

Landskeppni í eðlisfræði 2026

Úrslitakeppni (LAUSNIR)

21. mars kl. 09:00-12:00

- **Leyfileg hjálpargögn:** Reiknivél sem geymir ekki texta.
- Keppnin samanstendur af 3 dæmum. Hvert af þessum þremur dæmum gildir 10 stig.
- Athugaðu hvort þú hafir fengið öll dæmin.
- Liðunum í hverju dæmi er ekki endilega raðað eftir erfiðleikastigi.
- Það má alltaf leysa seinni liði þó fyrri liðir hafi ekki verið leystir.
- Skrifðu lausnirnar þínar snyrtilega á lausnablöðin sem þú færð afhent og merktu þau vel.
- Tekið verður tillit til útreikninga við yfirferð á dæmum.

Þekktir fastar

Nafn	Tákn	Gildi
Hraði ljóss í tómarúmi	c	$3,00 \cdot 10^8$ m/s
Segulsvörunarstuðull tómarúms	μ_0	$1,26 \cdot 10^{-6}$ N/A ²
Rafsvörunarstuðull tómarúms	ϵ_0	$8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m
Coulombs fastinn	k_e	$8,99 \cdot 10^9$ N m ² /C ²
Grunnhleðslan	e	$1,60 \cdot 10^{-19}$ C
Massi rafeindar	m_e	$9,11 \cdot 10^{-31}$ kg
Massi róteindar	m_p	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg
Avogadrosar talan	N_A	$6,02 \cdot 10^{23}$ 1/mól
Gasfastinn	R	8,31 J/(K mól)
Stefan-Boltzmann fastinn	σ	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W/(m ² K ⁴)
Þyngdarhröðun við yfirborð jarðar	g	9,82 m/s ²
Þyngdarlögmálsfastinn	G	$6,67 \cdot 10^{-11}$ m ³ /(kg s ²)
Planck fastinn	h	$1,05 \cdot 10^{-34}$ J s
Boltzmann fastinn	k_B	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K

1 Að vakna á annarri plánetu

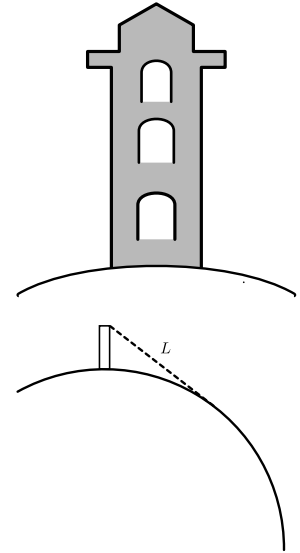
Þú vaknar á framandi plánetu án nokkurra upplýsinga um hvernig þú komst þangað. Markmið þitt er að ákvarða helstu eiginleika plánetunnar.

A Að komast að því hvað hún er stór (3 stig)

- (a) (1 stig) Þú byggir háan turn með heildarhæð $H = 2000$ m og sleppir þungum steinum niður úr mismunandi hæð h . Steinunum er alltaf sleppt úr kyrrstöðu og loftmótstaða er hunsuð. Falltíminn t er mældur. Notaðu mæligögnin í töflunni til að meta þyngdarhröðunina g á plánetunni.

