

Heimadæmi 1: 22. ágúst

Dæmi 2.4.7. Gauss-heildið

Látum A vera samhverft ferningsfylki sem uppfyllir fyrir sérhvern eiginlegan vigur $|\psi\rangle \neq 0$ að væntigildið sé jákvæð rauntala, $\langle\psi|A|\psi\rangle > 0$. Sýnið að þá gildi að

$$I(b) = \int \prod_{n=1}^N dx_n e^{-\frac{1}{2} \sum_{k,l} x_k A_{kl} x_l + \sum_k b_k x_k} = \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det(A)}} e^{\frac{1}{2} \sum_{k,l} b_k A_{kl}^{-1} b_l}.$$

Lausn: Fylgjum ráði Bellac og notum breytuskiptin $x' = x - A^{-1}b$. Það gefur þá að

$$x_n = x'_n + \sum_j A_{nj}^{-1} b_j, \quad \text{þ.e.} \quad |x\rangle = |x'\rangle + A^{-1} |b\rangle.$$

En þá höfum við að
$$\langle b|x\rangle = \sum_k b_k x_k = \sum_k b_k x'_k + b_k \sum_{k,j} A_{kj}^{-1} b_j = \langle b|x'\rangle + \langle b|A^{-1}|b\rangle.$$

Eins fáum við að

$$\begin{aligned} \langle x|A|x\rangle &= \sum_{k,l} x_k A_{kl} x_l = \sum_{k,l,i,j} (x'_k + A_{ki}^{-1} b_i) A_{kl} (x'_l + A_{lj}^{-1} b_j) \\ &= \sum_{k,l} x'_k A_{kl} x'_l + \sum_{k,l,j} x'_k A_{kl} A_{lj}^{-1} b_j + \sum_{k,l,i} A_{ki}^{-1} b_i A_{kl} x'_l + \sum_{k,l,i,j} A_{ki}^{-1} b_i A_{kl} A_{lj}^{-1} b_j \\ &= \sum_{k,l} x'_k A_{kl} x'_l + \sum_{k,j} x'_k \delta_{kj} b_j + \sum_{l,i} b_i \delta_{li} x'_l + \sum_{l,i,j} b_i \delta_{il} A_{lj}^{-1} b_j \\ &= \langle x'|A|x'\rangle + 2 \langle b|x'\rangle + \langle b|A^{-1}|b\rangle, \end{aligned}$$

þar sem að við notuðum að A er samhverft þ.a. $A_{kl} = A_{lk}$ og að einingarfylkið megi rita sem

$$\delta_{nm} = \sum_l A_{nl} A_{lm}^{-1}$$

En þetta sýnir því að í veldisvísifallinu stendur

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \sum_{k,l} x_k A_{kl} x_l + \sum_k b_k x_k &= -\frac{1}{2} (\langle x'|A|x'\rangle + 2 \langle b|x'\rangle + \langle b|A^{-1}|b\rangle) + \langle b|x'\rangle + \langle b|A^{-1}|b\rangle \\ &= -\frac{1}{2} \langle x'|A|x'\rangle + \frac{1}{2} \langle b|A^{-1}|b\rangle. \end{aligned}$$

En þar með þurfum við að reikna heildið

$$I(b) = e^{\frac{1}{2} \langle b|A^{-1}|b\rangle} \int \prod_{n=1}^N dx'_n e^{-\frac{1}{2} \langle x'|A|x'\rangle}$$

Ritum nú A á hornalínuformi þannig að $\langle x'|A|x'\rangle = \lambda_n (x'_n)^2$ og notum að í einni vídd gildir að $\int e^{-\frac{1}{2} a x^2} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$. Notum einnig að $\det(A) = \prod_n \lambda_n$. En þá höfum við að

$$I(b) = e^{\frac{1}{2} \langle b|A^{-1}|b\rangle} \prod_{n=1}^N \int dx'_n e^{-\frac{1}{2} \lambda_n (x'_n)^2} = e^{\frac{1}{2} \langle b|A^{-1}|b\rangle} \prod_{n=1}^N \left(\frac{2\pi}{\lambda_n} \right)^{1/2} = \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det(A)}} e^{\frac{1}{2} \langle b|A^{-1}|b\rangle}.$$

Dæmi 2.4.8. Víxlar og margföld eigingildi

Látum A, B, C vera þrjú ferningsfylki af sömu vidd sem njóta

$$[A, B] = 0, \quad [A, C] = 0, \quad [B, C] \neq 0.$$

Sýnið að minnst eitt af eigingildum A sé margfalt.

