

Heimadæmi í Rafsegulfræði vorið 2024

Matthias Harsen

Raunvísindastofnun Háskóla Íslands

Dunhaga 3, 107 Reykjavík, Iceland

E-mail: mbh6@hi.is

ABSTRACT: Drög að lausnum á heimadæmum í námskeiðinu Rafsegulfræði 1 vorið 2024.

Efnisyfirlit

1	Heimadæmi 12. janúar	2
2	Heimadæmi 18. janúar	5
3	Heimadæmi 25. janúar	8
4	Heimadæmi 1. febrúar	13
5	Heimadæmi 8. febrúar	15
6	Heimadæmi 16. febrúar	16
7	Heimadæmi 22. febrúar	18
8	Heimadæmi 29. febrúar	20
9	Heimadæmi 7. mars	22
10	Heimadæmi 14. mars	25
11	Heimadæmi 21. mars	29
12	Heimadæmi 4. apríl	32
13	Heimadæmi 11. apríl	34

1 Heimadæmi 12. janúar

Dæmi 1. Tveir óendanlega langir vírar hafa fastan línuhleðslubéttleika λ . Annar vírin liggur eftir x -ásnum í þrívíðu rúmi og hinn eftir y -ásnum.

- (a) Finnið rafsviðið sem fall af staðsetningu í xy -plani. Skrifðu svarið í kartesarhnitum.
- (b) Finnið rafsviðið sem fall af staðsetningu á z -ásnum.
- (c) Finnið rafsviðið í almennum punkti (x, y, z) í kartesarhnitum.

Lausn: (a) Þar sem að vírarnir eru óendanlega langir þá hafa þeir einungis geislalægt rafsvið. Rafsviðin frá vírunum leggjast saman svo okkur nægir að skoða verkefnið fyrir hvorn um sig og leggja það síðan saman. Rafsviðið frá óendanlega löngum vír í geislalægri fjarlægð r frá vírnum er gefið samkvæmt lögmáli Gauss með:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{inni}}}{\epsilon_0} \implies E(r) \cdot 2\pi r \ell = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0} \implies E(r) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}. \quad (1.1)$$

En þar með ályktum við að heildarrafsviðið í punkti $(x, y, 0)$ er gefið með:

$$\vec{E}_{(x,y,0)} = \vec{E}_{x\text{-vír}} + \vec{E}_{y\text{-vír}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 y} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \begin{pmatrix} 1/x \\ 1/y \\ 0 \end{pmatrix}}. \quad (1.2)$$

(b) Fyrir punkt á z -ásnum, þ.e. $(0, 0, z)$ þá eru báðir vírarnir í fjarlægð z frá vírnum þannig að þeir veita báðir sama framlag:

$$\vec{E}_{(0,0,z)} = \vec{E}_{x\text{-vír}} + \vec{E}_{y\text{-vír}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 z} \end{pmatrix} = \boxed{\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2/z \end{pmatrix}}. \quad (1.3)$$

(c) Skoðum fyrst rafsviðið frá vírnum sem liggur eftir x -ásnum. Þá er punkturinn (x, y, z) í fjarlægð $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ frá vírnum og liggur í geislalæga stefnu svo rafsviðið er gefið með:

$$\vec{E}_{x\text{-vír}} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \begin{pmatrix} 0 \\ y/r \\ z/r \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{y}{y^2+z^2} \\ \frac{z}{y^2+z^2} \end{pmatrix}, \quad \text{og því} \quad \vec{E}_{y\text{-vír}} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+z^2} \\ 0 \\ \frac{z}{x^2+z^2} \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Heildarrafsviðið í punkti (x, y, z) er því gefið með summunni af þessum tveimur framlögum

$$\vec{E}_{(x,y,z)} = \vec{E}_{x\text{-vír}} + \vec{E}_{y\text{-vír}} = \boxed{\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+z^2} \\ \frac{y}{y^2+z^2} \\ \frac{z}{x^2+z^2} + \frac{z}{y^2+z^2} \end{pmatrix}}. \quad (1.5)$$

Sem passar einmitt við hin tvö svörin í (a) þegar $z = 0$ og í (b)-lið þegar $x = y = 0$.

Útúrdúr: Það er líka hægt að gera þetta með því að heilda yfir hvorn vör um sig. En þá mæli ég með því að gera þetta til dæmis í Mathematica. Fyrir vörinn sem liggur meðfram x -ás fengist þá að í punkti (a, b, c) væri:

$$\vec{E}_{x\text{-vör}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0} \left((a-x)^2 + b^2 + c^2 \right)^{-3/2} \begin{pmatrix} a-x \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(b^2 + c^2)} \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

sem passar einmitt við niðurstöðuna okkar úr (c) -lið.

Dæmi 2. Kúla með geisla R og miðju í upphafspunktinum hefur heildarrafhleðslu Q og hleðsluþéttleika $\rho(\vec{r}) = cr^2$ þar sem $r = |\vec{r}|$ og stöðlunarfastinn c ákvarðast af

$$Q = \int_{r \leq R} \rho(\vec{r}) d^3r. \quad (1.7)$$

- (a) Finnið stærð og stefnu rafsviðsins $\vec{E}$ sem fall af $\vec{r}$.
- (b) Reiknið rafmættið sem fall af $\vec{r}$ ef gert er ráð fyrir að $V(\vec{r}) \rightarrow 0$ þegar $r \rightarrow \infty$.
- (c) Reiknið stöðuorku hleðsludreifingarinnar.

Lausn: (a) Skiptum kúlunni niður í litlar kúluskeljar og byrjum á því að reikna:

$$Q = \int_{r \leq R} \rho(\vec{r}) d^3r = \int_0^R dr 4\pi r^2 cr^2 = \frac{4\pi c}{5} R^5 \implies \boxed{c = \frac{5Q}{4\pi R^5}}. \quad (1.8)$$

Vegna samhverfu mun rafsviðið vera geislalægt þannig að í kúlunhitum er $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$ og okkur nægir því að ákvarða styrk rafsviðsins í geislalæga stefnu. Skiptum því í tvö tilvik. Annars vegar fyrir (i) $r \geq R$ og hinsvegar fyrir (ii) $0 \leq r \leq R$. Fyrir $r \geq R$ mun heildarhleðslan inni í Gauss-fletinum vera Q svo þá fæst sama niðurstaða og fyrir punkthleðslu:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \text{fyrir } r \geq R. \quad (1.9)$$

Hinsvegar fyrir $0 \leq r \leq R$ þá er hleðslan inni í Gauss-fletinum gefin með:

$$Q_{\text{inni}}(r) = \int_0^r dr 4\pi r^2 cr^2 = \frac{4\pi c}{5} r^5 = Q \left(\frac{r}{R} \right)^5. \quad (1.10)$$

En þar með gefur lögmál Gauss að:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{inni}}(r)}{\epsilon_0} \implies E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\frac{r}{R} \right)^5, \quad \text{fyrir } 0 \leq r \leq R. \quad (1.11)$$

Við ályktum því að rafsviðið er gefið með:

$$\boxed{E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\frac{r}{R} \right)^5 & \text{ef } 0 \leq r \leq R, \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{ef } r \geq R. \end{cases}} \quad (1.12)$$

(b) Til þess að ákvarða rafmættið, $V(r)$, þá er einfaldast að nýta sér að $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ en vegna kúlusamhverfu þá er

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\left(\partial_r V \hat{r} + \frac{1}{r} \partial_\theta V \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi V \hat{\varphi}\right). \quad (1.13)$$

En þar sem að $\vec{E}$ er geislalægt þá er $\partial_\theta V = \partial_\varphi V = 0$. Með öðrum orðum, vegna kúlusamhverfu nægir okkur að leysa fyrsta stigs diffurjöfnuna

$$E(r) = -\partial_r V(r) \implies V(r) = -\int E(r) dr. \quad (1.14)$$

Fyrir $r \geq R$ gefur þetta eins og fyrir punkthleðslu að:

$$V(r) = -\int E(r) dr = -\int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \alpha, \quad (1.15)$$

þar sem að α er heildunarfasti sem að ákvarðast af skilyrðinu að $V(r \rightarrow \infty) = 0$ en það gefur einmitt að $\alpha = 0$. Fyrir $0 \leq r \leq R$ þá fáum við hinsvegar að:

$$V(r) = -\int E(r) dr = -\int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\frac{r}{R}\right)^5 dr = -\frac{Q}{16\pi\epsilon_0 R^5} r^4 + \beta, \quad (1.16)$$

þar sem að heildunarfastinn β ákvarðast af því að rafmættið verður að vera samfellt í $r = R$ svo við höfum með samanburði að:

$$V(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = -\frac{1}{16\pi\epsilon_0 R} + \beta \implies \beta = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5Q}{16\pi\epsilon_0 R}. \quad (1.17)$$

Við höfum þar með sýnt að rafmættið er gefið með:

$$V(r) = \begin{cases} \frac{Q}{16\pi\epsilon_0 R} \left(5 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right) & \text{ef } 0 \leq r \leq R, \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{ef } r \geq R. \end{cases} \quad (1.18)$$

(c) Fljótlegasta leiðin er eflaust að reikna þetta þannig að:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho V d\tau = \frac{1}{2} \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 V(r) dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^R c r^2 4\pi r^2 \cdot \frac{Q}{16\pi\epsilon_0 R} \left(5 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right) dr \\ &= \frac{cQ}{8\epsilon_0 R} \int_0^R \left(5r^4 - \frac{r^8}{R^4}\right) dr \\ &= \frac{cQ}{8\epsilon_0 R} \left(R^5 - \frac{1}{9} R^5\right) = \frac{cQR^4}{9\epsilon_0}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

þar sem að í öðru jafnaðarmerkinu nýttum við okkur að $\rho(r) = 0$ fyrir $r \geq R$. Með því að stinga loks inn að $c = \frac{5Q}{4\pi R^5}$ þá ályktum við að stöðuorka hleðsludreifingarinnar er gefin með:

$$W = \frac{5}{9} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (1.20)$$

2 Heimadæmi 18. janúar

Dæmi 3. (a) Grannur vír af lengd L , sem ber jafndreifða rafhleðslu Q , liggur eftir x -ás frá $x = -L/2$ til $x = L/2$.

i. Finnið rafmættið í punktinum $(x, 0, 0)$ með $x > L/2$.

ii. Túlkið niðurstöðuna fyrir markgildið $x \gg L$.

(b) Þunn skrifa með geisla R ber jafndreifða rafhleðslu Q .

i. Finnið rafmættið á samhverfuás skrifunnar í fjarlægð d frá miðpunkti hennar.

ii. Túlkið niðurstöðuna fyrir markgildin $d \gg R$ og $d \ll R$.

Lausn: (a) Línuhleðslupéttleikinn er $\lambda = \frac{Q}{L}$ þannig að rafmættið í $a > \frac{L}{2}$ er gefið með:

$$V(a, 0, 0) = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0(a-x)} = \boxed{-\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{a - \frac{L}{2}}{a + \frac{L}{2}}\right)}. \quad (2.1)$$

Skoðum síðan markgildið $a \gg L$ þ.e. $\frac{L}{a} \ll 1$. Byrjum á því að athuga að:

$$\frac{a - \frac{L}{2}}{a + \frac{L}{2}} = 1 - \frac{L}{a + \frac{L}{2}} = 1 - \frac{L}{a(1 + \frac{L}{2a})} = 1 - \frac{L}{a} \left(1 + \frac{L}{2a}\right)^{-1} \stackrel{\frac{L}{a} \ll 1}{\approx} 1 - \frac{L}{a}. \quad (2.2)$$

Þar sem að við notuðum nálgunina $(1+x)^n \approx 1+nx$. En þar með höfum við að:

$$V(a, 0, 0) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{a - \frac{L}{2}}{a + \frac{L}{2}}\right) \stackrel{\frac{L}{a} \ll 1}{\approx} -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(1 - \frac{L}{a}\right) \stackrel{\frac{L}{a} \ll 1}{\approx} \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 a} = \boxed{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}}. \quad (2.3)$$

Þar sem að við notuðum nálgunina $\ln(1+x) \approx x$. En þetta er einmitt rafmættið í fjarlægð a frá punkthleðslu Q .