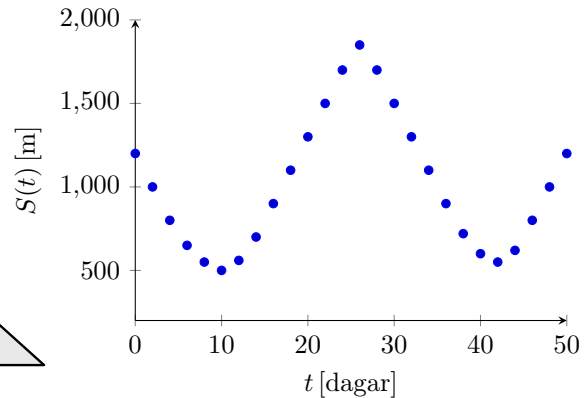
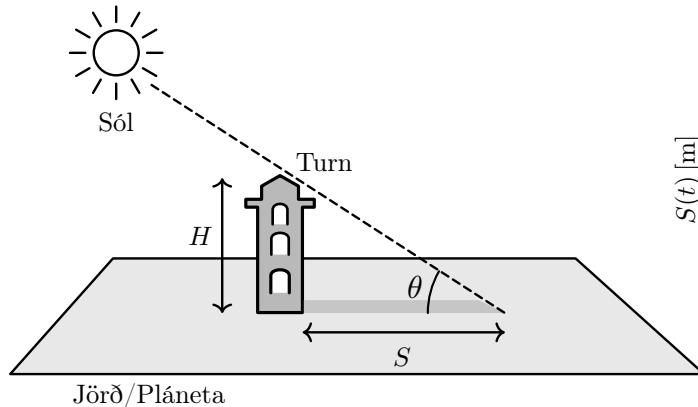
h [m]	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
t [s]	1,7	2,2	2,8	3,2	3,5	3,9	4,1	4,6	4,8	5,1

- (b) (2 stig) Eftir mjög langa gönguferð hverfur turninn undir sjóndeildarhringinn. Þá er vegalengdin í beinni sjónlínu að turninum mæld og fæst $L = 230$ km. Gerðu ráð fyrir kúlulaga plánetu og að turninn sé lítill miðað við geisla plánetunnar. Ákvarðaðu (i) geisla plánetunnar, R (ii) massa plánetunnar, M .



B Að átta sig á því að hún snýst samt (5 stig)

Á hverjum degi er skuggalengd turnsins $S(t)$ mæld við hádegis, þegar sólin er hæst á himninum, og sett fram sem fall af tíma t í dögum. Nota má jafndægur til að ákvarða breiddargráðu staðarins (en þó ekki hvort staðsetningin sé á norður- eða suðurhveli). Einungis tvisvar á ári, á vorjafndægri og haustjafndægri, gildir að breiddargráðan er $\phi = 90 - \theta_{\text{jafndægur}}$. Á öðrum dögum hefur möndulhalli plánetunnar áhrif á mælinguna. Við sumarsólstöður og vetrarsólstöður er hins vegar hægt að meta möndulhallann, þar sem hann leggst við eða dregst frá breiddargráðunni í hádegishæð sólar.



- (c) (2 stig) Ákvarðaðu (i) breiddargráðu turnsins (ii) lengd ársins í dögum (iii) möndulhalla plánetunnar.
- (d) (3 stig) Þegar að breiddargráða turnsins er þekkt má ákvarða snúningshraða plánetunnar. Til þess er bolti sleppt úr toppi turnsins úr hæð $H = 2000$ m. Vegna snúnings plánetunnar sveigir braut boltans lítillga til hliðar og lendir hann í láréttri fjarlægð $d = 5,0$ m frá botni turnsins. Gert er ráð fyrir að boltinn falli lóðrétt niður með upphafshraða núll og að loftmótstaða sé hverfandi. Ákvarðaðu lengd sólarhringsins, T , á plánetunni.

C Að sleppa burt (2 stig)

- (e) (2 stig) Nú er turninum breytt í geimfar með því að festa tvo eins eldflaugarhreyfla sitthvorum megin. Heildarmassi turns og hreyfla er 560 tonn. Hver er minnsti upphafshraði sem geimfarið þarf að hafa miðað við yfirborð plánetunnar á þessum stað til að sleppa frá henni?

1 Að vakna á annari plánetu (LAUSN)

- (a) Hægt er að meta þyngdarhröðunina með jöfnunni $h = \frac{1}{2}gt^2$ sem gefur að $g = \frac{2h}{t^2}$. Með því að reikna stökin í töflunni fæst

g [m/s ²]	13,8	16,5	15,3	15,6	16,3	15,8	16,7	15,1	15,6	15,4
-------------------------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Meðaltalið er þá $\bar{g} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_i = 15,6 \text{ m/s}^2$ og dreifnin er $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (g_i - \bar{g})^2} = 0,82 \text{ m/s}^2$.