Lausn: Látum a_n vera eigingildi A með tilheyrandi eiginvigur $|v_n\rangle$ þ.a. $A|v_n\rangle = a_n|v_n\rangle$. Gerum fyrst ráð fyrir að a_n séu öll ólík og sýnum að það leiði til mótsagnar (ályktum af því að minnst eitt af eigingildum A þurfi þá að vera margfalt). Þar eð A og B víxlast fæst að

$$AB|v_n\rangle = BA|v_n\rangle = Ba_n|v_n\rangle = a_nB|v_n\rangle,$$

með öðrum orðum þá er vigurinn $|u_n\rangle = B|v_n\rangle$ eiginvigur A með tilheyrandi eigingildi a_n . En þar sem að öll eigingildi A eru ólík þá eru eiginvigrar A sér í lagi línulega óháðir en það þýðir að $|u_n\rangle = B|v_n\rangle$ er samstefna $|v_n\rangle$ svo það getur mest munað fasta b_n á þeim, þ.e.a.s.

$$B|v_n\rangle = b_n|v_n\rangle,$$

svo $|v_n\rangle$ er einnig eiginvigur B með tileyrandi eigingildi b_n . Eins má segja um C að þar sem að A og C víxlast eru til c_n þannig að $C|v_n\rangle = c_n|v_n\rangle$ og $|v_n\rangle$ er einnig eiginvigur C með tilheyrandi eigingildi c_n . Þá má skrifa öll þrjú fylkin á hornalínuformi miðað við grunninn $|v_n\rangle$, þ.e.

$$A = \sum_n a_n |v_n\rangle\langle v_n|, \quad B = \sum_n b_n |v_n\rangle\langle v_n|, \quad C = \sum_n c_n |v_n\rangle\langle v_n|,$$

En þar með fáum við að

$$BC = \left(\sum_n b_n |v_n\rangle\langle v_n| \right) \left(\sum_m c_m |v_m\rangle\langle v_m| \right) = \sum_{n,m} b_n c_m |v_n\rangle\langle v_n|v_m\rangle\langle v_m| = \sum_n b_n c_n |v_n\rangle\langle v_n| = CB.$$

En það er í mótsögn við að $[B, C] \neq 0$. Þar með er a.m.k. eitt af eigingildum A margfalt. $\square$

Sýnidæmi um þessa hegðun sem kemur upp síðar í námskeiðinu: Skoðum hverfiþungafylkin

$$L_1 = L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = L_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}i} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_3 = L_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

og smíðum úr þeim virkjann

$$L^2 := L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = 2\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Þá gildir að $[L^2, L_x] = 0$ og $[L^2, L_y] = 0$ en $[L_x, L_y] = i\hbar L_z \neq 0$. Hér er þá $A = L^2$, $B = L_x$ og $C = L_y$ í setningunni að ofan og við sjáum að $A = L^2$ hefur þrefalt eigingildi $\lambda = 1$.

Heimadæmi 2: 29. ágúst

Dæmi 3.3.5. Grunnur fyrir tvívíð ferningsfylki

Skilgreinum

$$\sigma_0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Sýnið að ef $\text{Tr}(\sigma_n A) = 0$ fyrir sérhvert $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ þá sé $A = 0$.

(b) Sýnið að ef $A = \sum_{n=0}^3 \lambda_n \sigma_n$ þá sé $\lambda_n = \frac{1}{2} \text{Tr}(A \sigma_n)$.

(c) Sýnið að mengið $\{\sigma_n\}$ myndi grunn fyrir rúm 2×2 fylkja.

(d) Hvaða skilyrði þurfa λ_n að uppfylla ef A er Hermískt?

Lausn: (a) Látum $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ og fáum

$$\text{Tr}(\sigma_0 A) = \text{Tr}(A) = a + d,$$

$$\text{Tr}(\sigma_1 A) = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \right] = c + b,$$

$$\text{Tr}(\sigma_2 A) = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} -ic & -id \\ ia & ib \end{pmatrix} \right] = i(b - c),$$

$$\text{Tr}(\sigma_3 A) = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} \right] = a - d.$$

Skilyrðið að $\text{Tr}(\sigma_n A) = 0$ gefur því að $a + d = 0$ og $a - d = 0$ en þá er $a = d = 0$. Einnig höfum við að $c + b = 0$ og $b - c = 0$ sem gefur að $b = c = 0$. Því er eina lausnin $A = 0$.

