# Landskeppni í eðlisfræði 2024

## Úrslitakeppni

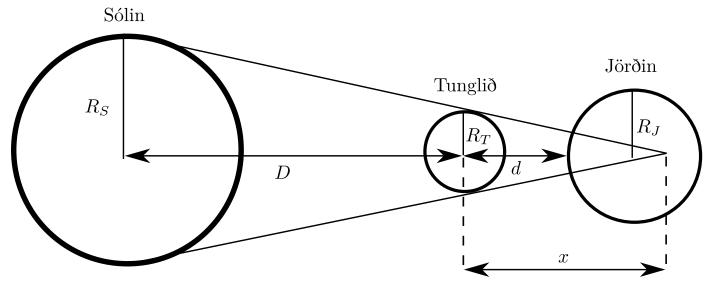
16. mars kl. 09:00-12:00

- **Leyfileg hjálpargögn:** Reiknivél sem geymir ekki texta.
- Keppnin samanstendur af 3 dæmum. Hvert af þessum þremur dæmum gildir 10 stig.
- Athugaðu hvort þú hafir fengið öll dæmin.
- Ekki er dregið niður fyrir röng svör.
- Liðunum í hverju dæmi er ekki endilega raðað eftir erfiðleikastigi.
- Það má alltaf leysa seinni liði þó fyrri liðir hafi ekki verið leystir.
- Skrifaðu lausnirnar þínar snyrtilega á lausnablöðin sem þú færð afhent og merktu þau vel.
- Tekið verður tillit til útreikninga við yfirferð á dæmum.

## Þekktir fastar

| **Nafn** | **Tákn** | **Gildi** |
|---|---|---|
| Hraði ljóss í tómarúmi | $c$ | $3{,}00 \cdot 10^{8}$ m/s |
| Segulsvörunarstuðull tómarúms | $\mu_0$ | $1{,}26 \cdot 10^{-6}$ N/A$^2$ |
| Rafsvörunarstuðull tómarúms | $\epsilon_0$ | $8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m |
| Coulombs fastinn | $k_{\mathrm{e}}$ | $8{,}99 \cdot 10^{9}$ N m$^2$/C$^2$ |
| Grunnhleðslan | $e$ | $1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C |
| Massi rafeindar | $m_{\mathrm{e}}$ | $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg |
| Massi róteindar | $m_{\mathrm{p}}$ | $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg |
| Avogadrosar talan | $N_{\mathrm{A}}$ | $6{,}02 \cdot 10^{23}$ 1/mól |
| Gasfastinn | $R$ | $8{,}31$ J/(K mól) |
| Stefan-Boltzmann fastinn | $\sigma$ | $5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W/(m$^2$K$^4$) |
| Þyngdarhröðun við yfirborð jarðar | $g$ | $9{,}82$ m/s$^2$ |
| Þyngdarlögmálsfastinn | $G$ | $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ m$^3$/(kg s$^2$) |
| Planck fastinn | $\hbar$ | $1{,}05 \cdot 10^{-34}$ J s |
| Boltzmann fastinn | $k_{\mathrm{B}}$ | $1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K |

## 1 Sólmyrkvi (10 stig)




Almyrkvar á sólu eru sjaldgæfir. Almyrkvi sást síðast á Íslandi árið 1954 og sést næst þann 12. ágúst 2026. Almyrkvi á sólu verður þegar skuggi tungls á sólu fellur á yfirborð jarðar.

Eftirfarandi tölulegu upplýsingar gætu komið að gagni

- Geisli sólar, tungls og jarðar: $R_S = 6{,}96 \cdot 10^8\,\text{m}$, $R_T = 1{,}74 \cdot 10^6\,\text{m}$, $R_J = 6{,}37 \cdot 10^6\,\text{m}$.

| | |
|---|---|
| Fjarlægð sólar til tungls í nándarstöðu | $D_{\text{min}} = 1{,}47 \cdot 10^{11}\,\text{m}$ |
| Fjarlægð sólar til tungls í firrðarstöðu | $D_{\text{max}} = 1{,}52 \cdot 10^{11}\,\text{m}$ |
| Fjarlægð tungls til yfirborðs jarðar í nándarstöðu | $d_{\text{min}} = 3{,}56 \cdot 10^8\,\text{m}$ |
| Fjarlægð tungls til yfirborðs jarðar í firrðarstöðu | $d_{\text{max}} = 3{,}99 \cdot 10^8\,\text{m}$ |

**(a)** **(1 stig)** Látum $x$ tákna mestu fjarlægðina frá tungli þar sem skuggi sólar lendir eins og sjá má á myndinni hér fyrir ofan. Ákvarðið fjarlægðina $x$ sem fall af gefnu stærðunum $R_S, R_T, R_J, D$ og $d$.