Við ályktum því að þyngdarhröðunin er á þessari plánetu

$$g = 15,6 \pm 0,8 \text{ m/s}^2.$$

- (b) Við fáum þá rétthyrndan þríhyrning og samkvæmt reglu Pýþagórasar fæst því

$$(R + H)^2 = R^2 + L^2 \implies R = \frac{L^2 - H^2}{2H} = 13\,200 \text{ km}.$$

Massi plánetunnar er þá fundinn með

$$g = \frac{GM}{R^2} \implies M = \frac{gR^2}{G} = 4,1 \pm 0,2 \cdot 10^{25} \text{ kg}.$$

- (c) Nú ákvarðast hornið $\theta = \arctan\left(\frac{H}{S}\right)$. Af grafinu sést að skuggalengdin er minnst við sumarsólstöður og mest við vetrarsólstöður. Tíminn milli tveggja sumarsólstaða gefur því lengd ársins sem er um það bil $T = 42 - 10 = 32$ dagar. Miðja sveiflunnar samsvarar vor- og haustjafndægum, þar sem $S(t) \approx 1200 \text{ m}$. Við sólstöður er hádegishæð sólar hins vegar $90^\circ - \phi + \delta$, svo möndulhallinn fæst sem frávikíð frá jafndægurhorninu.

$$\phi = 90^\circ - \arctan\left(\frac{H}{S}\right) = 31,0^\circ \quad \delta = \phi - 90^\circ + \arctan\left(\frac{H}{S}\right) = 12,5^\circ.$$

- (d) Hornhröðun plánetunnar ákvarðast af lengd sólarhringsins sem $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Boltinn hefur tímaháðan hraða í lárétta stefnu vegna snúnings plánetunnar sem er gefinn með $v_x(t) = \omega(R+h(t)) \cos \phi$ þar sem $h(t) = H - \frac{1}{2}gt^2$ en plánetan snýst hinsvegar í lárétta stefnu með hraða $\omega R \cos \phi$ fyrir neðan hann svo að heildarmunurinn er $\Delta v_x(t) = \omega(H - \frac{1}{2}gt^2) \cos \phi$ en boltinn lendir síðan eftir $\tau = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ svo við ályktum að

$$\Delta x(\tau) = \int_0^\tau \Delta v_x(t) dt = \omega H \cos \phi \tau - \frac{1}{6} \omega g \cos \phi \tau^3.$$

Leysum síðan fyrir $T = \frac{2\pi}{\omega}$ og fáum að

$$T = \frac{2\pi \cos \phi H \tau}{\Delta x} \left(1 - \frac{g\tau^2}{6H}\right) = 36\,800 \text{ s} - 12\,300 \text{ s} = 24\,500 \text{ s}.$$

- (e) Lausnarhraðinn er þá fundinn með

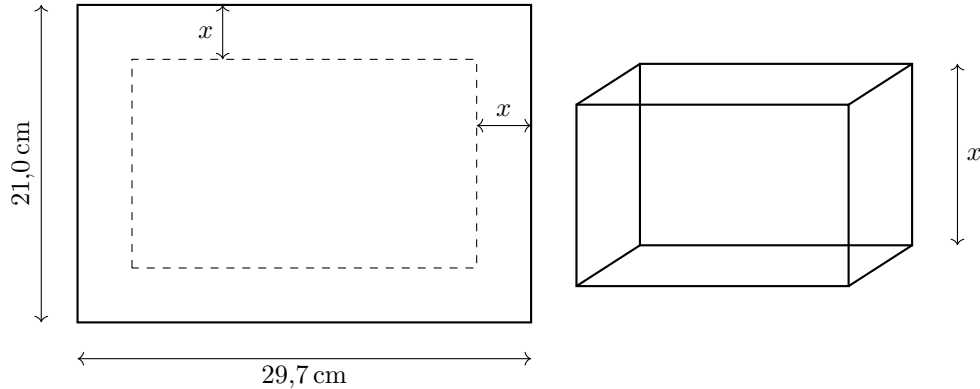
$$\frac{1}{2}mv_{\text{esc}}^2 - \frac{GMm}{R} = 0 \implies v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR} = 20,3 \text{ km/s}$$

En vegna snúnings plánetunnar þá er hægt að spara örlítið því $v_{\text{esc}} = v_0 + \omega R \cos \phi$ svo við ályktum að $v_0 = v_{\text{esc}} - \omega R \cos \phi = 17,4 \text{ km/s}$.