(b) Nú má rita

$$A = \sum_{n=0}^3 \lambda_n \sigma_n = \begin{pmatrix} \lambda_0 + \lambda_3 & \lambda_1 - i\lambda_2 \\ \lambda_1 + i\lambda_2 & \lambda_0 - \lambda_3 \end{pmatrix}$$

En þar sem að sporið er rásað þá höfum við samkvæmt reikningunum úr (a)-lið að

$$\text{Tr}(A \sigma_0) = \text{Tr}(\sigma_0 A) = \lambda_0 + \lambda_3 + \lambda_0 - \lambda_3 = 2\lambda_0,$$

$$\text{Tr}(A \sigma_1) = \text{Tr}(\sigma_1 A) = \lambda_1 + i\lambda_2 + \lambda_1 - i\lambda_2 = 2\lambda_1,$$

$$\text{Tr}(A \sigma_2) = \text{Tr}(\sigma_2 A) = i(\lambda_1 - i\lambda_2 - \lambda_1 - i\lambda_2) = 2\lambda_2,$$

$$\text{Tr}(A \sigma_3) = \text{Tr}(\sigma_3 A) = \lambda_0 + \lambda_3 - \lambda_0 + \lambda_3 = 2\lambda_3,$$

sem gefur niðurstöðuna.

- (c) Til þess að sýna að $\{\sigma_n\}$ myndi grunn fyrir fylkjarúmið þá nægir okkur að sýna tvennt:
- (i) hægt er að skrifa sérhvert 2×2 fylki sem línulega samantekt af $\{\sigma_n\}$.
- (ii) stökin í $\{\sigma_n\}$ eru línulega óháð.

Það fyrra leiðir af því að

$$\frac{1}{2}(a+d)\sigma_0 + \frac{1}{2}(b+c)\sigma_1 + \frac{i}{2}(b-c)\sigma_2 + \frac{1}{2}(a-d)\sigma_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

þ.a. grunnstökin spanna fylkjarúmið. Hið síðara leiðir af því að ef $\sum_{n=0}^3 \lambda_n \sigma_n = 0$ þá gildir að

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 + \lambda_3 & \lambda_1 - i\lambda_2 \\ \lambda_1 + i\lambda_2 & \lambda_0 - \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sem gefur að $\lambda_0 = \lambda_3 = 0$ og $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

(d) Ef A er Hermískt þá gildir að

$$A^\dagger = A \implies (\lambda_0\sigma_0 + \lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2 + \lambda_3\sigma_3)^\dagger = (\lambda_0\sigma_0 + \lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2 + \lambda_3\sigma_3)$$

en Pauli-fylkin eru einoka, sjálfoka og Hermísk svo sér í lagi fæst þar sem að þau mynda grunn fyrir fylkjarúmið að $\bar{\lambda}_n = \lambda_n$ svo öll gildin þurfa að vera raungild.

Dæmi 3.3.7. Levi-Civita táknið

(a) Sýnið að

$$\sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}.$$

(b) Notið niðurstöðuna hér á undan til að sýna að $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$.

(c) Reiknið $\sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ljk}$.

(d) Sýnið að

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}.$$

Lausn: (a) Byrjum á því að rifja upp að:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{ef } (ijk) = (123), (231), (312), \\ -1 & \text{ef } (ijk) = (213), (132), (321), \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Hægt er að tákna ϵ_{ijk} algebrulega sem stærðina $\epsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i)$. Eins er hægt að tákna Kronecker-delta táknið algebrulega sem $\delta_{ij} = (1 - (i-j))(1 + (i-j))$.

Athugum síðan að:

$$\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \epsilon_{ij1} \epsilon_{lm1} + \epsilon_{ij2} \epsilon_{lm2} + \epsilon_{ij3} \epsilon_{lm3}.$$

Byrjum á því að skoða liðinn $\epsilon_{ij1} \epsilon_{lm1}$. Hann hverfur ef einhver af vísunum i, j, l, m er jafn 1. En það gefur því einungis fjóra möguleika sem þarf að skoða:

$$(i, j) = (2, 3) \text{ eða } (3, 2), \quad (l, m) = (2, 3) \text{ eða } (3, 2).$$

Sjáum að í þessum fjórum tilvikum þá hverfa bæði $\epsilon_{ij2} \epsilon_{lm2}$ og $\epsilon_{ij3} \epsilon_{lm3}$. Skoðum því:

- $(i, j, l, m) = (2, 3, 2, 3)$ þá: $\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \epsilon_{231} \epsilon_{231} = 1 = \delta_{22} \delta_{33} - \delta_{23} \delta_{32} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$.
- $(i, j, l, m) = (2, 3, 3, 2)$ þá: $\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \epsilon_{231} \epsilon_{321} = -1 = \delta_{23} \delta_{32} - \delta_{22} \delta_{33} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$.
- $(i, j, l, m) = (3, 2, 2, 3)$ þá: $\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \epsilon_{321} \epsilon_{231} = -1 = \delta_{32} \delta_{23} - \delta_{33} \delta_{22} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$.
- $(i, j, l, m) = (3, 2, 3, 2)$ þá: $\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \epsilon_{321} \epsilon_{321} = 1 = \delta_{33} \delta_{22} - \delta_{32} \delta_{23} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$.