(b) Flatarhleðslupéttleiki skrifunnar er $\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$. Skiptum skrifunni upp í marga litlar þunnar hringskífur með geisla r og þykkt dr . Hver þeirra veitir þá framlag í hæð d yfir miðpunkti hennar:

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0\sqrt{d^2 + r^2}} = \frac{\sigma 2\pi r dr}{4\pi\epsilon_0\sqrt{d^2 + r^2}}. \quad (2.4)$$

En þar með fáum við að:

$$V(0, 0, d) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{d^2 + r^2}} = \boxed{\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + d^2} - d\right)}. \quad (2.5)$$

Byrjum síðan á því að skoða tilvikið þegar $d \gg R$ þ.e. $\frac{R}{d} \ll 1$ þá fæst að:

$$\sqrt{R^2 + d^2} - d = d \left(\left(1 + \frac{R^2}{d^2}\right)^{1/2} - 1 \right) \stackrel{\frac{R}{d} \ll 1}{\approx} d \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{d^2} - 1 \right) = \frac{R^2}{2d}. \quad (2.6)$$

Þar sem að við notuðum nálgunina $(1+x)^n \approx 1+nx$. En þar með er

$$\boxed{V(0,0,d) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{2d} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d}, \quad \text{ef } d \gg R.} \quad (2.7)$$

þar sem að við notuðum að $Q = \sigma\pi R^2$. En þetta er einmitt rafmættið í fjarlægð d frá punkthleðslu Q . Hinsvegar ef $d \ll R$ þ.e. $\frac{d}{R} \ll 1$ þá athugum við að:

$$\sqrt{d^2 + R^2} - d = R\sqrt{1 + \frac{d^2}{R^2}} - d \approx R + \frac{d^2}{2R} - d \approx R. \quad (2.8)$$

En þar með er

$$\boxed{V(0,0,d) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R}, \quad \text{ef } d \ll R.} \quad (2.9)$$

En þetta stemmir við rafmættið í miðju disksins.

Dæmi 4. Punkthleðsla q er í punktinum $(a, 0, 0)$ fyrir utan leiðandi kúlufyrirborð með geisla R og miðju í upphafspunktinum.

- (a) Notið sýndarhleðsluaðferð til að finna stærð og stefnu rafkraftsins á q .
- (b) Hve mikla vinnu þarf að framkvæma til að færa hleðsluna óendanlega langt frá kúlunni.
- (c) Finnið stöðuorku kerfis, sem eingöngu inniheldur hleðsluna q og sýndarhleðsluna í (a)-lið, og berið saman við svarið í (b)-lið.
- (d) Finnið vinnuna í (b)-lið í eV fyrir rafeind sem er upphaflega í 1,0 nm fjarlægð frá fyrirborði leiðandi kúlu með 1,0 cm geisla.

Lausn: Skýrum fyrst hvernig má ákvarða sýndarhleðsluna p og vegalengdina frá miðju, b , með því að skoða einungis punktana tvo $(-R, 0, 0)$ og $(R, 0, 0)$ á kúlunni. Höfum þá að mættið er gefið með:

$$V(R, 0, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{a-R} + \frac{p}{R-b} \right) = 0, \quad V(-R, 0, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R+a} + \frac{p}{R+b} \right) = 0. \quad (2.10)$$

En þar með höfum við fengið jöfnuhneppi með tveimur óþekktum stærðum p og b sem fall af gefnu stærðunum a, R og q . Deilum jöfnunum tveimur saman til að fá:

$$\frac{R+a}{R-a} = -\frac{R+b}{R-b} \implies (R+a)(R-b) = -(R+b)(R-a) \implies \boxed{b = \frac{R^2}{a}}. \quad (2.11)$$

En með því að stinga þessu inn í aðra af jöfnum fæst:

$$\boxed{p = q \frac{R-b}{R-a} = q \frac{R - \frac{R^2}{a}}{R-a} = -\frac{R}{a} q.} \quad (2.12)$$

Sýnum nú að þessi sýndarhleðsla uppfylli skilyrðið að rafmættið á kúlufirborðinu sé allsstaðar núll. Höfum að rafmættið er gefið með:

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(a-x)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{p}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(b-x)^2 + y^2 + z^2}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(a-x)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\frac{a}{R}\sqrt{(\frac{R^2}{a} - x)^2 + y^2 + z^2}} \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Sérhvern punkt á kúlunni má skrifa í kúluhnitum sem

$$x = R \cos \theta \sin \varphi, \quad y = R \sin \theta \sin \varphi, \quad z = R \cos \varphi. \quad (2.14)$$

En þar með höfum við að í öllum punktum á kúlufirborðinu gildir að:

$$V(R, \theta, \varphi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta \sin \varphi}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta \sin \varphi}} \right) = 0. \quad (2.15)$$

(a) Þetta gefur því að rafkrafturinn sem verkar á hleðsluna q er gefinn með:

$$F_q = \frac{qp}{4\pi\epsilon_0(a-b)^2} = -\frac{q^2 \frac{R}{a}}{4\pi\epsilon_0 \left(a - \frac{R^2}{a}\right)^2} = \boxed{-\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ra}{(a^2 - R^2)^2}}. \quad (2.16)$$

í geislalægu stefnuna að leiðandi kúlufirborðinu.

(b) Í fjarlægð x er rafkrafturinn gefinn með:

$$F_q(x) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Rx}{(x^2 - R^2)^2}, \quad (2.17)$$

En því er vinnan sem þarf til að færa hleðsluna óendanlega langt frá kúlunni gefin með:

$$W_{a \rightarrow \infty} = -\int_a^{+\infty} F_q(x) dx = \frac{q^2 R}{4\pi\epsilon_0} \int_a^{+\infty} \frac{x}{(x^2 - R^2)^2} dx = -\frac{q^2 R}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{x^2 - R^2} \right]_a^{+\infty} = \boxed{\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{R}{a^2 - R^2}}. \quad (2.18)$$

(c) Stöðuorkan er gefin með

$$U = \frac{qp}{4\pi\epsilon_0(a-b)} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{R/a}{a - \frac{R^2}{a}} = \boxed{-\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{a^2 - R^2}}. \quad (2.19)$$

En þetta er tvisvar sinnum stærra heldur en svarið í (b) því þar vorum við einungis að skoða það að færa hleðsluna q en ekki einnig sýndarhleðsluna p frá 0 í b . Formerkið er öfugt bara út frá formerkjamismuninum í skilgreiningu stöðuorku út frá vinnu.

(d) Fyrir $R = 1,0 \text{ cm}$, $a = R + d$ þar sem $d = 1,0 \text{ nm}$, $q = e = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ og rafsvörunarstuðul tómarúms $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ fæst að tölulega gildið á vinnunni sem þarf

$$W_{\text{rafeind}} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{R}{(R+d)^2 - R^2} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \left(\left(1 + \frac{d}{R}\right)^2 - 1 \right)^{-1} \stackrel{\frac{d}{R} \ll 1}{\approx} \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d} = \boxed{0,36 \text{ eV}}. \quad (2.20)$$

þar sem að í síðasta skrefinu notuðum við að $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

3 Heimadæmi 25. janúar

Dæmi 5. Leysið tvívíðu Laplace-jöfnuna á svæðinu $-b < x < b$, $0 < y < a$ í xy -planinu, þar sem $a, b, V_0 > 0$ eru fastar, með eftirfarandi jaðarskilyrðum:

$$V(x, y) \Big|_{x=\pm b} = 0, \quad V(x, y) \Big|_{y=0} = 0, \quad V(x, y) \Big|_{y=a} = \frac{V_0}{b} x. \quad (3.1)$$

Lausn: Tvívíða Laplace-jafnan segir að $\nabla^2 V = 0$ þ.e. $(\partial_x^2 + \partial_y^2) V(x, y) = 0$. Við skulum beita aðskilnaði breytistærða til þess að ákvarða almenna lausn sem uppfyllir gefnu jaðarskilyrðin. Skoðum því $V(x, y) = f(x)g(y)$ og athugum að þá gefur Laplace-jafnan að:

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2) f(x)g(y) = 0 \implies \frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{g''(y)}{g(y)} = \gamma. \quad (3.2)$$

Þar sem að við ályktuðum að þar sem að báðar hliðar eru fall af ólíkum breytistærðum þá er til fasti γ þannig að hvor hlið sé jöfn γ . Hinsvegar þá þurfum við að skoða þrjú tilvik eftir því hvert formerki γ er. Höfum tilvikin (i) $\gamma = 0$ (ii) $\gamma = k^2$ og (iii) $\gamma = -\omega^2$.

Tilvik (i) Þegar $\gamma = 0$ þá verða diffurjöfnurnar tvær

$$f''(x) = 0 \implies f(x) = Ax + B, \quad g''(y) = 0 \implies g(y) = Cy + D. \quad (3.3)$$

Því verður almenna lausnin gefin með:

$$V(x, y) = f(x)g(y) = (Ax + B)(Cy + D). \quad (3.4)$$

Athugum svo til að byrja með að fyrsta jaðarskilyrðið má umorða þannig að:

$$0 = V(x, y) \Big|_{x=\pm b} = f(x)g(y) \Big|_{x=\pm b} \implies f(\pm b) = 0. \quad (3.5)$$

Þetta gefur því að $0 = f(b) = Ab + B$ og $0 = f(-b) = -Ab + B$. Með því að leggja saman jöfnurnar sést að $B = 0$ en þá fæst einnig að $A = 0$ því $b > 0$. Þetta sýnir að ef $\gamma = 0$ þá er eina lausnin $V(x, y) = 0$.

Tilvik (ii) Þegar $\gamma = k^2$ þá verða diffurjöfnurnar:

$$\begin{aligned} f''(x) &= k^2 f(x) \implies f(x) = A \cosh(kx) + B \sinh(kx), \\ g''(y) &= -k^2 g(y) \implies g(y) = C \cos(ky) + D \sin(ky). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Fyrsta jaðarskilyrðið $f(\pm b) = 0$ gefur þar sem $\cosh$ er jafnstætt og $\sinh$ er oddstætt

$$A \cosh(kb) + B \sinh(kb) = 0 = A \cosh(kb) - B \sinh(kb). \quad (3.7)$$

Með því að leggja saman jöfnurnar sést að $B = 0$ en þá stendur eftir að $A \cosh(kb) = 0$ en $\cosh$ er strangt jákvætt fall svo við verðum að álykta að $A = 0$. Þar með höfum við sýnt að fyrir $\gamma = k^2$ þá er einnig $V(x, y) = 0$.

Tilvik (iii) Höfum nánast gefið upp alla von þegar hingað er komið, en prófum í örvæntingu okkar að setja $\gamma = -\omega^2$. Þá verða diffurjöfnurnar:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\omega^2 f(x) \implies f(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x), \\ g''(y) &= \omega^2 g(y) \implies g(y) = C \cosh(\omega y) + D \sinh(\omega y). \end{aligned} \quad (3.8)$$

En þetta er algjör himnasending því nú gefur fyrsta skilyrðið $f(\pm b)$ okkur að:

$$A \cos(\omega b) + B \sin(\omega b) = 0, \quad \text{og} \quad A \cos(\omega b) - B \sin(\omega b) = 0. \quad (3.9)$$

Með því að leggja saman og draga frá sést að þetta jafngildir:

$$A \cos(\omega b) = 0, \quad \text{og} \quad B \sin(\omega b) = 0. \quad (3.10)$$

Það eru til tvær ólíkar lausnir á þessu, nefnilega

$$\begin{aligned} A &= 0, \quad \text{og} \quad \omega b = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ B &= 0, \quad \text{og} \quad \omega b = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Athugum síðan að $V(x, 0) = 0$ skilyrðið er jafngilt því að $g(0) = 0$ en það gefur þá beint að $C = 0$ því $\sinh(0) = 0$ en $\cosh(0) = 1$. Við höfum því sýnt að:

$$V_n(x, y) = \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad (3.12)$$

eða

$$V_n(x, y) = \beta_n \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \frac{x}{b}\right) \sinh\left(\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \frac{y}{b}\right) \quad (3.13)$$

Þurfum síðan að ákvarða stuðlana α_n og β_n með því að para þá við stuðlana í Fourier-röð fallsins $h(x) = \frac{V_0}{b}x$ fyrir $V_n(x, a)$. Seinni valkosturinn er jafnstætt fall af x svo við verðum að álykta að $\beta_n = 0$. Fourier-röð fallsins $h(x)$ á bilinu $[-b, b]$ er gefin með:

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n(x, a) = h(x) = -\frac{2V_0}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \quad (3.14)$$

En þetta ákvarðar því stuðlana α_n þannig að:

$$\alpha_n = -\frac{2V_0}{\pi} \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \quad (3.15)$$

En þar með getum við skrifað röðina sem:

$$\boxed{V(x, y) = -\frac{2V_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \frac{\sinh\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}}. \quad (3.16)$$

Dæmi 6. Kúluskel með geisla R og miðju í upphafspunktinum hefur yfirborðshleðsludreifingu $\sigma(\theta, \phi) = \sigma_0 \cos(2\theta)$ í kúluhnitum.

- (a) Finnið rafmættið alls staðar í rúminu ef gert er ráð fyrir að bæði utan og innan kúluskeljarinnar sé tóm.
- (b) Ákvarða á heildarrafhleðslu, raftvípólvægi og raffjórþólavægi hleðsludreifingarinnar á kúluskelinni.
- (c) Bera á rafmættið utan við kúluskelina í (a)-lið saman við samanlagt rafmætti frá punktuppsprettum í upphafspunktinum sem bera sömu fjölpólavægi og í (b)-lið. Hvað má álykta um hærri fjölpólarmætti hleðsludreifingarinnar á kúluskelinni?