2 Pappírsbátur

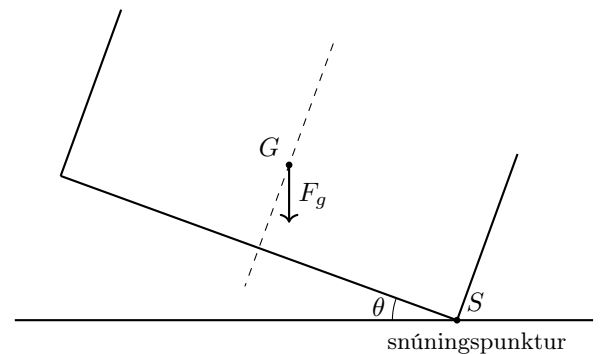
A Burðarþol pappírsbáts (3 stig)

Við skoðum þykkt A4 blað með breidd 21,0 cm, lengd 29,7 cm og þykkt 2,0 mm. Eðlismassi pappírs er $\rho_{\text{pappír}} = 800 \text{ kg/m}^3$ og eðlismassi sjávar er $\rho_{\text{sjór}} = 1025 \text{ kg/m}^3$. Blaðið er brotið í opinn pappírsbát með því að skilgreina jaðarbreiddina x , sem ákvarðar hæð bátsins og flatarmál botnsins. Burðarþol bátsins er skilgreint sem mesta heildarþyngd (bátur ásamt farni) sem báturinn getur borið án þess að sökkva. Veljið og rökstyðjið gildi á x með það sem markmið að hámarka burðarþol bátsins; stigagjöf miðast bæði við skýra framsetningu og hversu nálægt hámarksgildinu niðurstaðan er. Hversu margir krónuþeningar komast fyrir í bátinum áður en hann sekkur? Krónuþeningur hefur þvermál 21,5 mm, þykkt 1,7 mm og massa 4,0 g.



B Veltihorn pappírsbáts á landi (2 stig)

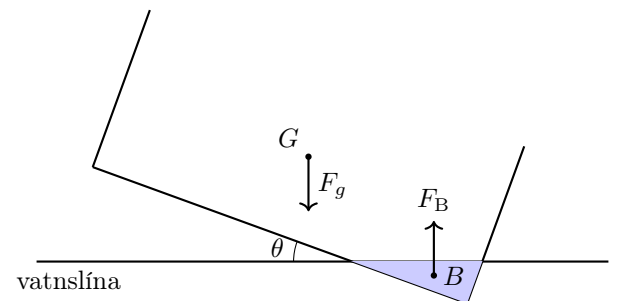
Við skoðum nú stöðugleika bátsins. Til þess að siglingar séu öruggar þarf að tryggja að báturinn sé stöðugur. Stöðugleika hans er lýst með svokölluðu veltihorni, sem segir til um stærsta horn sem bátinum má halla þannig að hann leiti aftur í jafnvægisstöðu í stað þess að hvolfa. Fyrir bát á landi gildir einfalt skilyrði: við mörk veltu liggur massamiðja bátsins lóðrétt yfir snúningspunktinum. Ákvarðið fyrir pappírsbátinn úr lið A stærsta veltihorn hans á landi θ_{land} .