Eins fást hin tilvikin með því að skoða $\epsilon_{ij2} \epsilon_{lm2}$ og $\epsilon_{ij3} \epsilon_{lm3}$ (getum þá notað rásaða eiginleikan til að fara yfir í tilvikin fjögur hér að ofan).

(b) Nú má rita krossfeldi tveggja vigra á forminu:

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

Fáum þá að:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c})_i &= \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} a_j (\vec{b} \times \vec{c})_k \\ &= \sum_{j,k,l,m} \epsilon_{ijk} a_j \epsilon_{klm} b_l c_m \\ &= \sum_{j,k,l,m} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} a_j b_l c_m \\ &= \sum_{j,l,m} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_j b_l c_m \\ &= \sum_j a_j b_i c_j - a_j c_i b_j \\ &= \left(\sum_j a_j c_j \right) b_i - \left(\sum_j a_j b_j \right) c_i \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{c}) b_i - (\vec{a} \cdot \vec{b}) c_i \end{aligned}$$

(c) Fáum þá

$$\sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ljk} = \sum_j (\delta_{il} \delta_{jj} - \delta_{ij} \delta_{jl}) = 3\delta_{il} - \delta_{il} = 2\delta_{il}.$$

(d) Fáum þá eins og áður

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A})_i &= \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \partial_j (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k \\ &= \sum_{j,k,l,m} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} \partial_j \partial_l A_m \\ &= \sum_{j,l,m} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \partial_l A_m \\ &= \sum_j (\partial_j \partial_i A_j - \partial_j \partial_j A_i) \\ &= \partial_i \left(\sum_j \partial_j A_j \right) - \left(\sum_j \partial_j^2 \right) A_i \\ &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}. \end{aligned}$$

Dæmatími 2: 28. ágúst

Dæmi 2.4.6. Eiginleikar ofanvarpsvirkja

Látum $\mathcal{P}_1$ og $\mathcal{P}_2$ vera ofanvarpsvirkja á $\mathcal{H}_1$ og $\mathcal{H}_2$. Sýnið að

- (i) $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$ er ofanvarpsvirki á $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$ ef og aðeins ef $[\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2] = 0$.
- (ii) $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$ er ofanvarpsvirki ef og aðeins ef $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = 0$.
- (iii) $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$ er ofanvarpsvirki á $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$ ef $[\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2] = 0$.
- (iv) Látum Ω vera virkja sem er þannig að $\mathcal{P} = \Omega^\dagger\Omega$ er ofanvarpsvirki. Sýnið að þá sé $\Omega\Omega^\dagger$ einnig ofanvarpsvirki.

Dæmi 2.4.10. Jákvæð fylki

Við segjum að fylki A sé ekki-neikvætt ef fyrir sérhvern eiginlegan vigur $|\phi\rangle \neq 0$ gildir að væntigildið $\langle\phi|A|\phi\rangle \geq 0$. Við segjum að fylkið sé jákvætt ef $\langle\phi|A|\phi\rangle > 0$.

- (a) Sýnið að nauðsynlegt og nægjanlegt skilyrði fyrir því að Hermískt fylki sé ekki-neikvætt sé að öll eigingildi þess séu ekki-neikvæð.
- (b) Sýnið að þó svo að rauntalnafulki sé jákvætt þá sé það ekki nauðsynlega samhverft.

Dæmi 3.3.2. Sporger skautunarsía

- (a) Lýsið sporbaugnum sem eftirfarandi skautunarástand skilgreinir

$$|\Phi\rangle = \lambda|x\rangle + \mu|y\rangle, \quad |\lambda|^2 + |\mu|^2 = 1.$$

Með $\lambda = \cos\theta$ og $\mu = \sin\theta e^{i\eta}$. Sýnið að skammás og langás sporbaugsins eru gefnir með

$$a, b = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \sin^2(2\theta) \sin^2(\eta)} \right)}$$

og að sporbaugnum hafi verið snúið um horn ψ þar sem $\tan(2\psi) = \tan(2\theta) \cos(\eta)$.

- (b) Sýnið að ástandið

$$|\Phi_\perp\rangle = -\bar{\mu}|x\rangle + \bar{\lambda}|y\rangle,$$

sé hornrétt á $|\Phi\rangle$ og kemst því ekki í gegn um (λ, μ) skautunarsíuna.

- (c) Sýnið að eiginleikar (λ, μ) skautunarsíunnar eru óbreyttir ef í staðinn að við notum

$$\lambda = \cos\theta e^{i\eta_x}, \quad \mu = \sin\theta e^{i\eta_y},$$

með $\eta = \eta_y - \eta_x$. Sýnið að þetta gefur sama ofanvarpsvirkja $\mathcal{P}_\Phi$.