Lausn: Byrjum á því að athuga að þar sem að Legendre-margliðurnar $P_\ell(x)$ mynda þverstæðan grunn fyrir margliðurúmið þá getum við endurskrifað:

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = \frac{4}{3}P_2(\cos(\theta)) - \frac{1}{3}P_0(\cos(\theta)). \quad (3.17)$$

- (a) Almenna lausn í kúluhnitum sem uppfyllir að $V(r, \theta) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ og að $V(r, \theta) \xrightarrow{r \rightarrow 0}$ fasti má skrifa á forminu:

$$V(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{\ell=0}^{+\infty} A_\ell r^\ell P_\ell(\cos \theta) & \text{ef } r \leq R \\ \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos \theta) & \text{ef } r \geq R. \end{cases} \quad (3.18)$$

Fastarnir A_ℓ og B_ℓ ákvarðast af jaðarskilyrðunum í $r = R$ sem segja okkur að:

- (i) $V_{\text{úti}}(R, \theta) = V_{\text{inni}}(R, \theta)$
- (ii) $\left(\frac{\partial V_{\text{úti}}}{\partial n} - \frac{\partial V_{\text{inni}}}{\partial n} \right) \Big|_{r=R} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$

Fyrri skilyrðið segir okkur að:

$$A_\ell R^\ell = \frac{B_\ell}{R^{\ell+1}} \implies B_\ell = A_\ell R^{2\ell+1}. \quad (3.19)$$

En það seinna gefur okkur síðan að:

$$\sum_{\ell=0}^{+\infty} \left(-(\ell+1) \frac{B_\ell}{r^{\ell+2}} P_\ell(\cos \theta) - \ell A_\ell r^{\ell-1} P_\ell(\cos \theta) \right) \Big|_{r=R} = -\frac{\sigma(\theta)}{\epsilon_0} \quad (3.20)$$

sem gefur eftir að við metum vinstri hliðina í $r = R$ og notum að $B_\ell = A_\ell R^{2\ell+1}$

$$R^{\ell-1} \sum_{\ell=0}^{+\infty} (2\ell+1) A_\ell P_\ell(\cos \theta) = \frac{\sigma(\theta)}{\epsilon_0} \quad (3.21)$$

Margföldum núna með $P_m(\cos \theta) \sin \theta$ báðum meginum og tegrum frá 0 upp í π til að fá

$$\sum_{\ell=0}^{+\infty} \int_0^\pi (2\ell+1) R^{\ell-1} A_\ell P_\ell(\cos \theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^\pi \sigma(\theta) \sin \theta P_m(\cos \theta) d\theta \quad (3.22)$$

Notum síðan að

$$\int_0^\pi P_\ell(\cos \theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \int_{-1}^1 P_\ell(x) P_m(x) dx = \frac{2\delta_{m\ell}}{2\ell+1} \quad (3.23)$$

Þar með höfum við sýnt að almennt gildi að:

$$A_m = \frac{1}{2R^{m-1}\epsilon_0} \int_0^\pi \sigma(\theta) \sin \theta P_m(\cos \theta) d\theta \quad (3.24)$$

Þar með fáum við eftirfarandi tvo stuðla:

$$A_0 = \frac{\sigma_0 R}{2\epsilon_0} \int_0^\pi -\frac{1}{3} P_0(\cos \theta)^2 \sin \theta d\theta = -\frac{R\sigma_0}{3\epsilon_0}, \quad (3.25)$$

$$A_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 R} \int_0^\pi \frac{4}{3} (P_2(\cos \theta))^2 \sin \theta d\theta = \frac{4\sigma_0}{15\epsilon_0 R}. \quad (3.26)$$

En þetta gefur einnig stuðlana fyrir $B_\ell = A_\ell R^{2\ell+1}$ þannig að

$$B_0 = A_0 R = -\frac{R^2 \sigma_0}{3\epsilon_0}, \quad B_2 = A_2 R^2 = \frac{4\sigma_0}{15\epsilon_0} R^4 \quad (3.27)$$

En þar með ályktum við að rafmættið alls staðar í rúminu sé gefið með:

$$V(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{\ell=0}^{+\infty} A_\ell r^\ell P_\ell(\cos \theta) & \text{ef } r \leq R \\ \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos \theta) & \text{ef } r \geq R \end{cases} = \begin{cases} \frac{\sigma_0 R}{3\epsilon_0} \left(\frac{4}{5} \frac{r^2}{R^2} P_2(\cos \theta) - 1 \right) & \text{ef } r \leq R \\ \frac{\sigma_0 R}{3\epsilon_0} \left(\frac{4}{5} \frac{R^3}{r^3} P_2(\cos \theta) - \frac{R}{r} \right) & \text{ef } r \geq R. \end{cases} \quad (3.28)$$

(b) Athugum næst að heildarrafhleðslan er gefin með:

$$Q = \int \sigma(\theta, \phi) dA = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi R^2 \sin \theta \sigma_0 \cos(2\theta) = -\frac{4\pi\sigma_0 R^2}{3} \quad (3.29)$$

Við hefðum því getað endurskrifað mættin innan og utan með því að nota að

$$\frac{\sigma_0 R}{3\epsilon_0} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (3.30)$$

Þetta passar líka vel við að einpólvægið er þá gefið með:

$$V_{\text{einpóll}}(\vec{r}) = -\frac{\sigma_0 R^2}{3\epsilon_0 r}. \quad (3.31)$$

Hefjumst nú handa við að ákvarða raftvípólvægi og raffjórþólavægi. Við reiknum því tvískautið samkvæmt:

$$\vec{p} = \int \vec{r} \rho(\vec{r}) d\tau = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi R^2 \sin \theta \begin{pmatrix} R \sin \theta \cos \phi \\ R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \theta \end{pmatrix} \sigma(\theta, \phi) \quad (3.32)$$

Athugum að þar sem að hornaföllin tegruð yfir lotu gefa núll þá hverfa $\hat{x}$ og $\hat{y}$ þátturinn af $\vec{p}$ það kemur hinsvegar í ljós að $\hat{z}$ þátturinn hverfur líka því:

$$p_z = 2\pi R^3 \sigma \int_0^\pi \sin(\theta) \cos(\theta) \cos(2\theta) d\theta = 0. \quad (3.33)$$

Þannig að raftvípólvægið er núll $V_{\text{tvípóll}}(\vec{r}) = 0$ (sem endurspeglast einnig í því að $P_1(\cos \theta)$ kom ekki fyrir í yfirborðshleðsludreifingunni $\sigma(\theta, \phi)$).

Við athugum næst að fjórþólaþylkið er samhverfa fylkið

$$[Q_{ij}] = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz} \end{pmatrix}, \quad \text{þar sem } Q_{ij} = \frac{1}{2} \int (3r_i' r_j' - (r')^2) \delta_{ij} \rho(\vec{r}') d\tau'. \quad (3.34)$$

Þannig að við fáum:

$$\begin{aligned} [Q_{ij}] &= \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi R^2 \sin \theta \sigma_0 \cos(2\theta) \begin{pmatrix} R^2(3 \sin^2 \theta \cos^2 \phi - 1) & Q_{yx} & Q_{xz} \\ 3R^2 \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi & R^2(3 \sin^2 \theta \sin^2 \phi - 1) & Q_{yz} \\ 3R^2 \sin \theta \cos \theta \cos \phi & 3R^2 \cos \theta \sin \theta \sin \phi & R^2(3 \cos^2 \theta - 1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{8\pi}{15} R^4 \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{8\pi}{15} R^4 \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16\pi}{15} R^4 \sigma_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En þar með höfum við að

$$\begin{aligned} V_{\text{fjórþóll}}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sum_{i,j=1}^3 \hat{r}_i \hat{r}_j Q_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\hat{r}_x \hat{r}_x Q_{xx} + \hat{r}_y \hat{r}_y Q_{yy} + \hat{r}_z \hat{r}_z Q_{zz}) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\sin^2 \theta \cos^2 \phi \left(-\frac{8\pi}{15} R^4 \sigma_0 \right) + \sin^2 \theta \sin^2 \phi \left(-\frac{8\pi}{15} R^4 \sigma_0 \right) + \cos^2 \theta \left(\frac{16\pi}{15} R^4 \sigma_0 \right) \right) \\ &= \frac{\sigma_0 R^4}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \frac{8\pi}{15} (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ &= \frac{4}{15} \frac{\sigma_0 R^4}{\epsilon_0 r^3} \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \\ &= \frac{4\sigma_0 R^4}{15\epsilon_0 r^3} P_2(\cos \theta). \end{aligned}$$

- (c) Þar með höfum við sýnt að rafmættið sem að við reiknuðum í (a)-lið er jafnt línulegri samantekt á rafmættinu frá einpól og því frá fjórþól, þ.e. $V = V_{\text{einpóll}} + V_{\text{fjórþóll}}$. Því eru engin önnur framlög frá hærri fjölþólaþægingum.

4 Heimadæmi 1. febrúar

Dæmi 7. Kúla með geisla R og miðju í upphafspunktinum er úr rafsvarandi efni með rafviðtak sem er háð fjarlægð frá miðju

$$\chi_e(\vec{r}) = \frac{\chi_0}{R} r, \quad (4.1)$$

en utan kúlunnar er tóm. Í miðju kúlunnar er frjáls punktrafhleðsla q .

- (a) Finnið sviðin $\vec{D}$, $\vec{E}$ og $\vec{P}$ inni í kúlunni.
- (b) Ákvarðið bundinn hleðsluþéttleika ρ_b og σ_b sem fall af staðsetningu.
- (c) Ákvarðið rafsviðið utan kúlunnar.

Lausn: (a) Rafsviðið er gefið með:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon(r)r^2} \hat{r} & \text{ef } r \leq R, \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & \text{ef } r \geq R. \end{cases} \quad (4.2)$$

þar sem $\epsilon(r) = \epsilon_0(1 + \chi_e(r)) = \epsilon_0(1 + \frac{\chi_0}{R}r)$. Þetta gefur því að:

$$\vec{D} = \epsilon(r)\vec{E} = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r}, \quad (4.3)$$

fyrir öll $r > 0$ og þar með fæst að:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e(r) \vec{E} = \begin{cases} \frac{q}{4\pi r^2} \frac{\frac{\chi_0}{R}r}{1 + \frac{\chi_0}{R}r} \hat{r} & \text{ef } r \leq R, \\ 0 & \text{ef } r \geq R. \end{cases} \quad (4.4)$$

því rafviðtakið er $\chi_e(r) = 0$ utan kúlunnar fyrir $r \geq R$.

(b) Þá athugum við að $\hat{n} = \hat{r}$ þannig að:

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}|_{r=R} = P_r|_{r=R} = \frac{q}{4\pi r^2} \frac{\frac{\chi_0}{R}r}{1 + \frac{\chi_0}{R}r} \Big|_{r=R} = \frac{q}{4\pi R^2} \frac{\chi_0}{1 + \chi_0} \quad (4.5)$$

og

$$\begin{aligned} \rho_b &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P_r) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{q}{4\pi} \frac{\frac{\chi_0}{R}r}{1 + \frac{\chi_0}{R}r} \right) \\ &= -\frac{q}{4\pi r^2} \left(\frac{\frac{\chi_0}{R} (1 + \frac{\chi_0}{R}r) - (\frac{\chi_0}{R})^2 r}{(1 + \frac{\chi_0}{R}r)^2} \right) \\ &= -\frac{q}{4\pi r^2} \frac{\frac{\chi_0}{R}}{(1 + \frac{\chi_0}{R}r)^2}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

(c) Sjá (a). Við getum líka athugað með lögmáli Gauss að fyrir $r > R$ fæst að:

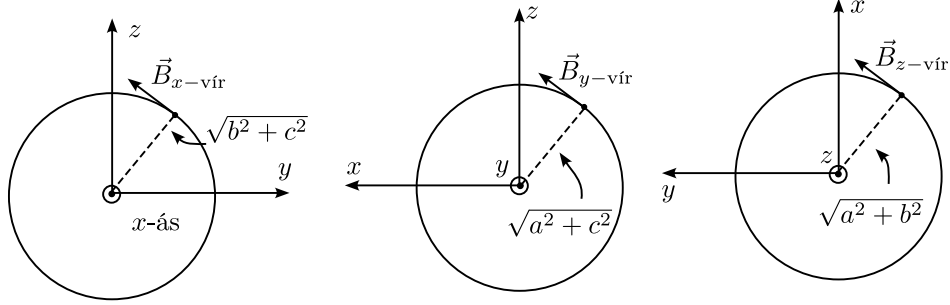
$$Q_{\text{inni}} = q + \sigma_b 4\pi R^2 + \int_0^R 4\pi r^2 \rho_b(r) dr = q, \quad (4.7)$$

sem gefur að $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$ fyrir $r > R$.