C Veltihorn pappírsbáts í sjó (5 stig)

Það kann að virðast mótsagnakennt en bátur í sjó er stöðugri en bátur á landi. Það er vegna þess að uppdrifskrafturinn F_B hjálpar til við að rétta bátinn af. Í sjó verkar uppdrifskrafturinn F_B í flotmiðju bátsins B , sem er massamiðja þess vatnsmagns sem báturinn ryður frá sér, og þyngdarkrafturinn F_g verkar í massamiðju bátsins G . Báturinn er við það að velta þegar kraftlínur þessara tveggja krafta liggja lóðrétt yfir hvor annarri.

Notið þetta skilyrði til að ákvarða veltihornið í sjó, $\theta_{\text{sjór}}$, fyrir bátinn úr lið A. Athugið þó að vatn getur byrjað að flæða inn í bátinn áður en því horni er náð. Ákvarðið einnig það horn $\theta_{\text{flæði}}$ þegar fyrsti punktur brúnar bátsins snertir yfirborð sjávar og berið saman hornin $\theta_{\text{sjór}}$ og $\theta_{\text{flæði}}$ til að ákvarða mesta halla sem báturinn þolir.



1 Pappírsbátur (LAUSN)

(a) Við athugum að rúmmál pappírskátsins er þá gefið með

$$V(x) = (\ell - 2x)(b - 2x)x = 4x^3 - 2(\ell + b)x^2 + blx$$

Afleiðan er þá

$$V'(x) = 12x^2 - 4(\ell + b)x + bl.$$

Ef við krefjumst þess að við höfum útgildi í $V'(x_0) = 0$ þá er

$$x_0 = \frac{1}{24} \left(16(\ell + b) \pm \sqrt{4(\ell + b)^2 - 48b\ell} \right) = \begin{cases} 12,9 \text{ cm} \\ 4,04 \text{ cm} . \end{cases}$$

Tökum eftir að $x = 12,9 \text{ cm}$ er of stórt því þá er $2x > b$ sem gengur ekki. Fyrir $x = 4,04 \text{ cm}$ fæst að rúmmál bátsins verður

$$V_{\max} = V(x_0) = 1129 \text{ cm}^3 = 1,129 \text{ L}$$

svo að báturinn getur borið 1129 g áður en hann sekkur. Báturinn sjálfur er

$$m_{\text{bátur}} = \rho_{\text{pappír}} \ell b \flat = 100 \text{ g}$$

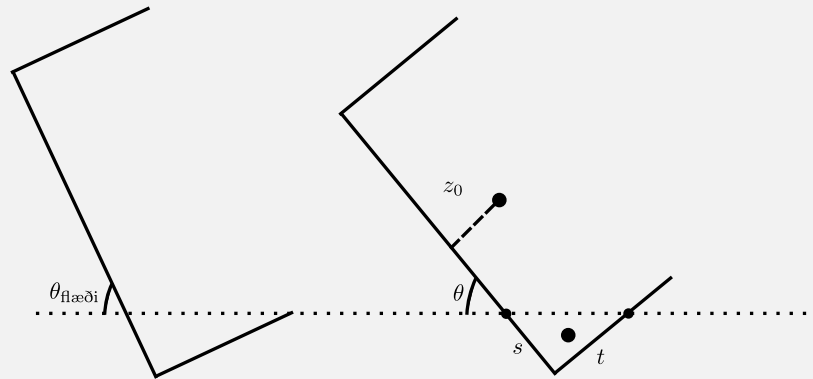
og því kæmstu $N = \frac{1029}{4} = 257$ peningar í bátinn áður en hann myndi sökkva.

(b) Hæð massamiðju bátsins er þá fundin með

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{0 \cdot \rho_{\text{pappír}}(\ell - 2x_0)(b - 2x_0)\flat + 2 \cdot \frac{x_0}{2} \rho_{\text{pappír}}(\ell - 2x_0)x_0\flat + 2 \cdot \frac{x_0}{2} \rho_{\text{pappír}}(b - 2x_0)x_0\flat}{\rho_{\text{pappír}} \ell b \flat} \\ &= \frac{x_0^2}{\ell b} (\ell + b - 4x_0) = 0,90 \text{ cm} . \end{aligned}$$

Rúmfræðilega skilyrðið fyrir veltihorni bátsins verður $\theta_{\text{land}} = 90^\circ - \arctan\left(\frac{2z_0}{b - 2x_0}\right) = 82^\circ$.