**(b)** **(0,5 stig)** Mesti almyrkvinn verður þegar sólin er í firrðarstöðu og tunglið er í nándarstöðu. Ákvarðið tölulegt gildi á fjarlægðinni $x_{\text{max}}$ í slíkum almyrkva.

**(c)** **(0,5 stig)** Til þess að almyrkvi á sólu geti orðið þá þarf $x \geq d$. Hinsvegar, þegar $x < d$, þá verður *hringmyrkvi* en þá nær tunglið ekki að skyggja á alla sólina. Sýnið að þegar sólin er í nándarstöðu og tunglið er í firrðarstöðu þá verði hringmyrkvi á sólu.

**(d)** **(1 stig)** *Sýndarstærð* er mælikvarði á það hversu stóran hluta fyrirbæri himinsins virðist þekja. Hægt er að meta sýndarstærð samkvæmt $\delta = \text{Þ}/L$ þar sem að Þ er þvermál og $L$ er fjarlægðin til fyrirbærisins. Hvert er minnsta hlutfallið af hringskífu sólar sem tunglið virðist þekja í hringmyrkva?

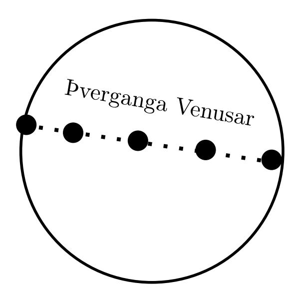
**(e)** **(2 stig)** Almyrkvar á sólu eru háðir núverandi afstöðu tunglsins miðað við jörðina. Tunglið fjarlægist okkur um 3,8 cm á ári. Gerum ráð fyrir að þessi hraði haldist fastur. Hvað eru mörg ár þar til að síðasti almyrkvinn verður sýnilegur á yfirborði jarðar? (til samanburðar er aldur jarðarinnar $4{,}5 \cdot 10^9$ ár).

**(f)** **(1 stig)** Látum $s$ tákna þvermál skuggans sem lendir á yfirborði jarðar. Metið tölulegt gildi á $s$ þegar sólin er í firrðarstöðu og tunglið er í nándarstöðu (í nútímanum). Þið megið gera þá nálgun að yfirborð jarðarinnar sem lendir undir skugga sé svo lítið að það sé nánast flatt.

**(g)** **(0,5 stig)** Það tekur tunglið 27,3 daga að ganga einn hring í kringum jörðina. Jörðin snýst einn hring um sjálfa sig á einum sólarhring. Ákvarðið tölulegt gildi á hornhraða tunglsins um jörðina, $\omega_T$. Ákvarðið einnig tölulegt gildi á hornhraða jarðarinnar um sjálfa sig, $\omega_J$.

**(h)** **(1 stig)** Tíminn sem sólmyrkvinn varir á tilteknum stað á jörðinni er einungis háður afstöðu tungls og jarðar en ekki hreyfingu jarðarinnar miðað við sólina. Tunglið og jörðin snúast bæði í austurátt. Metið tölulegt gildi á því hve lengi almyrkvi á sólu varir.

**(i)** **(2,5 stig)** Frá jörðu sjást stöku sinnum þvergöngur Venusar þegar hún gengur milli jarðar og sólar. Síðasta þverganga Venusar var árið 2012 og sú næsta verður árið 2117. Venus er í fjarlægð $\ell = 1{,}08 \cdot 10^{11}\,\text{m}$ frá sólu, geisli Venusar er $R_V = 6{,}05 \cdot 10^6\,\text{m}$ og umferðartími Venusar á sporbraut sinni um sólina er $T = 225$ dagar. Metið heildartímann sem að þverganga Venusar tekur.



**Lausn:**

**(a)** Athugum að rúmfræði uppstillingarinnar gefur að:

$$\frac{R_S}{D+x} = \frac{R_T}{x} \implies \frac{R_S}{R_T} = \frac{D}{x} + 1 \implies x = \frac{D}{\frac{R_S}{R_T} - 1} = \frac{DR_T}{R_S - R_T}.$$

**(b)** Stærsta gildið sem $x$ getur tekið er því þegar sólin er í firrðarstöðu þannig að $D = D_{\max}$. Þá fæst að

$$x_{\max} = \frac{D_{\max}}{\frac{R_S}{R_T} - 1} = 3{,}81 \cdot 10^8\,\mathrm{m}.$$

**(c)** Í firrðarstöðu sólar er $x_{\min} = 3{,}68 \cdot 10^8\,\mathrm{m} < d_{\max} = 3{,}99 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$ svo þetta er hringmyrkvi.