Dæmi 3.3.4. Aðrar lausnir á jöfnu (3.45) í Bellac

Látum $U = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\psi}{2}} \end{pmatrix} = e^{-i\frac{\psi}{2}} |0\rangle\langle 0| + e^{i\frac{\psi}{2}} |1\rangle\langle 1|$ og skilgreinum $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$.

(a) Reiknið $U|\pm\rangle$.

(b) Sýnið að $U^\dagger = U^{-1}$.

(c) Hægt er að nota U til að skilgreina hnitaskipti $A \rightarrow A' = U^\dagger A U$. Reiknið hvað slík hnitaskipti gera við Pauli-fylkin $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(d) Jafna (3.45) í Bellac segir að

$$\cos(\alpha - \alpha_x) = \cos \phi, \quad \cos(\alpha - \alpha_y) = \sin \phi.$$

Sýnið að annað hvort er $\alpha_y - \alpha_x = \frac{\pi}{2}$ eða $\alpha_y - \alpha_x = -\frac{\pi}{2}$ og stingið þessu inn í

$$\tilde{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\alpha_x} \\ e^{i\alpha_x} & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\alpha_y} \\ e^{i\alpha_y} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dæmi 3.3.6. Að taka veldisvísisfall af Pauli-fylkjunum

(a) Látum $\hat{p} \in \mathbb{R}^3$ vera einingarvigur og látum $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ þar sem að Pauli-fylkin eru gefin með

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sýnið að

$$e^{-i\frac{\theta}{2}\vec{\sigma}\cdot\hat{p}} = I \cos \frac{\theta}{2} - i(\vec{\sigma} \cdot \hat{p}) \sin \frac{\theta}{2}.$$

(b) Ferningsfylki A er einoka ef að andhverfa þess $A^{-1} = A^\dagger$ þar sem $A^\dagger$ er aðokafylkið. Mengi allra einoka ferningsfylkja er táknað með $U(n) := \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid A^{-1} = A^\dagger\}$. Hlutmengið $SU(n) := \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid A^{-1} = A^\dagger, \det(A) = 1\}$ er sérstaklega áhugavert.

Látum nú $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vera 2×2 tvinnatalfylki. Sýnið að til þess að $A \in SU(2)$ þá þarf $c = -\bar{b}$ og $d = \bar{a}$. Með öðrum orðum, sýnið að rita megi sérhvert stak í $SU(2)$ á forminu

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad \text{þar sem að} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

(c) Finnið tvö fylki A og B sem eru þannig að $e^A e^B = e^{(A+B)}$ þó svo að $[A, B] \neq 0$.

Dæmatími 2: 28. ágúst - Lausnir

Dæmi 2.4.6. Eiginleikar ofanvarpsvirkja

Látum $\mathcal{P}_1$ og $\mathcal{P}_2$ vera ofanvarpsvirkja á $\mathcal{H}_1$ og $\mathcal{H}_2$. Sýnið að

- (i) $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$ er ofanvarpsvirki á $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$ ef og aðeins ef $[\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2] = 0$.
- (ii) $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$ er ofanvarpsvirki á $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ ef og aðeins ef $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = 0$.
- (iii) $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$ er ofanvarpsvirki á $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$ ef $[\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2] = 0$.
- (iv) Látum Ω vera virkja sem er þannig að $\mathcal{P} = \Omega^\dagger\Omega$ er ofanvarpsvirki. Sýnið að þá sé $\Omega\Omega^\dagger$ einnig ofanvarpsvirki.

Lausn: Fyrir ofanvarpsvirkja gildir að

$$P^2 = P, \quad \text{ásamt} \quad P^\dagger = P.$$

Stundum er þægilegra að sýna að $P^\dagger P = P$ til að sýna að P sé ofanvarpsvirki.

- (i) ($\Rightarrow$) Látum P_1P_2 vera ofanvarpsvirkja á $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$ þar sem að bæði P_1 og P_2 eru ofanvarpsvirkjar. Þá fæst að

$$P_1P_2 = (P_1P_2)^2 = (P_1P_2)^\dagger(P_1P_2) = P_2^\dagger P_1^\dagger P_1P_2 = P_2^\dagger P_1P_2 = P_2^\dagger(P_1P_2)^\dagger = P_2^\dagger P_2^\dagger P_1^\dagger = P_2P_1.$$

- ($\Leftarrow$) Gerum nú ráð fyrir að $[P_1, P_2] = 0$ og sýnum að þá sé P_1P_2 ofanvarpsvirki. Fáum

$$(P_1P_2)^\dagger(P_1P_2) = P_2^\dagger P_1^\dagger P_1P_2 = P_2P_1^2P_2 = P_1P_2.$$

- (ii) ($\Rightarrow$) Látum $P_1 + P_2$ vera ofanvarpsvirkja. Þá fæst að

$$P_1 + P_2 = (P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_1P_2 + P_2P_1 = P_1 + P_2 + \{P_1, P_2\}$$

svo $\{P_1, P_2\} = 0$.