- (c) Við sáum í fyrri lið að þyngd bátsins var 100 g án farms svo að rúmmál vatnsins sem hann ryður frá sér er 100 cm^3 . Þverskurðarflatarmál vatnsins er þá með flatarmál $A = V/(\ell - 2x_0) = 4,6 \text{ cm}^2$



Skilyrðið er þá að

$$-\frac{1}{2}(b - 2x_0) \cos \theta + z_0 \sin \theta = -\frac{s}{3} \cos \theta + \frac{t}{3} \sin \theta$$

þar sem við notuðum að þríhyrningur með hornpunkta (x_1, y_1) , (x_2, y_2) og (x_3, y_3) hefur massamiðju í $(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$. Nú vitum við að $A = \frac{1}{2}st$ og $t = s \tan \theta$ þ.a. $t^2 = 2A \tan \theta$ og $s^2 = \frac{2A}{\tan \theta}$ svo að við getum útilokað tvær af þessum þremur óþekktu stærðum og deilum með $\cos \theta$ í alla jöfnuna og fáum

$$-\frac{1}{2}(b - 2x_0) + z_0 \tan \theta = -\frac{\sqrt{2A}}{3} \frac{1}{\sqrt{\tan \theta}} + \frac{\sqrt{2A}}{3} \tan \theta \sqrt{\tan \theta},$$

En þetta er fjórða stigs margliða í $\xi = \sqrt{\tan \theta}$. Þessi jafna hefur enga lausn en það er vegna þess að báturinn mun haldast stöðugur samkvæmt þessu líkani fyrir hvaða gildi á θ sem er. En þar með höfum við sýnt að $\theta_{sjór} > \theta_{land}$. Hitt hornið, $\theta_{flæði}$ ákvarðast síðan af $A = \frac{1}{2}sx_0$ og $\tan \theta = x_0/s$ svo

$$\theta = \arctan \left(\frac{x_0^2}{2A} \right) = 60^\circ.$$

svo það flæðir fyrst inn í bátinn.

3 Segulleiðrétting fyrir Bohr-líkanið og Titius-Bode lögmálið

Takið eftir að dæmið samanstendur af tveimur óháðum en tengdum liðum. Því er hægt að glíma við B-hluta án þess að hafa leyst A-hlutann.

A Sígilda Bohr-líkanið og segulleiðréttingarliður (7 stig)

Í Bohr-líkaninu er litið á vetnisatómið sem svo að rafeindin ferðist á hringhreyfingu umhverfis róteindina, en að hverfiþungi hennar sé skammtaður þannig að á n -tu braut gildir að $L_n = m_e v_n r_n = n\hbar$, þar sem $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Js er fasti sem nefnist fasti Plancks, m_e er massi rafeindar, v_n er brautarhraði rafeindarinnar og r_n er brautargeislinn á n -tu braut.

- (a) **(1 stig)** Skrifðu niður kraftajöfnu fyrir rafeindina á hringhreyfingu umhverfis róteindina. Sýnið að brautargeislir rafeindarinnar eru gefnir með $r_n = a_B n^2$ og ákvarðið tölulegt gildi á fastanum, a_B . Fastinn a_B nefnist Bohr-geislinn og er brautargeisli grunnástandsins í vetnisatóminu.
- (b) **(0,8 stig)** Sýnið að brautarhraðarnir eru gefnir með $v_n = \frac{\alpha c}{n}$ þar sem c er hraði ljóss og α er fingerðarfastinn, sem er skilgreindur sem það hlutfall af ljóshraða sem rafeindin hefur í grunnástandi vetnisatómsins, þ.e. $v_1 = \alpha c$. Ákvarðið tölulegt gildi á fingerðarfastanum, α .
- (c) **(0,2 stig)** Fingerðarfastinn er oft skrifaður á forminu $\alpha = \frac{1}{N}$ þar sem N er heiltala. Finnið gildið á N .
- (d) **(0,5 stig)** Sýnið að heildarorku rafeindarinnar á n -ta brautargeisla er gefin með $E_n = \frac{E_1}{n^2}$ þar sem E_1 er brautarorkan á fyrstu brautinni. Ákvarðið tölulegt gildi á E_1 í einingunni eV en $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.
- (e) **(0,5 stig)** Eina leiðin fyrir rafeind til þess að stökkva á milli orkuhvela er með því að gleypa eða geisla frá sér ljóseind. Við það að stökkva niður úr brautargeisla r_n niður í brautargeisla r_m geislar vetnisatómið frá sér ljóseind með tíðni $2\pi\hbar f = \Delta E$. Sýnið að bylgjulengd ljóseindarinnar, λ , uppfyllir