**(d)** Látum $\delta_S = 2R_S/(D+d)$ tákna sýndarstærð sólar og $\delta_T = 2R_T/d$ tákna sýndarstærð tunglsins. Þá fæst að hlutfallið er:

$$\eta = \frac{\pi\delta_T^2}{\pi\delta_S^2} = \left(\frac{R_T}{R_S}\right)^2 \left(\frac{D+d}{d}\right)^2 = 0{,}853 = 85{,}3\,\%.$$

Einnig er gefið rétt fyrir að reikna hlutfall geislanna þ.e. $\delta_T/\delta_S = 0{,}924 = 92{,}4\,\%$.

**(e)** Skoðum hvenær $x_{\max}(t) = d(t)$. Nú er $D_{\max}(t) = D_{\max} - vt$ og eins er $d_{\min}(t) = d_{\min} + vt$. En þetta gefur því með því að skoða einslaga þríhyrninga

$$\frac{R_S}{D(t) + x(t)} = \frac{R_T}{x(t)} \implies \frac{R_S}{D_{\max} + d_{\min}} = \frac{R_T}{d_{\min} + vt}$$

Með því að leysa fyrir $t$ fæst að heildartíminn er

$$t = \frac{1}{v}\left[\frac{R_T}{R_S}(D_{\max} + d_{\min}) - d_{\min}\right] = 6{,}55 \cdot 10^8\,\text{ár}.$$

**(f)** Þvermál skuggans ákvarðast einnig af einslaga þríhyrningum sem

$$\frac{R_T}{x} = \frac{s/2}{x-d} \implies s = 2\left(1 - \frac{d_{\min}}{x_{\max}}\right)R_T = 228\,\mathrm{km}.$$

**(g)** Þá er $\omega_T = \frac{2\pi}{T_T} = 2{,}66 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{rad/s}$ og $\omega_J = \frac{2\pi}{T_J} = 7{,}27 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{rad/s}$.

**(h)** Brautarhraðarnir eru $v_T = \omega_T(d_{\min} + R_J) = 965\,\mathrm{m/s}$ og $v_J = \omega_J R_J = 463\,\mathrm{m/s}$. En þar með höfum við að heildartíminn sem að almyrkvinn varir er:

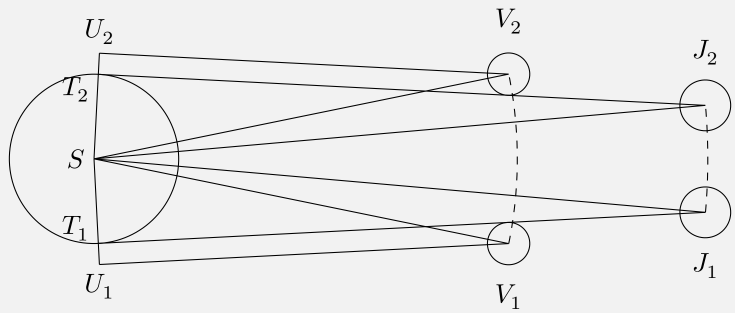
$$\tau_T = \frac{s}{v_T - v_J} = 454\,\mathrm{s} = 7 \text{ mínútur og } 34 \text{ sekúndur.}$$

**(i)** Sýndarstærð sólarinnar er $\delta_S = \frac{R_S}{D} = 4{,}6 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{rad}$ en þá er hlutfallið af sporbraut Venusar sem Venus þarf að ferðast gefin með $\frac{\delta}{2\pi}$ svo heildartíminn er því:

$$\tau_V = \frac{\delta}{2\pi}T_V = \frac{R_S}{2\pi D}T_V = 0{,}33\,\text{dagar} = 8{,}0\,\text{klst}.$$

Til samanburðar tók þverganga Venusar árið 2012 í heildina 6 klukkustundir og 40 mínútur.

**(i)** **(Önnur lausn)** Látum $d_V$ vera fjarlægð Venusar frá miðju sólar, $d_J$ vera fjarlægð jarðar frá miðju sólar og $\omega_V$ og $\omega_J$ vera hornhraða Venusar og jarðar, í þessari röð. Til þess að þvergangan sé sem lengst þá gengur Venus þvert yfir miðju sólar. Þverganga hefst þegar jaðar Vensuar snertir jaðar sólar og endar eins hinum megin. Rissum upp mynd:




Látum $S$ vera miðju sólar. Látum $V_1$ vera stöðu Venusar þegar þverganga hefst og $J_1$ stöðu jarðar. $T_1$ er snertipunktur sameiginlegs snerils sólar og Venusar frá jörðu séð. Látum $U_1$ vera punktinn í fjarlægð $r_V$ fyrir ofan $T_1$ frá $S$ séð. Þá eru $SJ_1T_1$ og $SV_1U_1$ rétthyrndir þríhyrningar með rétt horn í $T_1$ og $U_1$, í þessari röð. Látum $\phi = \measuredangle J_1ST_1$ og $\psi = \measuredangle V_1SU_1$. Látum svo $\alpha = \measuredangle J_1SV_1$. Ljóst er að $\alpha = \phi - \psi$. Af rétthyrndu þríhyrningunum fæst að

$$\cos(\phi) = \frac{R_s}{d_j} \qquad \text{og} \qquad \cos(\psi) = \frac{R_s + R_v}{d_v}$$