- ($\Leftarrow$) Hin áttin sýnir að ef $\{P_1, P_2\} = 0$ þá sé $P_1 + P_2$ ofanvarpsvirki.

Sýnum loks að ef P_1 og P_2 eru ofanvarpsvirkjar þá gildir að:

$$\{P_1, P_2\} = 0 \iff P_1P_2 = 0.$$

Athugum að ef $\{P_1, P_2\} = 0$ þá fæst

$$0 = (I - P_1)(P_1P_2 + P_2P_1) = (I - P_1)P_2P_1 = P_2P_1 - P_1P_2P_1$$

En það þýðir að $P_2P_1 = P_1P_2P_1$ svo

$$(P_2P_1)^2 = P_2P_1P_2P_1 = P_2P_2P_1 = P_2P_1$$

svo P_2P_1 er ofanvarpsvirki en þá er bæði $[P_1, P_2] = \{P_1, P_2\} = 0$ svo $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$.

- (iii) Fáum að

$$\begin{aligned} (P_1 + P_2 - P_1P_2)^2 &= P_1^2 + P_1P_2 - P_1^2P_2 + P_2P_1 + P_2^2 - P_2P_1P_2 - P_1P_2P_1 - P_1P_2P_2 + P_1P_2P_1P_2 \\ &= P_1 + P_2 - P_1P_2. \end{aligned}$$

- (iv) Látum $P = \Omega^\dagger\Omega$. Þá er sér í lagi $P^\dagger = (\Omega^\dagger\Omega)^\dagger = \Omega^\dagger\Omega = P$.

Dæmi 2.4.10. Jákvæð fylki

Við segjum að fylki A sé ekki-neikvætt ef fyrir sérhvern eiginlegan vigur $|\phi\rangle \neq 0$ gildir að væntigildið $\langle\phi|A|\phi\rangle \geq 0$. Við segjum að fylkið sé jákvætt ef $\langle\phi|A|\phi\rangle > 0$.

- (a) Sýnið að nauðsynlegt og nægjanlegt skilyrði fyrir því að Hermískt fylki sé ekki-neikvætt sé að öll eigingildi þess séu ekki-neikvæð.
- (b) Sýnið að þó svo að rauntalnafulki sé jákvætt þá sé það ekki nauðsynlega samhverft.

Lausn: (a) Þar sem að A er Hermískt hefur það raungild eigingildi samkvæmt rófsetningunni og við getum því ritað það á hornalínuformi

$$A = \sum_n a_n |n\rangle\langle n|, \quad |\psi\rangle = \sum_n \psi_n |n\rangle$$

Þá fæst að

$$\begin{aligned} \langle\psi|A|\psi\rangle &= \left(\sum_i \psi_i^* \langle i| \right) \left(\sum_j a_j |j\rangle\langle j| \right) \left(\sum_k \psi_k |k\rangle\right) \\ &= \sum_{i,j,k} \psi_i^* a_j \psi_k \langle i|j\rangle \langle j|k\rangle \\ &= \sum_{i,j,k} \psi_i^* a_j \psi_k \delta_{ij} \delta_{jk} \\ &= \sum_k |\psi_k|^2 a_k \geq 0 \end{aligned}$$

Þetta þarf sér í lagi að gilda fyrir hvaða $|\psi\rangle$ sem er. Sjáum þá með því að velja $|\psi\rangle = |n\rangle$ að við höfum sýnt að $a_n \geq 0$ fyrir öll n en það þýðir einmitt að nauðsynlegt og nægjanlegt skilyrði sé að öll eigingildi A séu jákvæð.

(b) Skoðum fylkið:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Það er jákvætt því

$$x^T A x = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \end{pmatrix} = x(x+y) + y(-x+y) = x^2 + y^2 \geq 0.$$

Hinsvegar er

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq A$$

þar að auki eru eigingildi A gefin með $1 \pm i$.

Dæmi 3.3.2. Sporger skautunarsía

(a) Lýsið sporbaugnum sem eftirfarandi skautunarástand skilgreinir

$$|\Phi\rangle = \lambda|x\rangle + \mu|y\rangle, \quad |\lambda|^2 + |\mu|^2 = 1.$$

(b) Sýnið að ástandið

$$|\Phi_\perp\rangle = -\bar{\mu}|x\rangle + \bar{\lambda}|y\rangle,$$

sé hornrétt á $|\Phi\rangle$ og kemst því ekki í gegn um (λ, μ) skautunarsíuna.

(c) Sýnið að eiginleikar (λ, μ) skautunarsíunnar eru óbreyttir þó að við notum

$$\lambda = \cos\theta e^{i\eta_x}, \quad \mu = \sin\theta e^{i\eta_y},$$

með $\eta = \eta_y - \eta_x$. Sýnið að þetta gefur sama ofanvarpsvirkja $\mathcal{P}_\Phi$.

