðsins er ϵ. Þetta þýðir að líkurnar á því að yfirborð seglanna gleypi ljóseind eru ϵ en líkurnar á því að ljóseindin endurkastist eru $1 - \epsilon$. Sólarseglið er við hitastig T_1 og geislar frá sér með varmaafli P_1. Skuggaseglið er við hitastig T_2 og geislar frá sér með varmaafli P_2. Seglin eru í varmajafnvægi og senda frá sér geislun jafnt í allar áttir. Látum $\alpha + \beta + \gamma = 1$ vera skilgreind þannig að:



- Hlutfall geislunarinnar frá sólarseglinu sem skuggaseglið gleypir í sig er α.
- Hlutfall geislunarinnar sem fer frá sólarseglinu út í tómarúmið (líka á milli seglanna) er β.
- Hlutfall geislunarinnar sem sólarseglið gefur frá sér sem endurvarpast af skuggaseglinu og er aftur gleypt af sólarseglinu er γ. Þar sem að $\epsilon \ll 1$ gerum við þar að auki þá nálgun að $\gamma = \alpha$.

(e) **(0,7 stig)** Skrifið niður jöfnu fyrir varmajafnvægi sólarseglsins sem fall af $P_0, P_1, P_2, \alpha, \beta$ og γ.

(f) **(0,7 stig)** Skrifið niður jöfnu fyrir varmajafnvægi skuggaseglsins sem fall af $P_0, P_1, P_2, \alpha, \beta$ og γ.

(g) **(1,5 stig)** Metið α, β og γ sem fall af ℓ, b, h og ϵ.

(h) **(2 stig)** Hvert verður lokahitastig seglanna ef $\ell = 21{,}2\,\text{m}$, $b = 14{,}2\,\text{m}$, $h = 25\,\text{cm}$ og $\epsilon = 0{,}05$?

(Ef ykkur tókst ekki að ákvarða α, β og γ í (g)-lið megið þið nota að $\alpha = \gamma = 0{,}157$ og $\beta = 0{,}686$).

Lausn:

(a) Lausn 1: Látum m vera massa James Webb sjónaukans. Höfum þá:

$$\frac{GM_{\text{sól}}m}{(R+d)^2} + \frac{GM_{\text{jörð}}m}{d^2} = m\frac{v^2}{(R+d)} = m\omega^2(R+d)$$

Athugum að hornhraði jarðarinnar og JW sjónaukans er sá sami þannig að þyngdarlögmálið fyrir Jörðina gefur að:

$$\frac{GM_{\text{sól}}M_{\text{jörð}}}{R^2} = M_{\text{jörð}}\frac{v^2}{R} = M_{\text{jörð}}\omega^2 R \implies \omega^2 = \frac{GM_{\text{sól}}}{R^3}$$

En þar með höfum við sýnt að:

$$\frac{GM_{\text{sól}}}{(R+d)^2} + \frac{GM_{\text{jörð}}}{d^2} = \frac{GM_{\text{sól}}}{R^3}(R+d)$$

Sem er líka hægt að sýna með lögmáli Keplers. Við getum umritað þetta þannig að:

$$\frac{M_{\text{jörð}}}{d^2(R+d)} = \frac{M_{\text{sól}}}{R^3} - \frac{M_{\text{sól}}}{(R+d)^3},$$

en þá er

$$M_{\text{sól}}\left(\left(1+\frac{d}{R}\right)^3 - 1\right)\left(\frac{d}{R}\right)^2 = M_{\text{jörð}}\left(1+\frac{d}{R}\right)^2$$

sem rita má

$$M_{\text{sól}}\left(3\frac{d}{R} + 3\left(\frac{d}{R}\right)^2 + \left(\frac{d}{R}\right)^3\right)\left(\frac{d}{R}\right)^2 = M_{\text{jörð}}\left(1 + 2\frac{d}{R} + \left(\frac{d}{R}\right)^2\right)$$

Nálgum með því að halda stærstu liðunum hvoru megin ($d \ll R$). Þá fæst

$$3M_{\text{sól}}\left(\frac{d}{R}\right)^3 = M_{\text{jörð}}$$

Með því að leysa fyrir d fæst að

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_{\text{jörð}}}{3M_{\text{sól}}}} \cdot R = 1{,}50 \cdot 10^9\ \text{m}$$

(a) Lausn 2: Látum m vera massa James Webb sjónaukans. Höfum þá:

$$\frac{GM_{\text{sól}}m}{(R+d)^2} + \frac{GM_{\text{jörð}}m}{d^2} = m\frac{v^2}{(R+d)}$$