Dæmi 8. Óendanlega langur vír ber rafstraum I_1 eftir x -ás og annar vír ber straum I_2 eftir y -ás.

- (a) Finnið segulsviðið í punktinum $\vec{r} = (a, a, 0)$ í kartesarhnitum.
(b) Gerum nú ráð fyrir að þriðji vírin beri straum I_3 eftir z -ásnum. Finnið segulsviðið frá vírunum þremur í punktinum $\vec{r} = (a, b, c)$ með $a, b, c \neq 0$.

Lausn: Látum nægja að leysa (b)-liðinn því (a)-liðurinn fæst fyrir $b = a, c = 0$ og $I_3 = 0$. Með því að skoða eftirfarandi myndir:



sést að:

$$\vec{B}_{x-\text{vír}} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(b^2 + c^2)} \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ b \end{pmatrix}, \quad \vec{B}_{y-\text{vír}} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(a^2 + c^2)} \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}, \quad \vec{B}_{z-\text{vír}} = \frac{\mu_0 I_3}{2\pi(a^2 + b^2)} \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

En þar með er segulsviðið frá vírunum þremur gefið með:

$$\vec{B} = \vec{B}_{x-\text{vír}} + \vec{B}_{y-\text{vír}} + \vec{B}_{z-\text{vír}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{cI_2}{(a^2+c^2)} - \frac{bI_3}{(a^2+b^2)} \\ \frac{aI_3}{(a^2+b^2)} - \frac{cI_1}{(b^2+c^2)} \\ \frac{bI_1}{(b^2+c^2)} - \frac{aI_2}{(a^2+c^2)} \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

en þar með verður svarið í (a)-lið þegar við metum í $b = a, c = 0$ og $I_3 = 0$.

$$\vec{B}_{(a)-\text{liður}} = \frac{\mu_0(I_1 - I_2)}{2\pi a} \hat{z}. \quad (4.10)$$

5 Heimadæmi 8. febrúar

8. Langur sívalningslaga leiðari með geisla R og miðju á z -ásnum ber einsleitan rafstraumbéttleika $\vec{J} = J_0 \hat{z}$.

(a) Finnið stærð og stefnu segulsviðsins inni í sívalningnum.

(b) Nú er sívalningslaga holrúm með geisla ρ borað út úr leiðaranum. Holrúmið liggur eftir endilöngum sívalningnum og samhverfuás þess er í fjarlægð a frá z -ásnum, þannig að $a + \rho < R$. Finnið segulsviðið inni í holrúminu ef gert er ráð fyrir að straumbéttleikinn í leiðaranum utan holrúmsins sé hinn sami og í (a)-lið.

Lausn: (a) Samkvæmt lögmáli Ampéres, $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$, fæst að ef $r < R$ þá er:

$$B \cdot 2\pi r = \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{a} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{a} = \mu_0 J_0 \pi r^2, \quad (5.1)$$

heildarstraumurinn er síðan $I_{\text{inni}} = J_0 \pi R^2$ þannig að við höfum að:

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu_0 J r \hat{\phi} & \text{ef } r < R, \\ \frac{\mu_0 J R^2}{2r} \hat{\phi} & \text{ef } r \geq R, \end{cases} = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2} \vec{J} \times \vec{r}, & \text{ef } r < R, \\ \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{R^2}{r^2} \right) \vec{J} \times \vec{r} & \text{ef } r \geq R. \end{cases} \quad (5.2)$$

(b) Sama niðurstaða og í (a) gildir um sívalning með miðju í $\vec{a}$ og með geisla ρ og þar sem að rafsviðin leggjast saman þá fæst:

$$\vec{B}_{\text{heild}} = \vec{B}_1 - \vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{2} \vec{J} \times \vec{r} - \frac{\mu_0}{2} \vec{J} \times (\vec{r} - \vec{a}) = \frac{\mu_0}{2} \vec{J} \times \vec{a} = \frac{1}{2} \mu_0 J a \hat{y}. \quad (5.3)$$

9. Vigurmætti frá sístæðum straumbéttleika má skrifa:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3 r' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (5.4)$$

(a) Leiðið út eftirfarandi jöfnu fyrir segulsviðið frá straumbéttleikanum:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3 r' \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (5.5)$$

(b) Sýnið að segulsviðið í (a)-lið uppfylli $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$.

Lausn: (a) Fáum að:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3 r' \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \quad (5.6)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3 r' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla} \times \vec{J}(\vec{r}') - \vec{J}(\vec{r}') \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right) \quad (5.7)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3 r' \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (5.8)$$

Þar sem við notuðum að $\vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$ og $\vec{\nabla} \times \vec{J}(\vec{r}') = \vec{0}$ því $\vec{J}(\vec{r}')$ er fall af $\vec{r}'$.

(b) Þá fæst $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \right) = 0$ því rót vigursviðs er sundurleitnilaus.

6 Heimadæmi 16. febrúar

Dæmi 11. Kúla með geisla R og miðju í upphafspunktinum ber jafndreifða rafhleðslu Q og snýst með föstum hornhraða ω um z -ásinn.

(a) Reiknið segultvívólvægi kúlunnar.

(b) Finnið segulsviðið í fjarlægð $r \gg R$ frá kúlunni á (i) z -ásnum (ii) x -ásnum.

Lausn: (a) Þetta minnir á útreikning fyrir hverfitregðu kúlu. Vegna samhverfu í ϕ stefnuna er því þægilegt að skipta kúlunni niður í hringlaga gjarðir með geisla $r \sin \theta$ í hæð $z = r \cos \theta$. Þá er framlagið frá slíkri gjörð:

$$d\vec{m}_{\text{gjörð}} = dI\pi r^2 \sin^2 \theta \hat{z} \quad (6.1)$$

þar sem að straumurinn í hverri gjörð er gefinn með:

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{wdq}{2\pi} = \frac{w\rho r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi}{2\pi} \quad (6.2)$$

En það þýðir að:

$$d\vec{m}_{\text{gjörð}} = \frac{1}{2\pi} \omega \rho \pi r^4 \sin^3 \theta \hat{z} \quad (6.3)$$

En þar með ályktum við að segultvívólvægi kúlunnar er gefið með:

$$\vec{m} = \int d\vec{m}_{\text{gjörð}} = \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi d\phi \frac{1}{2\pi} \omega \rho \pi r^4 \sin^3 \theta \hat{z} \quad (6.4)$$

sem gefur því eftir að við tegrum og notum að $\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$ að

$$\vec{m} = \frac{1}{5} Q \omega R^2 \hat{z} = m \hat{z}. \quad (6.5)$$

(b) Reiknum nú segulsviðið frá þessum segultvívól samkvæmt

$$\vec{B}_{\text{tvípól}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}]. \quad (6.6)$$

í (i) er $\vec{r} = r \hat{z}$ þannig að við fáum:

$$\vec{B}_{\text{tvípól}}(0, 0, r) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\vec{m} \cdot \hat{z})\hat{z} - \vec{m}] = \frac{\mu_0 m}{2\pi r^3} \hat{z}, \quad (6.7)$$

en í (ii) er $\vec{r} = r \hat{x}$ þannig að við fáum:

$$\vec{B}_{\text{tvípól}}(r, 0, 0) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\vec{m} \cdot \hat{x})\hat{x} - \vec{m}] = -\frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \hat{z}. \quad (6.8)$$

Dæmi 12. Óendanlega löng sívalningslaga spóla með geisla a og miðju á z -ás hefur n vafninga á lengdareiningu. Um vír spólunnar fer rafstraumur I . Holrúmið inni í spólunni inniheldur efni með breytilegt segulviðtak $\chi_m(s) = \chi_0 \frac{s^2}{a^2}$, þar sem s er fjarlægðin frá samhverfuásnum og χ_0 er fasti. Finnið sviðin $\vec{H}$ og $\vec{B}$ inni í spólunni og alla bundna strauma.

Lausn: Þar sem að spólan er óendanlega löng er ekkert segulsvið utan spólunnar. Því er segulsviðið inni í spólunni gefið með lögmáli Ampéres sem:

$$\vec{B} = \mu n I \hat{z} = \mu_0 (1 + \chi_m(s)) n I \hat{z}, \quad \text{fyrir } s \leq a. \quad (6.9)$$

En þetta gefur því að:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} = n I \hat{z}, \quad \text{fyrir } s \leq a. \quad (6.10)$$

sem og

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} = \chi_m(s) n I \hat{z}, \quad \text{fyrir } s \leq a. \quad (6.11)$$

Bundni straumbéttleikinn er því gefinn með:

$$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{\nabla} \times (\chi_m(s) n I \hat{z}) = -\frac{\partial}{\partial s} (\chi_m(s) n I) \hat{\phi} = -\frac{2\chi_0 n I s}{a^2} \hat{\phi}. \quad (6.12)$$

þar sem að við reiknuðum rótina í sívalningsshnitum. Fáum síðan að bundni yfirborðsstraumbéttleikinn er gefinn með:

$$\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n}|_{s=a} = \chi_m(s) n I \hat{z} \times \hat{s}|_{s=a} = \chi_0 n I \hat{\phi}. \quad (6.13)$$

7 Heimadæmi 22. febrúar

Dæmi 13. Leiðandi kúla með geisla R_1 er umlukin kúluskel með innri geisla R_1 og ytri geisla R_2 . Kúluskelin er úr efni með rafsvörunarstuðul ϵ og eðlisleiðni σ . Utan við kúluskelina er tóm. Klukkan $t = 0$ ber kúlan rafhleðslu Q_0 en kúluskelin er óhlaðin.

- (a) Ákvarðið stærð og stefnu rafsviðsins í fjarlægð r frá miðju kúlunnar klukkan $t = 0$. Skoðið tilfellið $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ og $R_2 < r$ hvert í sínu lagi.
- (b) Finnið yfirborðspéttleika bundinnar rafhleðslu á ytra yfirborði kúluskeljarinnar klukkan $t = 0$.
- (c) Ákvarðið rafhleðsluna sem leiðandi kúlan ber sem fall af tíma fyrir $t \geq 0$.

Lausn: (a) Höfum að:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{0} & \text{ef } r < R_1, \\ \frac{Q_0}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r} & \text{ef } R_1 \leq r \leq R_2, \\ \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & \text{ef } r > R_2. \end{cases} \quad (7.1)$$

- (b) Klukkan $t = 0$ er skautunin gefin með $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_0 \vec{E} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}$. Þá er:

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \vec{n}|_{r=R_2} = (\epsilon - \epsilon_0) \frac{Q}{4\pi\epsilon R_2^2} = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \frac{Q_0}{4\pi R_2^2}. \quad (7.2)$$

- (c) Við athugum þá að:

$$\frac{dQ}{dt} = -I(t) = - \int \vec{J} \cdot d\vec{a} = -\sigma \int \vec{E} \cdot d\vec{a} = -\frac{\sigma}{\epsilon} Q, \quad (7.3)$$

þar sem að við notuðum lögmál Ohms $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ í þriðja jafnaðarmerkinu. En þar með ályktum við að hleðslan hnignar sem fall af tíma samkvæmt:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t}. \quad (7.4)$$

Dæmi 14. Ferningslaga straumlykkja með hliðarlengd L er staðsett í xz -planinu með miðju í upphafspunktinum og hliðar samsíða hnitaásunum klukkan $t = 0$. Lykkjan hreyfist á föstum hraða $\vec{v} = v_0 \hat{z}$ í ytra segulsviði

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{B_0 L z}{(L^2 + z^2)} \hat{y}, \quad (7.5)$$

þar sem B_0 er fasti.

(a) Finnið spanstrauminn $J(t)$ í lykkjunni ef hún hefur viðnám R .

(b) Teiknið graf $J(t)$ í (a)-lið.

(c) Ákvarðið öll gildi á tímanum t þar sem $J(t) = 0$.