Þvergöngu lýkur þegar Venus er í stöðu $V_2$ og jörð í stöðu $J_2$. Ljóst er að $\measuredangle J_2SV_2 = \alpha$. Við sjáum að

$$\measuredangle J_1SJ_2 + 2\alpha = \measuredangle V_1SV_2.$$

Látum $t$ vera tímann sem þvergangan tekur. Þá er

$$\measuredangle J_1SJ_2 = \omega_J t \qquad \text{og} \qquad \measuredangle V_1SV_2 = \omega_V t.$$

Við fáum því að

$$t = \frac{2\alpha}{\omega_V - \omega_J}.$$

Nú þarf bara að reikna $\alpha$. Nú er $\frac{R_s}{d_j} \ll 1$ og $\frac{R_s+R_v}{d_v} \ll 1$ svo

$$\pi/2 - \phi \approx \sin(\pi/2 - \phi) = \cos(\phi) = \frac{R_s}{d_j}$$

og

$$\pi/2 - \psi \approx \sin(\pi/2 - \psi) = \cos(\psi) = \frac{R_s + R_v}{d_v}$$

Af þessu leiðir að

$$\alpha = \phi - \psi \approx \frac{R_s + R_v}{d_v} - \frac{R_s}{d_j} = 1{,}77 \cdot 10^{-3}\,\text{rad}.$$

Nú er $\omega_V = 3{,}23 \cdot 10^{-7}\,\text{rad/s}$ og $\omega_J = 1{,}99 \cdot 10^{-7}\,\text{rad/s}$. Því er

$$t = \frac{2\alpha}{\omega_V - \omega_J} \approx 2{,}85 \cdot 10^5\,\text{s} = 7\,\text{klst og}\ 54\,\text{mín}.$$

## 2 Manhattan Project: The Trinity Test (10 stig)

Þann 6. ágúst árið 1945 voru kjarnorkuvopn í fyrsta sinn notuð í hernarðskyni þegar að Bandaríkjamenn slepptu kjarnorkusprengjunni *Little Boy* á japönsku borgina Híróshíma. Boeing B-29 sprengjuflugvélin sem að sleppti þessari sprengju var nefnd *Enola Gay* í höfuðið á móður flugmannsins. Í þessu dæmi munum við fjalla um flugbragðið sem að flugmaðurinn þurfti að beita til þess að víkja sjálfum sér úr hættu frá höggbylgjunni í eftirkasti sprengingarinnar.

Gerum ráð fyrir að flugvélin haldi fastri hæð $h = 9{,}0\,\mathrm{km}$ ásamt því að ferðast með jöfnum hraða $v_0 = 150\,\mathrm{m/s}$. Þar að auki gerum við ráð fyrir að hunsa megi öll áhrif loftmótsstöðu.

## A: Flugvélin flýgur beint (1,5 stig)

Skoðum til að byrja með hvað gerist ef að flugvélin flýgur beint áfram án þess að beygja af brautinni. Við gerum ráð fyrir að sprengjan springi um leið og hún lendir á jörðinni.

(a) **(0,2 stig)** Hversu löngu, $t_0$, eftir að sprengjunni er sleppt springur sprengjan?

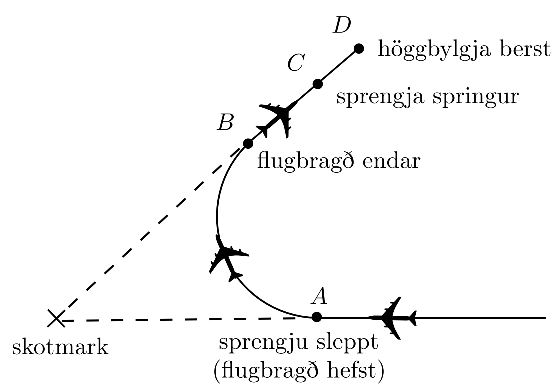
(b) **(0,2 stig)** Hversu langa vegalengd, $x$, nær flugvélin að fljúga frá því að sprengjunni er sleppt og þar til hún springur?

(c) **(0,1 stig)** Hversu langt frá upptökum sprengjunnar er flugvélin einmitt þegar að sprengjan springur?