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n > m \geq 1.$$

þar sem að R er fasti sem nefnist fasti Rydbergs. Ákvarðið tölulegt gildi á fasta Rydbergs.

- (f) **(1,5 stig)** Litróf vetnis samanstendur af þeim bylgjulengdum ljóss sem geta losnað samkvæmt Rydberg-lögmálinu. Ákvarðið þær litrófslínur vetnis sem liggja í sýnilega sjónsviði mannsins (400 nm til 700 nm).
- (g) **(2,5 stig)** Við skoðum nú sígilda segulleiðréttingu við Bohr-líkanið. Litið er á braut rafeindarinnar sem straumhring með straum $I = \frac{e}{T}$, þar sem T er umferðartími. Segulsvið straumhringsins leiðir til segulkrafts til viðbótar við Coulombs kraftinn. Sýnið að segulleiðréttingin á kraftajafnvægið er hlutfallslega af stærðargráðu α^2 . Notið þetta til að ákvarða fyrsta stigs hliðrun á Bohr-geislanum, \tilde{a}_B .

B Titius-Bode lögmálið (3 stig)

Undir lok 18. aldar settu Titius og Bode fram reynslulögmál um að meðalfjarlægðir plánetanna frá sólu fylgdu sambærilegu skömmtunarmynstri fyrir brautargeisla plánetanna frá sólu. Í þessu verkefni er notuð einfölduð útgáfa þar sem fyrir $n \geq 2$ gildir

$$r_n = r_1 + b c^n, \quad n \geq 2.$$

þar sem r_1 er fjarlægð Merkúrs (fyrir $n = 1$). Ákvarðið stuðlana b og c sem best út frá gögnunum í töflu.

Pláneta	Merkúr	Venus	Jörðin	Mars	Seres	Júpíter	Satúrnus
Fjarlægð [AU]	0,387	0,720	1,000	1,520	2,600	5,187	9,527

Tafla 1: Meðalfjarlægðir frá sólu. Hér er notað að $1 \text{ AU} = 150$ milljón km.

3 Segulleiðrétting fyrir Bohr-líkanið og Titius-Bode lögmálið (LAUSN)

(a) Höfum þá að hverfiþunginn er skammtaður samkvæmt $m_e v_n r_n = n\hbar$ en þar af leiðandi er

$$m_e \frac{v_n^2}{r_n} = m_e \frac{\left(\frac{n\hbar}{m_e r_n}\right)^2}{r_n} = \frac{ke^2}{r_n^2} \implies r_n = \frac{\hbar^2 n^2}{m_e k e^2} = a_B n^2$$

En þar með ályktum við að Bohr fastinn er $a_B = \frac{\hbar^2}{m_e k e^2} = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m}$.

(b) Þá fæst að

$$v_n = \frac{n\hbar}{m_e r_n} = \frac{\hbar}{m_e a_B n}$$

svo við ályktum að fingerðarfastinn er gefinn með

$$\alpha = \frac{\hbar}{m_e a_B c} = 0,00731$$

(c) Þá er $N = \frac{1}{\alpha} = 137$, þ.a. $\alpha \approx \frac{1}{137}$.