Lausn: (a) Við athugum að flæðið í gegnum gjörðina eftir að hún hefur ferðast um $d = v_0 t$ er gefið með:

$$\Phi_B(t) = \int_{-\frac{L}{2}+v_0 t}^{+\frac{L}{2}+v_0 t} B(z) L dz = B_0 L^2 \int_{-\frac{L}{2}+v_0 t}^{+\frac{L}{2}+v_0 t} \frac{z}{L^2 + z^2} dz = \frac{B_0 L^2}{2} \left[\ln(L^2 + z^2) \right]_{-\frac{L}{2}+v_0 t}^{+\frac{L}{2}+v_0 t} \quad (7.6)$$

$$= \frac{B_0 L^2}{2} \left(\ln \left(L^2 + (v_0 t + \frac{L}{2})^2 \right) - \ln \left(L^2 + (v_0 t - \frac{L}{2})^2 \right) \right). \quad (7.7)$$

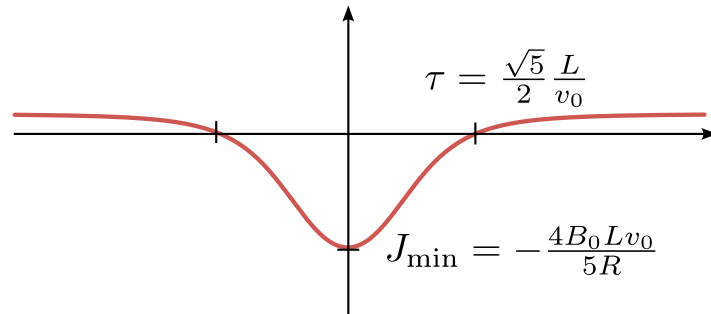
En þá er spanstraumurinn gefinn með:

$$J(t) = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{B_0 L^2 v_0}{R} \left[\frac{\frac{L}{2} + v_0 t}{L^2 + (\frac{L}{2} + v_0 t)^2} + \frac{\frac{L}{2} - v_0 t}{L^2 + (\frac{L}{2} - v_0 t)^2} \right]. \quad (7.8)$$

(bc) Athugum þá að $J_{\min} = J(0) = -\frac{4B_0 L v_0}{5R}$. Athugum einnig hvenær að $J(t) = 0$ (sem er reyndar (c)-liðurinn). Fáum þá að:

$$J(\tau) = 0 \implies \tau = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \frac{L}{v_0}. \quad (7.9)$$

Þar að auki er $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} J(t) = 0^+$. Grafið verður því:



8 Heimadæmi 29. febrúar

Dæmi 15. Ímyndum okkur segulsvið, $\vec{B} = b_0 t \hat{z}$ í sívalningshnitum, sem er óháð staðsetningu og vex línulega með tíma.

- (a) Gerið ráð fyrir samhverfu um z -ás og finnið vigurmætti $\vec{A}$ sem gefur $\vec{B}$ og útfrá því spanaða rafsviðið. Gera má ráð fyrir að rafmættið sé $V = 0$.
- (b) Sýnið með heildun að lögmál Faradays sé uppfyllt fyrir sérhvern hringferil í $z = 0$ plani með miðju á z -ásnum.

Lausn: (a) Þar sem að rafmættið $V = 0$ þá höfum við að

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (8.1)$$

Í sívalningshnitum gefur því seinni jafnan að:

$$b_0 t \hat{z} = \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{1}{s} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{s} + \left(\frac{\partial A_s}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial s} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{s} \left(\frac{\partial}{\partial s}(s A_\phi) - \frac{\partial A_s}{\partial \phi} \right) \hat{z} \quad (8.2)$$

Við sjáum að:

$$\vec{A} = A_\phi \hat{\phi} = \frac{1}{2} b_0 s t \hat{\phi} \quad (8.3)$$

leysir hlutafleiðujöfnuna. Spanaða rafsviðið er þá gefið með:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{2} b_0 s \hat{\phi}. \quad (8.4)$$

(b) Lögmál Faradays segir síðan að

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (8.5)$$

En þegar að við tegrum það umhverfis hringferil með geisla s í $z = 0$ plani með miðju á z -ásnum þá fæst:

$$-\frac{1}{2} b_0 s \cdot 2\pi s = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \Phi_B = -\frac{\partial}{\partial t} (b_0 t \cdot \pi s^2) = -b_0 \pi s^2. \quad (8.6)$$

sem stemmir á báðum hliðum jöfnunnar.

Dæmi 16. Tvær hringlaga straumlykkjur með geisla a og sjálfspanstuðul L liggja í $z = 0$ plani í fjarlægð $d \gg a$ hvor frá annari.

- (a) Reiknið víxlspanstuðulinn milli lykkjana í lægstu nálgun í a/d .
- (b) Hver er heildarorka kerfisins þegar straumur I fer réttsælis um báðar lykkjurnar?
- (c) Hver er heildarorka kerfisins þegar straumur I fer réttsælis um aðra lykkjuna og andsælis um hina?
- (d) Finnið aðdráttarkraftinn sem verkar á milli lykkjana í (c)-lið.

Lausn: (a) Skoðum lykkjuna sem straumurinn fer alltaf réttsælis um. Segultvípólvægi hennar er

$$\vec{m} = \pi a^2 I \hat{z}. \quad (8.7)$$

Segulsviðið frá tvíþólum má reikna samkvæmt:

$$\vec{B}_{\text{tvíþóll}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}]. \quad (8.8)$$

Við viljum meta segulsviðið í $(d, 0, 0)$ svo við fáum að:

$$\vec{B}_{\text{tvíþóll}}(d, 0, 0) = -\frac{\mu_0}{4\pi d^3} \vec{m} = -\frac{\mu_0 a^2 I}{4d^3} \hat{z}. \quad (8.9)$$

Þar sem að $d \gg a$ megum við gera þá nálgun að segulsviðið sé um það bil fast inni í gjörðinni í fjarlægð d svo að flæðið má meta samkvæmt:

$$\Phi_B \approx \pm \vec{B}_{\text{tvíþóll}}(d, 0, 0) \cdot \pi a^2 = \mp \frac{\mu_0 \pi a^4}{4 d^3} I, \quad (8.10)$$

þar sem að efra formerkið samsvarar því að straumurinn fari réttsælis í seinni gjörðinni og neðra formerkið samsvarar því að straumurinn fari andsælis í seinni gjörðinni. Þar með ályktum við að víxlspanstuðullinn sé gefinn með:

$$M = M_{12} = \mp \frac{\mu_0 \pi a^4}{4 d^3}. \quad (8.11)$$

(b)-(c) Þá er heildarorka kerfisins:

$$E = \frac{1}{2} L I^2 + \frac{1}{2} L I^2 - M_{12} I_1 I_2. \quad (8.12)$$

Þar sem að síðasta formerkið var valið þannig að lykkjurnar finni fyrir fráhrindikraft í (b) en aðdráttarkraft í (c). Loks notum við sýndarvinnu og skoðum hvað gerist þegar $d \rightarrow d + \delta$. Þá fæst að:

$$F\delta = dW = E[d] - E[d + \delta] = -\frac{\mu_0 \pi I^2 a^4}{4d^3} + \frac{\mu_0 \pi I^2 a^4}{4(d + \delta)^3} \stackrel{d \gg \delta}{\approx} -\frac{3\mu_0 \pi I^2 a^4}{4d^4} \delta, \quad (8.13)$$

þar sem að við Taylor-liðuðum í síðasta jafnaðarmerkinu. Samanburður á vinstri og hægri hlið jöfnunnar gefur því að aðdráttarkrafturinn er

$$F = \frac{3\mu_0 \pi I^2 a^4}{4d^4}. \quad (8.14)$$

9 Heimadæmi 7. mars

Dæmi 17. Gefum okkur að í tilteknu efni sé $\rho_f = 0$, $\vec{J}_f = \vec{0}$ og $\mu = \mu_0$ en skautunarsviðið $\vec{P}(\vec{r}, t)$ gefið fall af tíma og staðsetningu. Sýnið að ef $\vec{Z}(\vec{r}, t)$ er lausn á jöfnunni:

$$\nabla^2 \vec{Z} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{P}$$

og sviðin $\vec{E}$ og $\vec{B}$ eru skilgreind með:

$$\vec{E} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{Z}) - \frac{1}{\epsilon_0} \vec{P}, \quad \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t},$$

þá uppfylla sviðin Maxwellsjöfnurnar,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Lausn: Við athugum fyrst að með því að nota að:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{Z}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{Z}) - \nabla^2 \vec{Z}$$

þá fæst að:

$$\vec{E} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{Z}) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2}.$$

Við athugum þá að:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \\ &= \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{Z}) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} + \frac{1}{\epsilon_0} \vec{P} \right) \\ &= \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{Z}) - \vec{\nabla}^2 \vec{Z}) \\ &= \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{Z}) = 0 = \rho_f, \end{aligned}$$

þar sem að við notuðum að rót vigursviðs er sundurleitnilaus. Athugum næst að:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \left(\epsilon_0 \mu_0 \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} \right) = 0,$$

þar sem að við notuðum að rót vigursviðs er sundurleitnilaus. Athugum næst að:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{Z}) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} \right) = -\mu_0 \epsilon_0 \vec{\nabla} \times \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

þar sem að í öðru jafnaðarmerkinu notuðum við að stigulsvið er rótlaust. Athugum loks að:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \right) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{Z}) = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_f.$$

Dæmi 18. Tvö sammiðja kúlufirborð með geisla $a > 0$ og $b > a$ eru í einsleitu segulsviði $\vec{B} = B_0 \hat{z}$. Kúlufirborðin eru umlukin tómi og bera jafndrfeifða rafhleðslu, samtals $+Q$ í $r = a$ og $-Q$ í $r = b$.

- (a) Ákvarðið heildarhverfiþungann um upphafspunktinn í rafsegulsviðinu.
(b) Nú er hægt og rólega dregið úr styrk segulsviðsins niður í núll. Spanað rafsviðið veldur kraftvægi á kúlufirborðin sem fær þau til að snúast. Finnið hverfiþunga hvors kúlufirborðs um sig í lokin ef gert er ráð yfir að þau séu kyrrstæð í byrjun.

Lausn: (a) Þurfum að reikna hverfiþungaþéttleikann $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{g}$ þar sem að $\vec{g} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$ er skriðþungaþéttleiki rafsegulsviðsins. Við höfum þegar að $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ svo við athugum að:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, \quad \text{fyrir } a \leq r \leq b.$$

En í kúlunheitum er $\vec{B} = B_0 \hat{z} = B_0 (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta})$ svo:

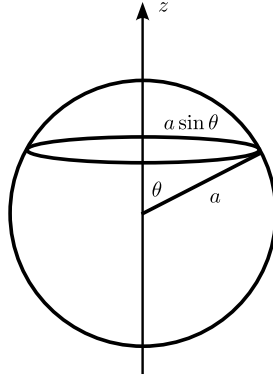
$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{g} = r \hat{r} \times \epsilon_0 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \times B_0 (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) = \frac{QB_0 \sin \theta}{4\pi r} \hat{\theta} = \frac{QB_0 \sin \theta}{4\pi r} \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}.$$

Til þess að fá heildarhverfiþungann þá tegrum við þéttleikann yfir viðeigandi rúmmálsfrymi:

$$\vec{L}_{\text{heild}} = \int_a^b dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin \theta \frac{QB_0 \sin \theta}{4\pi r} \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} QB_0 (b^2 - a^2) \hat{z}.$$

þar sem að $\hat{x}$ og $\hat{y}$ þættir hverfiþungans veittu ekkert framlag því $\int_0^{2\pi} d\theta \cos \phi = \int_0^{2\pi} d\theta \sin \phi = 0$.

- (b) Skoðum eftirfarandi mynd:



Spanaða rafsviðið má reikna má lögmáli Faradays fyrir sérhverja lykkju umhverfis z -ásinn þannig að:

$$E_\phi 2\pi(a \sin \theta) = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\pi(a \sin \theta)^2 \frac{dB_z}{dt}$$

Því flatarmálsvigurinn er samstefna segulsviðinu. Þetta sýnir því að:

$$\vec{E} = -\frac{1}{2}a \sin \theta \frac{dB_z}{dt} \hat{\phi}.$$

En þar með höfum við að kraftvægið sem að verkar á kúluskelina fyrir slíka gjörð er:

$$d\vec{\tau}_a = \vec{r} \times d\vec{F}_E = -\frac{1}{2}a^2 dQ \sin \theta \frac{dB_z}{dt} \hat{r} \times \hat{\phi} = -\frac{1}{2}a^2 dQ \sin \theta \frac{dB_z}{dt} \hat{\theta}$$

þar sem að $dQ = \sigma dA = \frac{Q}{4\pi a^2} dA$ er hleðslan í örsmæðarflatarmálinu $dA = a^2 \sin \theta d\theta d\phi$ en þetta þurfum við síðan að tegra yfir yfirborð kúluskeljarinnar með geisla a þ.a. við fáum:

$$\vec{\tau}_a = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi a^2 \sin \theta \left(-\frac{Q}{8\pi} \sin \theta \frac{dB_z}{dt} \right) \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} d\theta d\phi = \frac{1}{3} Q a^2 \frac{dB_z}{dt} \hat{z}.$$

En af þessu leiðir að hverfiþunginn er $\vec{\tau}_a = \frac{d\vec{L}_a}{d\tau}$ svo við ályktum að:

$$\vec{L}_a = \frac{1}{3} Q a^2 B_0 \hat{z}$$

með sömu aðferð fæst $\vec{L}_b = -\frac{1}{3} Q b^2 B_0 \hat{z}$.