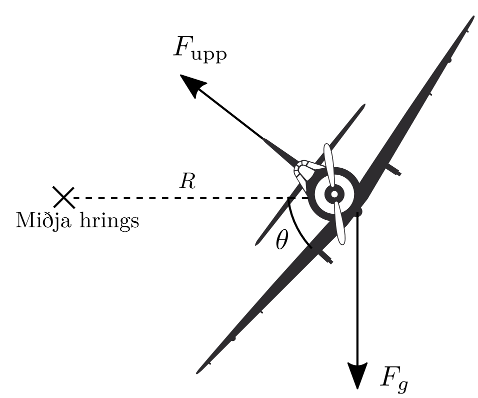
(d) **(1 stig)** Höggbylgjan frá sprengjunni ferðast í loftinu með hljóðhraða, $c = 340\,\mathrm{m/s}$. Ákvarðið í hvaða fjarlægð, $d$, flugvélin er frá upptökum sprengjunnar einmitt þegar að höggbylgjan skellur á flugvélinni.

## B: Flugvélin beygir af braut (5 stig)

Oppenheimer benti á að ef flugvélin flýgur beint þá er flugvélin of nálægt upptökunum þegar að höggbylgjan berst og því væri líklegasta niðurstaðan að flugvélin myndi farast. Hann lagði því til að flugmaðurinn myndi beita eftirfarandi flugbragði: Um leið og sprengjunni er sleppt þá beygjum við á hringferli þar til að flugvélin er aftur í beinni línu við skotmarkið.




(e) **(1 stig)** Geislinn í beygjunni takmarkast af því að flugmaðurinn þarf að halda meðvitund í flugbragðinu þ.a. mesta veltihorn flugvélarinnar miðað við lárétt er $\theta = \theta_{\max} = 60°$. Notið kraftajafnvægið í flugbragðinu á myndinni hér til hægri til þess að ákvarða geisla hringhreyfingarinnar, $R$. Ef ykkur tekst ekki að leysa þennan lið megið þið nota framvegis í þessu dæmi að $R = 1{,}5\,\mathrm{km}$.




(f) **(2 stig)** Notið rúmfræði uppstillingarinnar til þess að ákvarða heildarlengd hringbogans, $s$, milli $A$ og $B$ sem flugvélin ferðast í flugbragðinu. (*Ábending:* snertlarnir sem hafa snertipunkta $A$ og $B$ eru í sömu fjarlægð frá skotmarkinu). Ef ykkur tekst ekki að leysa þennan lið megið þið nota framvegis í þessu dæmi að $s = 3{,}5\,\mathrm{km}$.

(g) **(2 stig)** Ákvarðið í hvaða fjarlægð, $d$, flugvélin er frá upptökum sprengjunnar einmitt þegar að höggbylgjan skellur á flugvélinni. Höggbylgjan frá sprengjunni ferðast í loftinu með hljóðhraða, $c = 340\,\mathrm{m/s}$.

# C: Orkan í kjarnorkusprengjunni (3,5 stig)

Nokkrum vikum áður höfðu Bandaríkjamenn sprengt fyrstu kjarnorkusprengjuna í Los Alamos. Í þessum hluta metum við út heildarorkuna í sprengingunni og metum hversu langt frá sprengistaðnum flugvélin þurfti að vera til að sleppa heilu og höldnu.

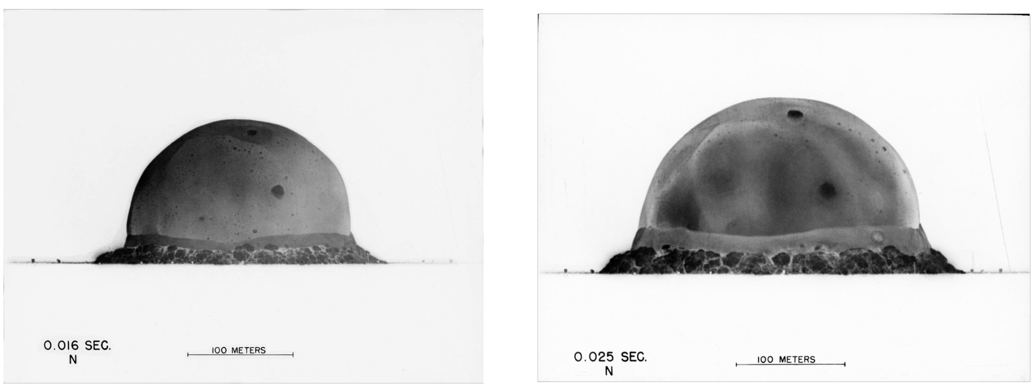
**(h)** **(1,5 stig)** Geisli sprengingarinnar sem fall af tíma er gefinn með

$$r(t) = E^a \rho^b t^c$$

þar sem að $E$ er heildarorka kjarnorkusprengingarinnar, $\rho$ er eðlismassi loftsins og $t$ er tíminn frá því að sprengjan sprakk. Ákvarðið veldin $a, b$ og $c$ með því að bera saman einingar á báðum hliðum jöfnunnar. Ef ykkur tekst ekki að leysa þennan lið megið þið nota framvegis í þessu dæmi að $(a,b,c) = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.