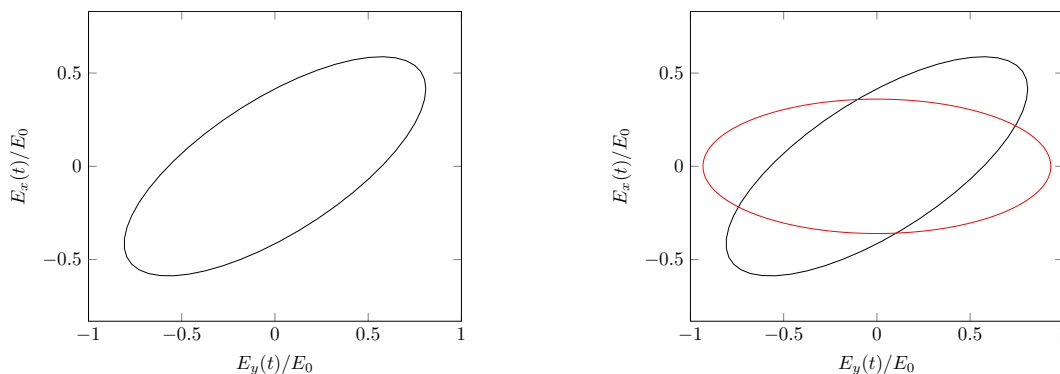
Lausn: (a) Þar sem að $|\lambda|^2 + |\mu|^2 = 1$ þá getum við valið

$$\lambda = \cos\theta, \quad \mu = \sin\theta e^{-i\eta}$$

Þá verða x og y þættir rafsviðsins gefnir með eftirfarandi stikun

$$\begin{pmatrix} E_x(t) \\ E_y(t) \end{pmatrix} = \text{Re} \left[\begin{pmatrix} E_0 \lambda e^{-i\omega t} \\ E_0 \mu e^{-i\omega t} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} E_0 \cos\theta \cos(\omega t) \\ E_0 \sin\theta \cos(\omega t - \eta) \end{pmatrix}.$$

Viljum núna skoða grafið sem stikunin af punktum $(E_x(t), E_y(t))$ skilgreinir.



Mynd 1: Á vinstri myndinni er búið að teikna stikunina fyrir $\theta = \frac{\pi}{5}$ og $\eta = \frac{\pi}{4}$. Á þeirri hægri er búið að teikna í rauðu eftir að snúið hefur verið um horn ψ þar sem að $\tan(2\psi) = \tan(2\theta) \cos(\eta)$.

Til þess að ákvarða langás og skammás sporbaugsins sem og hornið sem þarf að snúa sporbaugnum um þá athugum við að venjulegur sporbaugur uppfyllir

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Nú ætlum við að snúa sporbaugnum um horn ψ en til þess má nota snúningsfylkið

$$R(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}.$$

Andhverfan er snúningur í öfuga átt, þ.e. fylkið $R(-\psi) = R^{-1}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}$. Skoðum þá að

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = R(\psi) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{þ.e.} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R(-\psi) \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi \tilde{x} + \sin \psi \tilde{y} \\ -\sin \psi \tilde{x} + \cos \psi \tilde{y} \end{pmatrix}.$$

Þetta gefur því að jafna sporbaugsins verður:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(\cos \psi \tilde{x} + \sin \psi \tilde{y})^2}{a^2} + \frac{(-\sin \psi \tilde{x} + \cos \psi \tilde{y})^2}{b^2} \\ &= \left(\frac{\cos^2 \psi}{a^2} + \frac{\sin^2 \psi}{b^2} \right) \tilde{x}^2 + \left(\frac{\sin^2 \psi}{a^2} + \frac{\cos^2 \psi}{b^2} \right) \tilde{y}^2 + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \sin(2\psi) \tilde{x} \tilde{y}. \end{aligned}$$

En þetta gefur því að rita megi sporbaug sem snúið hefur verið um horn ψ á forminu

$$1 = \alpha \tilde{x}^2 + \beta \tilde{y}^2 + \gamma \tilde{x} \tilde{y},$$

með

$$\alpha = \left(\frac{\cos^2 \psi}{a^2} + \frac{\sin^2 \psi}{b^2} \right), \quad \beta = \left(\frac{\sin^2 \psi}{a^2} + \frac{\cos^2 \psi}{b^2} \right), \quad \gamma = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \sin(2\psi).$$