10 Heimadæmi 14. mars

Dæmi 19. Tveimur flötum rafsegulbylgjum sem ferðast í sömu átt í tómi er lýst með eftirfarandi bylgjuföllum, þar sem $a \in \mathbb{C}$ er fasti,

$$\vec{E}_{(1)}(z, t) = \text{Re}[E_0 e^{i(kz - \omega t)}] \hat{x}, \quad \vec{E}_{(2)}(z, t) = \text{Re}[a E_0 e^{i(kz - \omega t)}] \hat{x}$$

- (a) Reiknið meðalafl á flatareiningu í hvorri bylgju um sig.
 (b) Reiknið meðalafl á flatareiningu í bylgjunni sem er lýst með:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_{(1)}(z, t) + \vec{E}_{(2)}(z, t).$$

- (c) Hvaða skilyrði þarf fastinn $a \in \mathbb{C}$ að uppfylla til að meðalaflíð í (b)-lið sé jafnt summu meðalaflsins fyrir bylgjurnar tvær í (a)-lið?

Lausn: (a) Til þess að reikna meðalafl á flatareiningu þá þurfum við að meta:

$$I = |\langle \vec{S} \rangle| = |\langle \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \rangle|$$

Athugum fyrst að rita má:

$$\vec{E}_{(1)}(z, t) = |E_0| \cos(kz - \omega t + \phi_1) \hat{x}, \quad \vec{E}_{(2)}(z, t) = |E_0| |a| \cos(kz - \omega t + \phi_2) \hat{x}.$$

þar sem að ϕ_1 samsvarar fasahorni tvinntölunnar E_0 og ϕ_2 samsvarar fasahorni tvinntölunnar aE_0 . Við skulum því byrja á því að sýna hvernig ákvarða má segulsviðið $\vec{B}(z, t)$ ef að við þekkjum rafsviðið $\vec{E}(z, t)$. Samkvæmt Maxwells-jöfnunum er:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

En við athugum að fyrir $\vec{E}(z, t) = \vec{E}_{(2)}(z, t)$ fæst þá að:

$$\nabla \times \vec{E}_{(2)} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \vec{E}_{(2),x} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -k|E_0||a| \sin(kz - \omega t + \phi_2) \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}_{(2)}}{\partial t}$$

En þar með sjáum við eftir að við tegrum með tilliti til tíma t að

$$\vec{B}_{(2)}(z, t) = \frac{k}{\omega} |E_0| |a| \cos(kz - \omega t + \phi_2) \hat{y} = \frac{1}{c} |E_0| |a| \cos(kz - \omega t + \phi_2) \hat{y}.$$

Almennt sjáum við með þessari aðferð að fyrir skautunarvigur $\hat{n}$ fæst:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = |E_0| \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi) \hat{n} \quad \text{gefur að} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} |E_0| \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi) \hat{k} \times \hat{n}.$$

En þar með höfum við sýnt að:

$$\vec{S}_{(2)} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}_{(2)} \times \vec{B}_{(2)} = \frac{1}{\mu_0 c} |E_0|^2 |a|^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi) \hat{z}$$

Við ályktum því að:

$$\begin{aligned}\langle \vec{S} \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}_{(2)} dt = \frac{|E_0|^2 |a|^2}{\mu_0 c} \hat{z} \int_0^T \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi) dt \\ &= \frac{|E_0|^2 |a|^2}{2\mu_0 c} \hat{z} \int_0^T \left(1 + \cos(2\vec{k} \cdot \vec{r} - 2\omega t + 2\phi)\right) dt \\ &= \frac{|E_0|^2 |a|^2}{2\mu_0 c} \hat{z}\end{aligned}$$

þar sem að við notuðum að $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ og að þegar að við tegrum hornaföll yfir heilt margfeldi af lotu þess þá fæst núll. En þar með höfum við sýnt að:

$$I_1 = \frac{1}{2\mu_0 c} |E_0|^2, \quad I_2 = \frac{1}{2\mu_0 c} |a|^2 |E_0|^2, \quad I_{12} = \frac{1}{2\mu_0 c} |E_0|^2 |1 + a|^2$$

þar sem að í síðasta jafnaðarmerkinu nýttum við okkur að $\text{Re}[z] + \text{Re}[w] = \text{Re}[z + w]$. Til þess að $I_{12} = I_1 + I_2$ þá þarf:

$$|1 + a|^2 = 1 + |a|^2$$

En ef $a = \alpha + i\beta$ er tvinntala þá fæst annarsvegar að:

$$1 + |a|^2 = 1 + \alpha^2 + \beta^2,$$

en hinsvegar að

$$|1 + a|^2 = |1 + \alpha + i\beta|^2 = (1 + \alpha)^2 + \beta^2 = 1 + \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha$$

svo við ályktum að þá þarf $\alpha = 0$ en þá hefur $a = i\beta$ einungis þverhluta en engan raunhluta.

Dæmi 20. Flöt rafsegulbylgja lendir undir innfallshorni θ_I á sléttum skilfleti í $z = 0$ milli tveggja einsleitra efna með $\epsilon = \epsilon_1$, $\mu = \mu_1$ ef $z < 0$ og $\epsilon = \epsilon_2$, $\mu = \mu_2$ ef $z > 0$. Rafsviði innfallsbylgjunnar er lýst með:

$$\vec{E}_I(\vec{r}, t) = \text{Re}[E_{0,I} e^{i(\vec{k}_I \cdot \vec{r} - \omega t)}] \hat{y}$$

með $\vec{k}_I = k_I (\sin \theta_I \hat{x} + \cos \theta_I \hat{z})$ þannig að bylgjan er línuskautuð þvert á innfallsplanið.

- (a) Ákvarðið segulsvið innfallsbylgjunnar.
- (b) Ákvarðið ölduvigrana $\vec{k}_R$ og $\vec{k}_T$ fyrir endurkastbylgjuna og gegnstreymisbylgjuna.
- (c) Notið jaðarskilyrði fyrir rafsegulsviðið í $z = 0$ til að leiða út Fresneljöfnurnar fyrir línuskautun þvert á innfallsplanið:

$$E_{0,R} = \left(\frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \right) E_{0,I}, \quad E_{0,T} = \left(\frac{2}{1 + \alpha\beta} \right) E_{0,I}$$

þar sem

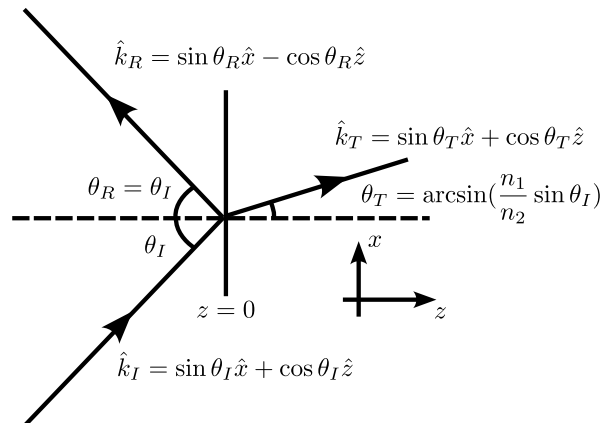
$$\alpha = \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I}, \quad \beta = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}.$$

Lausn: Hér er skautunarvigurinn $\hat{n} = \hat{y}$ og með sömu aðferð og í dæminu á undan má ákvarða segulsviðið með því að reikna:

$$\vec{k}_I \times \hat{n} = (\sin \theta_I \hat{x} + \cos \theta_I \hat{z}) \times \hat{y} = \sin \theta_I \hat{z} - \cos \theta_I \hat{x}.$$

$$B_I(\vec{r}, t) = \frac{1}{v_1} \text{Re}[E_{0,I} e^{i(\vec{k}_I \cdot \vec{r} - \omega t)}] \hat{k}_I \times \hat{n} = \frac{1}{v_1} \text{Re}[E_{0,I} e^{i(\vec{k}_I \cdot \vec{r} - \omega t)}] (\sin \theta_I \hat{z} - \cos \theta_I \hat{x}).$$

Af meðfylgjandi mynd má ákvarða ölduvigrana $\vec{k}_R$ og $\vec{k}_T$ og út frá þeim athugum við að:



$$\hat{k}_R \times \hat{n} = (\sin \theta_R \hat{x} - \cos \theta_R \hat{z}) \times \hat{y} = \sin \theta_I \hat{z} + \cos \theta_I \hat{x},$$

þar sem að við notuðum í síðasta jafnaðarmerkinu að $\theta_I = \theta_R$. Höfum einnig að:

$$\hat{k}_T \times \hat{n} = (\sin \theta_T \hat{x} + \cos \theta_T \hat{z}) \times \hat{y} = \sin \theta_T \hat{z} - \cos \theta_T \hat{x}$$

en af þessu leiðir því að:

$$\vec{E}_R(\vec{r}, t) = \text{Re}[E_{0,R} e^{i(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t)}] \hat{y}, \quad \vec{B}_R(\vec{r}, t) = \frac{1}{v_1} \text{Re}[E_{0,R} e^{i(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t)}] (\sin \theta_I \hat{z} + \cos \theta_I \hat{x}),$$

og

$$\vec{E}_T(\vec{r}, t) = \text{Re}[E_{0,T} e^{i(\vec{k}_T \cdot \vec{r} - \omega t)}] \hat{y}, \quad \vec{B}_T(\vec{r}, t) = \frac{1}{v_2} \text{Re}[E_{0,T} e^{i(\vec{k}_T \cdot \vec{r} - \omega t)}] (\sin \theta_T \hat{z} - \cos \theta_T \hat{x}),$$

notum síðan jaðarskilyrðin $\vec{E}_1^\parallel = \vec{E}_2^\parallel$ og $\frac{1}{\mu_1} \vec{B}_1^\parallel = \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_2^\parallel$ í $z = 0$ til þess að fá að annars vegar

$$E_{0,I} + E_{0,R} = E_{0,T}$$

og hinsvegar að:

$$\frac{1}{\mu_1} \left(\frac{-\cos \theta_I}{v_1} E_{0,I} + \frac{\cos \theta_I}{v_1} E_{0,R} \right) = \frac{1}{\mu_2 v_2} \cos \theta_T E_{0,T}$$

seinni jöfnuna má umrita á formið:

$$E_{0,I} - E_{0,R} = \frac{\mu_1 v_1 \cos \theta_T}{\mu_2 v_2 \cos \theta_I} E_{0,T} = \alpha \beta E_{0,T}.$$

En þetta er línulegt jöfnuhneppi fyrir hlutföllunum $E_{0,T}/E_{0,I}$ og $E_{0,R}/E_{0,I}$ sem hefur lausn:

$$\frac{E_{0,T}}{E_{0,I}} = \frac{2}{\alpha + \beta}, \quad \frac{E_{0,R}}{E_{0,I}} = \frac{1 - \alpha \beta}{1 + \alpha \beta}.$$

sem var það sem sýna átti.

Ítarefni: Til gamans getum við einnig reiknað endurkaststuðulinn R og gegnstreymisstuðulinn T en þeir eru gefnir með:

$$R = \frac{I_R}{I_I} = \frac{\frac{1}{2\mu_1 v_1} E_{0,R}^2}{\frac{1}{2\mu_1 v_1} E_{0,I}^2} = \left(\frac{1 - \alpha \beta}{1 + \alpha \beta} \right)^2,$$

$$T = \frac{I_T}{I_I} = \frac{\frac{1}{2\mu_2 v_2} E_{0,T}^2 \cos \theta_T}{\frac{1}{2\mu_1 v_1} E_{0,I}^2 \cos \theta_I} = \alpha \beta \left(\frac{2}{1 + \alpha \beta} \right)^2.$$

En af þessu leiðir því að:

$$R + T = \left(\frac{1 - \alpha \beta}{1 + \alpha \beta} \right)^2 + \alpha \beta \left(\frac{2}{1 + \alpha \beta} \right)^2 = \frac{1 - 2\alpha \beta + \alpha^2 \beta^2 + 4\alpha \beta}{(1 + \alpha \beta)^2} = \left(\frac{1 + \alpha \beta}{1 + \alpha \beta} \right)^2 = 1.$$

Brewster-hornið verður síðan þegar að það er ekkert endurkast og $R = 0$ þ.e. $\alpha \beta = 1$. En það gerist einmitt þegar:

$$\theta_{\text{Brewster}} = \arcsin \left(\sqrt{\frac{\mu_1^2 n_2^2 - \mu_2^2 n_1^2}{n_1^2 (\mu_1^2 - \mu_2^2)}} \right).$$

Takið eftir að í sértilvikinu þegar $\mu_1 = \mu_2$ þá sést að Brewster-hornið er óskilgreint ef skautunarvigurinn liggur þvert á innfallsplaninu. Þessi niðurstaða gildir ekki ef skautunarvigurinn liggur samsíða innfallsplaninu þá er $\theta_B = \arctan \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$.

11 Heimadæmi 21. mars

Dæmi 21. Flöt rafsegulbylgja með 40 MHz tíðni og $12,5 \text{ W/m}^2$ styrk lendir lóðrétt á yfirborði sjávar.