**(i)** **(1 stig)** Notið tölulegu gildin af Trinity ljósmyndunum hér fyrir neðan til þess að ákvarða heildarorkuna sem losnaði í sprengingunni. Eðlismassi lofts er $\rho = 1{,}29\,\mathrm{kg/m^3}$.

**(j)** **(1 stig)** Heildarorka sprengingarinnar skiptist þannig að $50\,\%$ af orkunni fer í höggbylgjuna, $35\,\%$ í varmaorku og $15\,\%$ í geislavirkni. Sú orka sem fer í höggbylgjuna breiðist út í andrúmsloftinu með hljóðhraða yfir hálfkúluhvel. Til að lifa af höggbylgjuna má orkuþéttleikinn á flatareiningu mest vera $\sigma_{\max} = 45\,\mathrm{kJ/m^2}$. Hve langt í burtu þarf Enola Gay að komast hið minnsta til sleppa heilu og höldnu?




Mynd 1: Ljósmyndir sem sýna stærð Trinity kjarnorkusprengingarinnar á fyrstu millisekúndunum.

**Lausn:**

**(a)** Sprengjan lendir á jörðinni eftir $t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 42{,}8\,\mathrm{s}$.

**(b)** Þá er $x = v_0 t_0 = 6{,}42\,\mathrm{km}$.

**(c)** Hún er þá í fjarlægð $h = 9{,}0\,\mathrm{km}$.

**(d)** Höggbylgjan nær flugvélinni þegar: $c^2\tau^2 = h^2 + v_0^2\tau^2 \implies \tau = \frac{h}{\sqrt{c^2 - v_0^2}} = 29{,}5\,\mathrm{s}$.

En þá er heildarfjarlægðin $d = \sqrt{h^2 + v_0^2\tau^2} = 10{,}0\,\mathrm{km}$.

**(e)** Af kraftamyndinni fæst að:

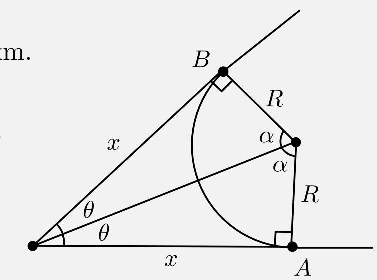
$$\begin{pmatrix} m\frac{v_0^2}{R} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{\text{upp}} \sin\theta \\ F_{\text{upp}} \cos\theta - mg \end{pmatrix}.$$

En þar með höfum við að $F_{\text{upp}} = \frac{mg}{\cos\theta}$ sem gefur því að:

$$R = \frac{mv_0^2}{F_{\text{upp}} \sin\theta} = \frac{v_0^2}{g\tan\theta} = 1{,}32\,\mathrm{km}.$$

**(f)** Rúmfræðilegu uppstillinguna má sjá á mynd hér til hægri. En þar með er lengd bogans gefin með:

$$s = 2\alpha R = 2R \arctan\left(\frac{x}{R}\right) = 3{,}62\,\mathrm{km}.$$




**(g)** Á augnablikinu sem að sprengjan springur þá er geislalæga fjarlægð flugvélarinnar frá upptökunum $z = x + y$ þar sem $y = x - s = 2{,}8\,\mathrm{km}$ þ.a. $z = 2x - s = 9{,}2\,\mathrm{km}$. En þá nær höggbylgjan flugvélinni þegar:

$$c^2\tau^2 = h^2 + (z + v_0\tau)^2 \implies \tau = \frac{zv_0 \pm \sqrt{z^2v_0^2 + (h^2 + z^2)(c^2 - v_0)^2}}{c^2 - v_0^2} = 59{,}6\,\mathrm{s}.$$

En þá er heildarfjarlægðin frá sprengjuupptökunum: $d = \sqrt{h^2 + (z + v_0\tau)^2} = 20{,}3\,\mathrm{km}$.

**(h)** Nú er $[r(t)] = \mathrm{m}$, $[E] = \mathrm{J} = \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}}$, $[\rho] = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}$ og $[t] = \mathrm{s}$. Fáum því:

$$\mathrm{m}^1 = \left(\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}}\right)^a \left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}\right)^b (\mathrm{s})^c = \mathrm{kg}^{a+b}\mathrm{m}^{2a-3b}\mathrm{s}^{c-2a}$$

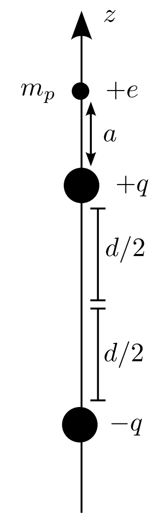
En það gefur því að $a = -b$ sem gefur að $-5b = 1$ svo $b = -\frac{1}{5}$ og $a = \frac{1}{5}$. Loks er $c = 2a = \frac{2}{5}$. Við ályktum því að $(a,b,c) = (\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$ og $r(t) = \left(\frac{Et^2}{\rho}\right)^{\frac{1}{5}}$.