(d) Þá er

$$E_n = \frac{1}{2} m_e v_n^2 - \frac{ke^2}{r_n} = \frac{E_1}{n^2}, \quad E_1 = -2,19 \cdot 10^{-18} \text{ J} = -13,7 \text{ eV}$$

(e) Sjáum þá strax að $2\pi \frac{hc}{\lambda} \Delta E = \left(\frac{E_1}{n^2} - \frac{E_1}{m^2}\right) \implies R = -\frac{E_1}{2\pi hc} = 1,11 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$.

(f) Þær litrófslínur vetnis sem að liggja í sýnilega sjónsviði mannsins eru þá gefnar með

$$\lambda_{3 \rightarrow 2} = 652 \text{ nm}, \quad \lambda_{4 \rightarrow 2} = 482 \text{ nm}, \quad \lambda_{5 \rightarrow 2} = 430 \text{ nm}, \quad \lambda_{6 \rightarrow 2} = 407 \text{ nm}.$$

(g) Ef við lítum á þetta sem hringlaga gjörð þá er segulsviðið í miðju gjarðarinnar gefið með $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R}$ inn í blaðið þar sem $I = \frac{\Delta q}{\Delta \tau} = \frac{ev}{2\pi r}$. En þá öfugt er það sem að rafeindin finnur fyrir og við ályktum að krafturinn verður $F_B = q\vec{v} \times \vec{B} = \frac{\mu_0 e^2 v^2}{4\pi r^2}$ og því kraftajafnan

$$m_e \frac{v^2}{r} = \frac{ke^2}{r^2} + \frac{\mu_0 e^2 v^2}{4\pi r^2} = \frac{ke^2}{r^2} \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)$$

þar sem að við notuðum $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$ og að $k = \frac{1}{4\pi \epsilon_0}$. En við vitum samkvæmt því að hverfiþunginn er skammtaður að $v = \frac{n\hbar}{m_e r}$ svo við fáum að

$$\frac{n^2 \hbar^2}{m_e r^3} = \frac{ke^2}{r^2} + \frac{ke^2 \hbar^2 n^2}{m_e^2 c^2} \frac{1}{r^4}$$

En þetta er 2. stigs margliða fyrir r og með því að margfalda með r^4 sést að

$$r^2 - a_B n^2 r + \alpha^2 a_B^2 = 0$$

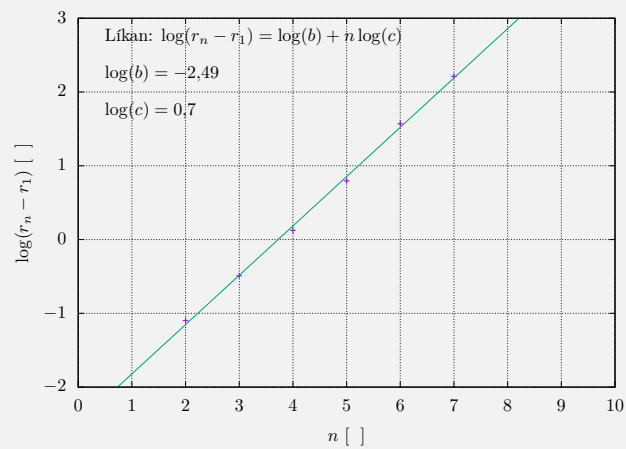
Sem gefur því að lokum

$$r_n = \frac{a_B n^2}{2} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4\alpha^2}{n^4}} \right] \approx a_B n^2 - \frac{\alpha^2}{n^2} a_B.$$

(h) Loks athugum við að við viljum gera graf af

$$\log(r_n - r_1) = \log(b) + n \log(c)$$

Þannig graf af $\log(r_n - r_1)$ sem fall af n gefur hallatölu $\log(c)$ og skurðpunkt $\log(b)$. Grafið er



En þar af leiðandi ályktum við að $c = e^{0.67} = 1.95$ og $b = e^{-2.5} = 0.082$.