Athugum að þar sem að afstaða L_2 miðað við jörðina helst föst þá hefur JW sama hornhraða og jörðin þannig að:

$$v = \frac{2\pi(R+d)}{T_{\text{jörð}}}$$

þar sem að $T_{\text{jörð}} = 365$ dagar er umferðartími jarðarinnar um sólina. Ef við notum nálgunina $R + d \approx R$ þá fæst:

$$\frac{GM_{\text{sól}}}{R^2} + \frac{GM_{\text{jörð}}}{d^2} = \frac{4\pi^2}{T_{\text{jörð}}^2}R$$

Með því að leysa fyrir d fæst að:

$$d = \left(\frac{4\pi^2}{GM_{\text{jörð}}T_{\text{jörð}}^2}R - \frac{M_{\text{sól}}}{R^2 M_{\text{jörð}}}\right)^{-1/2} = 2{,}17 \cdot 10^9\ \text{m}.$$

(b) Höfum að:

$$P_{\text{sól}} = \sigma 4\pi R_{\text{sól}}^2 T_{\text{sól}}^4 = 3{,}85 \cdot 10^{26}\,\text{W}.$$

(c) Heildarafl sólarinnar dreifist þá yfir kúlu með geisla $R + d \approx R$ en einungis $A_{\text{JW}}/4\pi R^2$ af því er gleypt af sjónaukanum. Þar með höfum við að:

$$P_0 = P_{\text{sól}} \cdot \frac{A_{\text{JW}}}{4\pi R^2} = 4{,}08 \cdot 10^5\,\text{W}.$$

(d) Aðeins önnur hlið sjónaukans verður fyrir geisluninni en báðar hliðar eru við sama hitastig og geisla frá sér varmageislun samkvæmt Stefan-Boltzmann lögmálinu. Þar með höfum við að:

$$P_0 = \sigma(2A_{\text{JW}})T_0^4 \implies T_0 = \left(\frac{P_0}{2\sigma A_{\text{JW}}}\right)^{1/4} = 2^{-1/4}\left(\frac{R_{\text{sól}}}{R}\right)^{1/2} T_{\text{Sól}} = 331\,\text{K}.$$

(e) Þá höfum við að:

$$P_0 + \gamma P_1 + \alpha P_2 = P_1.$$

(f) Þá höfum við að:

$$\alpha P_1 + \gamma P_2 = P_2.$$

(g) Samkvæmt lýsingunni er $\alpha + \beta + \gamma = 1$ þar að auki sem $\gamma = \alpha$ svo $2\alpha + \beta = 1$. Við hugsum um kassann sem að seglin mynda sem hefur yfirborðsflatarmál $2A + 2\ell h + 2bh$. Ljósið mun skoppa á milli seglanna þar til að annað seglið gleypir ljósið eða það nær að sleppa út um bilið á milli seglanna út í tómarúmið. Öðrum meginn við seglin er hinsvegar einungis tómarúm svo þar mun hvorugt seglið endurgleypa geislunina. Við tökum síðan þar að auki tillit til þess að líkurnar á því að seglin gleypi ljósið eru ϵ en líkurnar á því að tómarúmið gleypi ljósið eru 1. Við metum:

$$\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2\ell h + 2bh}{2\epsilon\ell b + 2\ell h + 2bh}\right), \qquad \alpha = \gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon\ell b}{2\epsilon\ell b + 2\ell h + 2bh}\right).$$

(h) Fyrir tölulegu gildin fæst að $\beta = 0{,}685$ og $\alpha = \gamma = 0{,}157$. Við leysum síðan jöfnuhneppið fyrir P_1 og P_2. Athugum að jafnan úr (g)-lið gefur með því að nota að $\gamma = \alpha$ og því $2\alpha + \beta = 1$ að:

$$P_2(1-\gamma) = \alpha P_1 \implies P_2 = \frac{\alpha}{1-\alpha}P_1 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}P_1.$$

Þá gefur efri jafnan að:

$$P_0 + \alpha P_1 + \alpha\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)P_1 = P_1 \implies P_1\left(1 - \alpha - \frac{\alpha^2}{\alpha+\beta}\right) = P_0.$$

Þar með ályktum við að:

$$\epsilon\sigma(2A)T_0^4 = P_0 = \epsilon\sigma(2A)T_1^4\left(1 - \alpha - \frac{\alpha^2}{\alpha+\beta}\right) \implies T_1 = T_0\left(1 - \alpha - \frac{\alpha^2}{\alpha+\beta}\right)^{-1/4} = 349\,\text{K}.$$

þar sem að $T_0 = 331\,\text{K}$ er hitastigið úr (d)-lið. En við fáum að:

$$\epsilon(2A)\sigma T_2^4 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\epsilon(2A)\sigma T_1^4 \implies T_2 = T_1\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{1/4} = 229\,\text{K}.$$