**(i)** Af fyrri myndinni sést þá að $r = 120\,\mathrm{m}$ við $t = 16\,\mathrm{ms}$. Það gefur því að $E = \frac{r^5}{t^2} = 97{,}2\,\mathrm{TJ}$.

**(j)** Þá er

$$\frac{\frac{1}{2}E_0}{2\pi r^2} = \sigma_{\max} \implies r = \sqrt{\frac{E_0}{4\pi\sigma_{\max}}} = 13{,}1\,\mathrm{km}.$$

# 3 Tvípóll (10 stig)




Tvípóll samanstendur jákvæðri hleðslu $+q$ og neikvæðri hleðslu $-q$ í fjarlægð $d$ frá hver annarri. Í þessu dæmi skoðum við tvípól sem er staðsettur á $z$-ásnum þannig að jákvæða hleðslan er í punktinum $(0{,}0, +\frac{d}{2})$ en sú neikvæða er í punktinum $(0{,}0, -\frac{d}{2})$. Við lítum svo á að tvípóllinn sé festur niður þannig að hann hreyfist ekkert til í þessu dæmi. Hunsið alla aðra krafta en rafkraftinn.

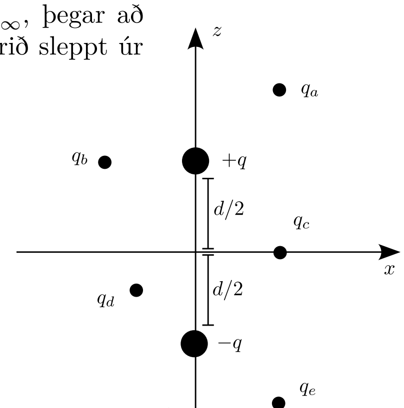
## A: Í einni vídd (2 stig)

Til að byrja með skulum við skoða einvíðan tvípól. Róteind með hleðslu $+e$ er komið fyrir í fjarlægð $a$ fyrir ofan jákvæða skaut tvípólsins.

**(a)** **(1 stig)** Hver er heildarkrafturinn sem að verkar á róteindina þegar hún er í fjarlægð $a$ frá jákvæða skauti tvípólsins?

**(b)** **(1 stig)** Notið orkuvarðveislu til þess að ákvarða hraða róteindarinnar, $v_\infty$, þegar að hún hefur ferðast óendanlega langt í burtu frá tvískautinu eftir að hafa verið sleppt úr kyrrstöðu í fjarlægð $a$ frá jákvæða skauti tvípólsins.

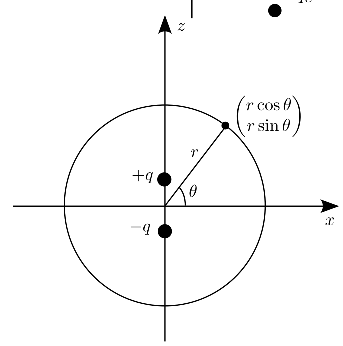
## B: Í tveimur víddum (2 stig)




**(c)** **(1,5 stig)** Á myndinni hér til hægri hefur fimm jákvæðum punkthleðslum $q_{abcde}$ verið komið fyrir í rafsviði tvípólsins. Gerum ráð fyrir að þær séu svo litlar að þær finna einungis fyrir rafsviði tvípólsins en ekki hver annarri. Rissið skýringarmynd sem sýnir stefnu heildarkraftsins sem að verkar á hverja hleðslu um sig.

**(d)** **(0,5 stig)** Almennt í pólhnitum $\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ er rafsviðið og rafmættið frá tvípólnum fyrir $r \gg d$ gefið með:

$$\vec{E}_{\text{tvípóll}} = \frac{kqd}{r^3}\begin{pmatrix} 3\cos\theta\sin\theta \\ \frac{1}{2}(3\cos(2\theta)-1) \end{pmatrix}, \qquad V_{\text{tvípóll}} = \frac{kqd\sin\theta}{r^2}.$$




Ákvarðið alla þá punkta sem eru þannig að rafsviðið liggur lárétt í $x$-stefnu.

## C: Í þrívídd (6 stig)

Í liðnum á undan ákvörðuðum við alla þá punkta í sléttunni þar sem að rafsviðið liggur lárétt. Sú röksemdafærsla mun enn gilda í þremur víddum. Í þessum tilteknu punktum er möguleiki á því að koma róteind með massa $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg og hleðslu $+e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C á hringhreyfingu með föstum hraða.