- (a) Hvert er útslagið $E_{0,I}$ í innbylgjunni?
 - (b) Ákvarðið rafsviðið í endurkastbylgjunni og í bylgjunni í sjónum undir yfirborðinu.
 - (c) Reiknið styrk endurkastbylgjunnar.
- Gera má ráð fyrir eftirfarandi eiginleikum saltvatns: $\epsilon = 72\epsilon_0$, $\mu = \mu_0$ og $\sigma = 4,0 \frac{1}{\Omega \text{ m}}$.

Lausn: (a) Við athugum fyrst að:

$$I_0 = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_{0,I}^2 \implies E_{0,I} = \sqrt{\frac{2I_0}{\epsilon_0 c}} = 97,0 \text{ V/m}.$$

(b) Innbylgjan stefnir þá í $\vec{k}_I = k_I \hat{z}$ þar sem $k_I = \frac{\omega}{c} = 0,83 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$. Þá verður endurkastbylgjan í stefnu $\vec{k}_R = k_R \hat{z}$ þar sem $k_R = -k_I$ en gegnstreymisbylgjan með $\vec{k}_T = k_T \hat{z}$. Rafsviðið þarf að vera hornrétt á útbreiðsluna svo það er eðlilegt að velja skautunarvigur rafsviðsins $\hat{n}_I = \hat{x}$. Þar með er

$$\begin{aligned} \tilde{E}_I(z, t) &= \tilde{E}_{0,I} e^{i(k_I z - \omega t)} \hat{x}, & \tilde{B}_I(z, t) &= \frac{k_I}{\omega} \tilde{E}_{0,I} e^{i(k_I z - \omega t)} \hat{y}. \\ \tilde{E}_R(z, t) &= \tilde{E}_{0,R} e^{i(k_R z - \omega t)} \hat{x}, & \tilde{B}_R(z, t) &= \frac{k_R}{\omega} \tilde{E}_{0,R} e^{i(k_R z - \omega t)} \hat{y} \\ \tilde{E}_T(z, t) &= \tilde{E}_{0,T} e^{i(\tilde{k}_T z - \omega t)} \hat{x}, & \tilde{B}(z, t) &= \frac{\tilde{k}_T}{\omega} \tilde{E}_{0,T} e^{i(\tilde{k}_T z - \omega t)} \hat{y} \end{aligned}$$

Fresnel jöfnurnar fyrir þessa uppstillingu eru gefnar með:

$$\tilde{E}_{0,R} = \left(\frac{1 - \tilde{\beta}}{1 + \tilde{\beta}} \right) \tilde{E}_{0,I}, \quad \tilde{E}_{0,T} = \left(\frac{2}{1 + \tilde{\beta}} \right) \tilde{E}_{0,I}$$

þar sem

$$\tilde{\beta} = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 \omega} \tilde{k}_T = \frac{c}{\omega} (k_T + i\kappa_T)$$

og

$$k_T = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2} \right)}, \quad \kappa_T = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2} \right)}$$

Við athugum að fyrir þessa uppstillingu er $\sigma_{\text{saltvatn}} = 4,0 \frac{1}{\Omega \text{ m}}$, $\epsilon_{\text{saltvatn}} = 72\epsilon_0$ og $\mu_{\text{saltvatn}} = \mu_0$ þar að auki sem $\omega = 2\pi f = 251 \text{ MHz}$ þannig að við fáum að:

$$k_T = 25,6 \frac{\text{rad}}{\text{m}}, \quad \kappa_T = 24,6 \frac{\text{rad}}{\text{m}}, \quad \text{sem gefur} \quad \beta = \frac{c}{\omega} (k_T + i\kappa_T) = 30,6 + 29,4i.$$

Því höfum við að:

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{0,R} &= \left(\frac{1-\tilde{\beta}}{1+\tilde{\beta}} \right) E_{0,I} = -93,7 - 3,1i \frac{\text{V}}{\text{m}} = 93,8e^{-3,1i} \frac{\text{V}}{\text{m}}, \\ \tilde{E}_{0,T} &= \left(\frac{2}{1+\tilde{\beta}} \right) E_{0,I} = 3,3 - 3,1i \frac{\text{V}}{\text{m}} = 4,5e^{-0,75i} \frac{\text{V}}{\text{m}}.\end{aligned}$$

(c) Við ályktum því að styrkur bylgjunnar er gefinn með:

$$R = \frac{I_R}{I_I} \implies I_R = RI_I = \left| \frac{1-\tilde{\beta}}{1+\tilde{\beta}} \right|^2 I_0 = 0,934I_0 = 11,7 \text{ W/m}^2.$$

Dæmi 21. Rétthyrndur bylgjuleiðari með leiðandi veggjum hefur $4 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$ þversnið. Inni í bylgjuleiðaranum er loft.

- (a) (i) Hverjar eru þrjár lægstu þröskuldstíðnir fyrir rafsegulbylgjur í bylgjuleiðaranum? Um hvaða sveifluhætti er að ræða?
- (ii) Hver er grúpuhraði ráðandi sveifluháttar við þröskuldstíðni næsta sveifluháttar?
- (b) Ákvarðið yfirborðshleðsluþéttleikann sem fall af staðsetningu og tíma innan á veggjum bylgjuleiðarans í ráðandi sveifluhætti.

Lausn: (ai) Þröskuldstíðnirnar fyrir TE og TM sveifluhætti í bylgjuleiðaranum eru

$$f_{mn} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2}$$

Við fáum því eftirfarandi töflu fyrir fyrstu gildin á (m, n) svo við ályktum að lægstu þrjár

(m, n)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 1)	(2, 0)	(0, 2)
$f_{mn}[\text{GHz}]$	3,75	5,0	6,25	7,5	10

tíðnirnar eru $f_{10} = 3,75 \text{ GHz}$, $f_{0,1} = 5,0 \text{ GHz}$ og $f_{11} = 6,25 \text{ GHz}$. Fyrri tvær tíðnirnar geta einungis verið TE sveifluhættir en f_{11} getur verið bæði TE eða TM sveifluháttur.

(aii) Grúpuhraðinn er þá gefinn með:

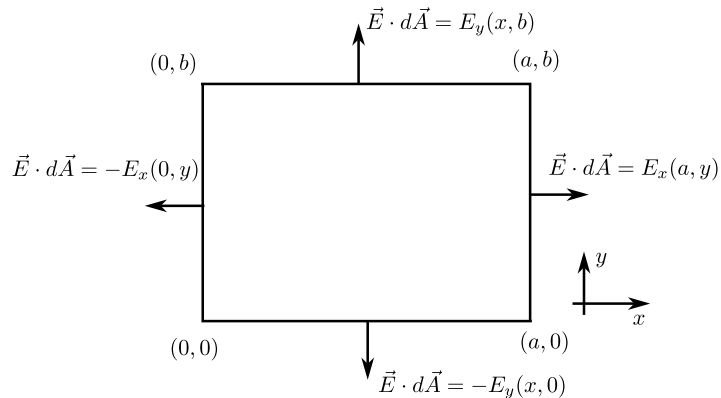
$$v_g = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{mn}}{\omega} \right)^2} = c \sqrt{1 - \left(\frac{f_{mn}}{f} \right)^2} = 0,66c.$$

(b) Fyrir $(m, n) = (1, 0)$ þá höfum við TE sveifluhátt og lausnin er gefin með:

$$E_z = 0, \quad B_z(x, y) = B_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = B_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right).$$

En þetta tvennt ákvarðar hin gildin á rafsviðinu þannig að:

$$\begin{aligned}E_x &= \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(k \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) = 0, \\ E_y &= \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(k \frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) = \frac{i\omega}{\pi^2/a^2} B_0 \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) = \frac{i\omega a B_0}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\end{aligned}$$



þar sem við notuðum að $(\omega/c)^2 - k^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = \frac{\pi^2}{a^2}$ því $(m, n) = (1, 0)$ hér.

Lítum síðan á eftirfarandi mynd:

En þar með sjáum við að samkvæmt lögmáli Gauss má reikna hleðsluþéttleikann á hverri hlið samkvæmt:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{\text{inni}}}{\epsilon_0} \implies E_y(x, b) dx dz = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(x, b) dx dz$$

svo við ályktum að:

$$\sigma(x, b) = \frac{i\omega a \epsilon_0 B_0}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

Með sömu aðferð sést að:

$$\sigma(0, y) = 0, \quad \sigma(a, y) = 0, \quad \sigma(x, 0) = -\frac{i\omega a \epsilon_0 B_0}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right).$$

Tímahæðid ákvarðast því af því að:

$$\sigma(x, b, z, t) = \text{Re}[\sigma(x, b)e^{i(kz - \omega t)}] = -\frac{\omega a \epsilon_0 B_0}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(kz - \omega t),$$

þar sem $k = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_{10}^2}$. Eins fæst að $\sigma(x, 0, z, t) = \frac{\omega a \epsilon_0 B_0}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(kz - \omega t)$.

12 Heimadæmi 4. apríl

Dæmi 23. Rafsvari með rafsvörunarstuðul $\epsilon_1 > \epsilon_0$ og segulsvörunarstuðul μ_0 fyllir $z < 0$ hálfrúmið en í $z > 0$ hálfrúminu er tóm. Flöt rafsegulbylgja inni í rafsvaranum lendir á $z = 0$ yfirborðinu undir innfallshorni θ .

- (a) Færið rök fyrir því að flöt gegnstreymisbylgja út í tómið í $z > 0$ sé því aðeins fyrir hendi að innfallshornið uppfylli $\theta < \arcsin(\sqrt{\epsilon_0/\epsilon_1})$. Fyrir stærri innfallshorn en þetta fæst fullkomið innra endurkast í rafsvaranum en það er slík hegðun sem gerir ljósleiðara mögulega.
- (b) Við fullkomið innra endurkast með $\theta > \arcsin(\sqrt{\epsilon_0/\epsilon_1})$ er rafsviðið reyndar ekki núll í tominu utan við rafsvarann í $z > 0$ heldur er þar bylgja á forminu:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 e^{-\kappa z} \cos(kx - \omega t) \hat{y}, \quad \text{með } \kappa = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} \sin^2 \theta - 1}, \quad \text{og } k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}} \sin \theta.$$

Þetta er svonefnd hverful bylgja sem berst samsíða yfirborði rafsvarans og hefur útslag sem fellur með fjarlægð frá yfirborðinu. Finnið tilsvareandi segulsvið þannig að Maxwelljöfnurnar séu uppfylltar fyrir $z > 0$.

- (c) Ákvarðið Poyntingvigurinn á svæðinu $z > 0$ og sýnið að meðalafi á flatareiningu sem hverfula bylgjan ber í z -stefnuna sé núll.

Lausn: (a) Þá gildir að:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 = \sin \theta_2 \quad (12.1)$$

því $n_2 = 1$ því fyrir utan er tóm. En $\sin \theta_2 \leq 1$ til þess að það sé gegnstreymi svo við ályktum að:

$$n_1 \sin \theta_1 \leq 1 \implies \theta_1 \leq \arcsin\left(\frac{1}{n_1}\right) = \arcsin\left(\frac{v_1}{c}\right) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0}{\mu_1 \epsilon_1}}\right) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}}\right).$$

Sem gefur niðurstöðuna.

- (b) Skoðum hverfulu bylgjuna og athugum að Maxwelljafnan $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ gefur nú að:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_z E_y \hat{x} + \partial_x E_y \hat{z} = \kappa E_0 e^{-\kappa z} \cos(kx - \omega t) \hat{x} - k E_0 e^{-\kappa z} \sin(kx - \omega t) \hat{z}. \quad (12.2)$$

En þá fæst að:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = - \int \vec{\nabla} \times \vec{E} dt = \frac{E_0}{\omega} e^{-\kappa z} (\kappa \sin(kx - \omega t) \hat{x} + k \cos(kx - \omega t) \hat{z}) \quad (12.3)$$

- (c) Þá er Poynting-vigurinn gefinn með:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{E_0^2}{\mu_0 \omega} e^{-2\kappa z} (k \cos^2(kx - \omega t) \hat{x} - \kappa \cos(kx - \omega t) \sin(kx - \omega t) \hat{z}). \quad (12.4)$$

En það gefur því að meðalafið á flatareiningu er gefið með:

$$\langle S_z \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \left(-\frac{1}{\mu_0} \frac{E_0^2}{\omega} e^{-2\kappa z} \frac{\kappa}{2} \sin(2kx - 2\omega t) \right) = 0, \quad (12.5)$$

$$\langle S_x \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \frac{E_0^2}{\omega} e^{-2\kappa z} k. \quad (12.6)$$

- Dæmi 24.** (a) Sýnið að alltaf sé hægt að velja svonefnda Poincarékvörðun, þar sem $\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = 0$.
 (b) Er alltaf hægt að velja kvörðun þ.a. $V(\vec{r}, t) = 0$? Röstkstyðjið.
 (c) Er alltaf hægt að velja kvörðun þ.a. $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{0}$? Röstkstyðjið.