Í þessum hluta verkefnisins skoðum við tiltekna uppstillingu þar sem að tvípóllinn samanstendur af af tveimur hleðslum $\pm q = 5{,}0\,\text{nC}$ í fjarlægð $d = 1{,}0\,\text{nm}$. Róteindinni er komið fyrir í fjarlægð $r = 1{,}0\,\mu\text{m}$ frá miðju tvípólsins þannig að hún ferðist á hringhreyfingu með jöfnum hraða $v_0$.

**(e)** **(1 stig)** Lýsið hringhreyfingunni. Hver verður miðja hennar og hver verður geisli hennar, $R$?

**(f)** **(2 stig)** Hver þarf hraði róteindarinnar, $v_0$, að vera í hringhreyfingunni?

**(g)** **(1 stig)** Hver er heildarorka róteindarinnar í hringhreyfingunni?

**(h)** **(2 stig)** Þriðja lögmál Keplers fyrir plánetur segir að $\frac{a^3}{T^2} = \textit{fasti}$ þar sem að $a$ er geisli hringhreyfingarinnar og $T$ er lotutími hennar. Sýnið að fyrir hringhreyfingu róteindarinnar í rafsviði tvípólsins gildir hinsvegar í staðinn að $\frac{a^2}{T} = \textit{fasti}$ og ákvarðið fastann.

**Lausn:**

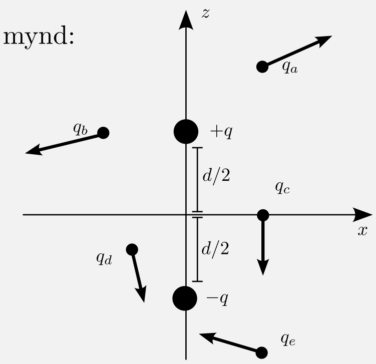
**(a)** Heildarkrafturinn er þá:

$$F_{\text{heild}} = \frac{kqe}{a^2} - \frac{kqe}{(a+d)^2}.$$

**(b)** Með orkuvarðveislu fæst því að:

$$\frac{kqe}{a} - \frac{kqe}{a+d} = \frac{1}{2}m_p v_\infty^2 \implies v_\infty = \sqrt{\frac{2kqe}{m_p}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+d}\right)}.$$

**(c)** Stefnur kraftanna má sjá á mynd:




**(d)** Þá þarf $z$-hnitið að vera núll þannig að:

$$3\cos(2\theta) - 1 = 0 \implies \theta = \frac{1}{2}\left(\pm\arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 2\pi n\right) = \begin{cases} \pm 35{,}3° \\ \pm 144{,}7° \end{cases}.$$

Þannig að allir punktar sem hafa þetta horngildi hafa lárétt rafsvið óháð $r$.

**(e)** Til þess að róteindin geti verið á hringhreyfingu um $z$-ásinn þarf $z < 0$ (sbr. $q_a$ og $q_e$ í **(c)**-lið). Því eru einu mögulegu hornin $\theta = -35{,}3°$ og $\theta = -144{,}7°$. Geisli hringhreyfingarinnar verður $R = r\cos\theta = 0{,}82\,\mu\text{m}$ og miðja hringhreyfingarinnar verður í $(0, r\sin\theta) = (0, -0{,}58\,\mu\text{m})$.

**(f)** Kraftajafnan verður þá:

$$m_p\frac{v_0^2}{R} = \frac{kqed}{r^3}3\cos\theta\sin\theta \implies v_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}kqedR}{m_p r^3}} = 2{,}2\cdot 10^6\,\text{m/s} = 0{,}0074c.$$

**(g)** Þetta er smá lúmskt bara útaf formerkjunum á hornunum. Keppendum verður því gefinn smá slaki hér. Heildarorka róteindarinnar í hringhreyfingunni verður:

$$E = \frac{1}{2}m_p v_0^2 + \frac{kqed}{r^2}\sin\theta = \frac{kqed}{r^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta + \sin\theta\right) = 0\,\text{J}.$$

**(h)** Við athugum þá að:

$$\left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2 = v_0^2 = \frac{\sqrt{2}kqedR}{m_p r^3} = \frac{\sqrt{2}kqed}{m_p\cos^3(\theta)R^2}$$

Athugum síðan að $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$ þ.a. $\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. En því fæst:

$$\frac{R^4}{T^2} = \frac{3\sqrt{3}kqed}{8\pi^2 m_p}, \qquad \text{þ.a.} \qquad \frac{a^2}{T} = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}kqed}{8\pi^2 m_p}} = 0{,}53\,\text{m}^2/\text{s}.$$