Lausn: (a) Viljum sýna að almennt megi finna $\lambda(\vec{r}, t)$ þannig að:

$$0 = \vec{r} \cdot \vec{A}' = \vec{r} \cdot (\vec{A} + \vec{\nabla}\lambda) \quad (12.7)$$

Í kúluhnitum er $\vec{A} = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi}$ og $\vec{\nabla}\lambda = \frac{\partial\lambda}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\lambda}{\partial\theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\lambda}{\partial\phi} \hat{\phi}$ þ.a.

$$r \hat{r} \cdot \left(A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi} + \frac{\partial\lambda}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\lambda}{\partial\theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\lambda}{\partial\phi} \hat{\phi} \right) = r \left(A_r + \frac{\partial\lambda}{\partial r} \right) = 0. \quad (12.8)$$

En þar með ályktum við að með því að velja:

$$\lambda = - \int A_r dr, \quad (12.9)$$

þá er Poincaré-kvarðaskilyrðið uppfyllt.

(b) Látum $V(\vec{r}, t)$ vera gefið mætti. Þá með því að velja:

$$\lambda(\vec{r}, t) = \int_0^t V(\vec{r}, \tilde{t}) d\tilde{t}, \quad (12.10)$$

þá fæst samkvæmt undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar að

$$V'(\vec{r}, t) = V(\vec{r}, t) - \frac{\partial\lambda}{\partial t} = V(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^t V(\vec{r}, \tilde{t}) d\tilde{t} \right) = V(\vec{r}, t) - V(\vec{r}, t) = 0. \quad (12.11)$$

Því má alltaf finna slíkan kvarða.

(c) Gerum ráð fyrir að slíkur kvarði sé til þ.a. til sé $\lambda(\vec{r}, t)$ þannig að $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda = \vec{0}$ fyrir gefið $\vec{A}(\vec{r}, t)$. En það gæfi þá að $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{0} = \vec{0}$. En þetta er mótsögn því þá væri $\vec{B} = \vec{0}$ alltaf.

13 Heimadæmi 11. apríl

Dæmi 25. Punktrafhleðsla q hreyfist með föstum hornhraða ω eftir hring með geisla R í xy -plani og miðju í upphafspunktinum. Á tímanum $t = 0$ er hleðslan í punktinum $(R, 0, 0)$.

- (a) Ákvarðið Liénard-Wiechert mættin í punktinum $(0, 0, z)$.
- (b) Ákvarðið rafsviðið og segulsviðið í upphafspunktinum sem fall af tíma.
- (c) Finnið heildarafl rafsegulgeislunarinnar sem berst frá punkthleðslunni ef $\omega R \ll c$.

Lausn: (a) Almennt eru Liénard-Wiechert mættin gefin með:

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{(r - c - \vec{r} \cdot \vec{v})}, \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{v}}{c^2} V(\vec{r}, t). \quad (13.1)$$

Við byrjum á því að athuga að í $\vec{r} = (0, 0, z)$ þá fæst:

$$\vec{r} = \vec{r} - \vec{w}(t_r) = \begin{pmatrix} -R \cos(\omega t_r) \\ -R \sin(\omega t_r) \\ z \end{pmatrix}. \quad (13.2)$$

Sem gefur því að $r = |\vec{r}| = \sqrt{R^2 + z^2}$ þar að auki sem

$$\vec{v} = \dot{\vec{w}}(t_r) = \begin{pmatrix} -\omega R \sin(\omega t_r) \\ \omega R \cos(\omega t_r) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \ddot{\vec{w}}(t_r) = \begin{pmatrix} -\omega^2 R \cos(\omega t_r) \\ -\omega^2 R \sin(\omega t_r) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13.3)$$

Við athugum að:

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = \omega R^2 \sin(\omega t_r) \cos(\omega t_r) - \omega R^2 \sin(\omega t_r) \cos(\omega t_r) = 0. \quad (13.4)$$

En þetta gefur því að:

$$V(0, 0, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{R^2 + z^2}}, \quad \vec{A}(0, 0, z, t) = \frac{\mu_0 q \omega R}{4\pi\sqrt{R^2 + z^2}} \begin{pmatrix} -\sin(\omega t_r) \\ \cos(\omega t_r) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13.5)$$

Athugum einnig að hér er $r = c(t - t_r)$ þannig að $t_r = t - \frac{1}{c}\sqrt{R^2 + z^2}$.

(b) Við höfðum sýnt að

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{(\vec{r} \cdot \vec{u})^3} \left[(c^2 - v^2) \vec{u} + \vec{r} \times (\vec{u} \times \vec{a}) \right], \quad \vec{u} = c\hat{r} - \vec{v}. \quad (13.6)$$

Við getum sér í lagi sett $z = 0$ í útleiðslunni frá því áðan þannig að:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -R \cos(\omega t_r) \\ -R \sin(\omega t_r) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = c\hat{r} - \vec{v} = \begin{pmatrix} \omega R \sin(\omega t_r) - c \cos(\omega t_r) \\ -\omega R \cos(\omega t_r) - c \sin(\omega t_r) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13.7)$$

Við athugum þá að:

$$\vec{r} \cdot \vec{u} = cR. \quad (13.8)$$

síðan er

$$\vec{u} \times \vec{a} = -R^2\omega^3\hat{z} \quad (13.9)$$

og þar með

$$\vec{r} \times \vec{u} \times \vec{a} = \omega^3 R^3 (\sin(\omega t_r)\hat{x} - \cos(\omega t_r)\hat{y}) \quad (13.10)$$

þar með ályktum við að:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{0}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(Rc)^3} \left[(c^2 - \omega^2 R^2) \begin{pmatrix} R\omega \sin(\omega t_r) - c \cos(\omega t_r) \\ -R\omega \cos(\omega t_r) - c \sin(\omega t_r) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega^3 R^3 \sin(\omega t_r) \\ -\omega^3 R^3 \cos(\omega t_r) \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \begin{pmatrix} -\cos(\omega t_r) + \frac{\omega R}{c} \sin(\omega t_r) + \left(\frac{\omega R}{c}\right)^2 \cos(\omega t_r) \\ -\sin(\omega t_r) - \frac{\omega R}{c} \cos(\omega t_r) + \left(\frac{\omega R}{c}\right)^2 \sin(\omega t_r) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Segulsviðið er síðan gefið með:

$$\vec{B}(\vec{0}, t) = \frac{1}{c} \hat{z} \times \vec{E}(\vec{0}, t) = \frac{\mu_0 q \omega}{4\pi R} \hat{z}. \quad (13.11)$$

(c) Nú hefur ögnin miðsóknarhröðun $a_{\text{mið}} = \omega^2 R$ þannig að Larmor-formúlan gefur að heildarafl geislunarinnar er gefin með:

$$P_{\text{Larmor}} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c} = \frac{\mu_0 q^2 \omega^4 R^2}{6\pi c}. \quad (13.12)$$

Dæmi 26. Tvær agnir með gagnstæðar rafhleðslur $\pm Q$ hreyfast eftir x -ásnum á hraða v á móti hvor annarri. Þær mætast í upphafspunktinum klukkan $t = 0$ og mynda óhlaðna samsetta ögn. Finnið seinkuðu mættin $V(\vec{r}, t)$ og $\vec{A}(\vec{r}, t)$.

Lausn: Skoðum fyrst aðra hleðsluna sem hefur hleðslu $+q$ og stefnir frá vinstri til hægri. Staðsetning hennar er $\vec{w}(t) = \vec{v}t = (+vt, 0, 0)$. Skilyrðið $z = |\vec{z}| = |\vec{r} - \vec{w}(t_r)| = c(t - t_r)$ gefur því

$$\sqrt{(x - vt_r)^2 + y^2 + z^2} = c(t - t_r) \implies (c^2 - v^2)t_r^2 - 2(c^2t - vx)t_r + c^2t^2 - r^2 = 0 \quad (13.13)$$

sem er 2. stigs margliða fyrir seinkaða tímanum t_r sem hefur lausn:

$$t_r = \frac{(c^2t - vx) \pm \sqrt{(c^2t - vx)^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)}}{c^2 - v^2}, \quad (13.14)$$

þar sem að við skilgreindum $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Við veljum neikvæða formerkið en það gefur okkur að rita megi seinkaða Liénard–Wiechert mættið fyrir ögnina sem:

$$V_1(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{c^2 - \vec{z} \cdot \vec{v}} = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2(t - t_r) - v(x - vt_r)} = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(c^2t - vx)^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)}}.$$

þar sem að í síðasta jafnaðarmerkinu notuðum við seinkaða tímann t_r í jöfnu (13.14). Þetta gefur því að seinkaða vigurmættið fyrir ögnina er gefið með:

$$\vec{A}_1(\vec{r}, t) = \frac{\vec{v}_1}{c^2} V_1(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi c\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(c^2t - vx)^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)}} \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13.15)$$

Með sama hætti má ákvarða seinkaða Liénard–Wiechert mættið fyrir ögn sem hefur hleðslu $-q$ og ferðast í neikvæða stefnu x -ás. Það gefur því að $q \rightarrow -q$ og $v \rightarrow -v$ þannig að:

$$V_2(\vec{r}, t) = -\frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(c^2t + vx)^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)}}, \quad (13.16)$$

$$\vec{A}_2(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi c\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(c^2t + vx)^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)}} \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13.17)$$

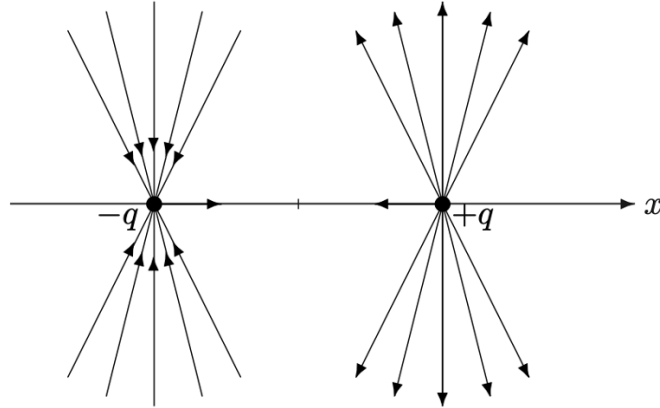
Samanlögð vigurmættin fyrir $t \leq 0$ eru því gefin með:

$$V(\vec{r}, t) = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(c^2t - vx)^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)}} - \frac{1}{\sqrt{(c^2t + vx)^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)}} \right),$$

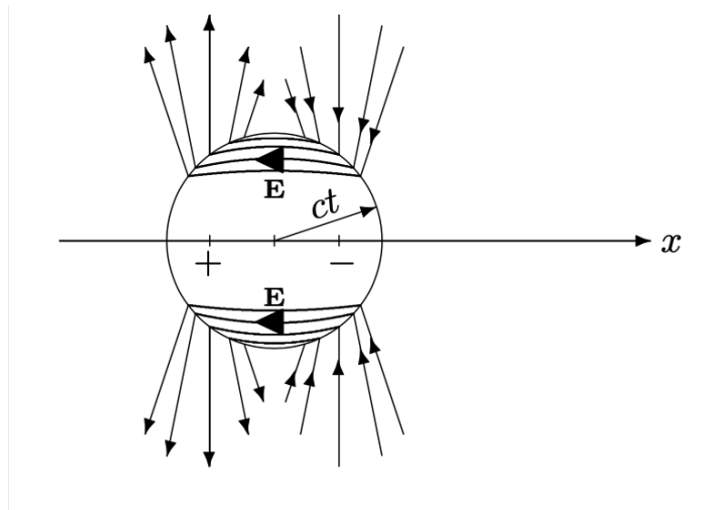
$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{qv}{4\pi c\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(c^2t - vx)^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)}} + \frac{1}{\sqrt{(c^2t + vx)^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)}} \right) \hat{x}.$$

Fyrir $t > 0$ þá er hinsvegar $V = 0$ og $\vec{A} = 0$ fyrir alla þá punkta þar sem að ljósboðin hafa náð að berast. Það er að segja fyrir alla punkta þannig að $r < ct$ þá eru bæði mættin núll en fyrir alla punkta þar fyrir utan gildir enn ofangreind niðurstaða.

Auka: Það er fróðlegt að sjá þetta myndrænt eins og Griffiths útskýrir þetta. Áður en að þær rekast saman má reikna rafsviðið frá hleðslunum samkvæmt útleiðslu Heaviside þannig að teikna megi sviðslínurnar með eftirfarandi hætti frá núverandi staðsetningu agnanna Það



tekur síðan tíma fyrir upplýsingarnar að berast um það að agnirnar hafi mæst í upphafspunktinum og myndað óhlaðna samsetta ögn. Myndrænt má sýnta þetta með eftirfarandi hætti: Upplýsingarnar berast um kúlu með geisla $r = ct$ þannig að innan í kúlunni er heildarrafsviðið



(og segulsviðið) núll. Hinsvegar fyrir utan kúluna er sviðið gefið með þeirri lýsingu sem það hefði haft eins og ef að hleðslurnar hefðu „farið í gegnum hvor aðra“.