Fyrir $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$ þá fæst að

$$\begin{aligned} E_x^2 &= \cos^2 \theta \cos^2(\omega t), \\ E_x E_y &= \frac{1}{2} \sin(2\theta) \cos(\omega t) \cos(\omega t - \eta) \\ &= \frac{1}{2} \sin(2\theta) \cos(\eta) \cos^2(\omega t) + \frac{1}{4} \sin(2\theta) \sin(2\omega t) \sin(\eta), \\ E_y^2 &= \sin^2 \theta \cos^2(\omega t - \eta) \\ &= \sin^2 \theta \left[\cos^2(\omega t) \cos(2\eta) + \sin^2(\eta) + \frac{1}{2} \sin(2\omega t) \sin(2\eta) \right] \end{aligned}$$

Skrifum þetta þá út og sjáum að til þess að

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha E_x^2 + \beta E_y^2 + \gamma E_x E_y \\ &= \beta \sin^2(\theta) \sin^2(\eta) + \cos^2(\omega t) \left[\alpha \cos^2 \theta + \beta \sin^2 \theta \cos(2\eta) + \frac{\gamma}{2} \sin(2\theta) \cos(\eta) \right] \\ &\quad + \sin(2\omega t) \left[\frac{\beta}{2} \sin^2 \theta \sin(2\eta) + \frac{\gamma}{4} \sin(2\theta) \sin(\eta) \right]. \end{aligned}$$

Af þessu sjáum við að

$$\beta = \frac{1}{\sin^2 \theta \sin^2 \eta}, \quad \gamma = -\frac{4 \cos(\eta)}{\sin(2\theta) \sin^2(\eta)}, \quad \alpha = \frac{1 + \cot^2 \eta}{\cos^2 \theta}$$

En þetta gefur okkur því jöfnuhneppið:

$$\begin{cases} \frac{\cos^2 \psi}{a^2} + \frac{\sin^2 \psi}{b^2} = \alpha = \frac{1 + \cot^2 \eta}{\cos^2 \theta}, \\ \frac{\sin^2 \psi}{a^2} + \frac{\cos^2 \psi}{b^2} = \beta = \frac{1}{\sin^2 \theta \sin^2 \eta}, \\ \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \sin(2\psi) = \gamma = -\frac{4 \cos(\eta)}{\sin^2(\theta) \sin^2(\delta)}. \end{cases}$$

Með því að umrita aðeins efri tvær þannig að

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) \sin^2 \psi = \alpha, \\ \frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) \cos^2 \psi = \beta \end{cases}$$

sem gefur okkur því að mismunurinn er

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) \cos(2\psi) = \alpha - \beta$$

og því fæst að

$$\tan(2\psi) = \frac{\gamma}{\alpha - \beta} = \tan(2\theta) \cos(\eta).$$

(b) Fáum þá að

$$\langle \Phi_{\perp} | \Phi \rangle = (-\mu \langle x | + \lambda \langle y |) (\lambda | x \rangle + \mu | y \rangle) = -\mu \lambda \langle x | x \rangle - \mu^2 \langle x | y \rangle + \lambda^2 \langle y | x \rangle + \lambda \mu \langle y | y \rangle = 0.$$

Dæmi 3.3.4. Aðrar lausnir á jöfnu (3.45) í Bellac

Látum $U = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\psi}{2}} \end{pmatrix} = e^{-i\frac{\psi}{2}} |0\rangle\langle 0| + e^{i\frac{\psi}{2}} |1\rangle\langle 1|$ og skilgreinum $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \pm |1\rangle)$.

(a) Reiknið $U|\pm\rangle$.

(b) Sýnið að $U^\dagger = U^{-1}$.

(c) Hægt er að nota U til að skilgreina hnitaskipti $A \rightarrow A' = U^\dagger A U$. Reiknið hvað slík hnitaskipti gera við Pauli-fylkin $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(d) Jafna (3.45) í Bellac segir að

$$\cos(\alpha - \alpha_x) = \cos \phi, \quad \cos(\alpha - \alpha_y) = \sin \phi.$$

Sýnið að annað hvort er $\alpha_y - \alpha_x = \frac{\pi}{2}$ eða $\alpha_y - \alpha_x = -\frac{\pi}{2}$ og stingið þessu inn í

$$\tilde{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\alpha_x} \\ e^{i\alpha_x} & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\alpha_y} \\ e^{i\alpha_y} & 0 \end{pmatrix}.$$

Lausn: (a) Fáum að

$$U|\pm\rangle = \left(e^{-i\frac{\psi}{2}} |0\rangle\langle 0| + e^{i\frac{\psi}{2}} |1\rangle\langle 1| \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \pm |1\rangle) \right) = \frac{e^{-i\psi/2}}{\sqrt{2}} (|0\rangle \pm e^{i\psi} |1\rangle).$$

(b) Fáum að $U^\dagger U = I$ svo $U^\dagger = U^{-1}$.

(c) Við fáum þá að

$$U^\dagger \sigma_x U = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\psi} \\ e^{-i\psi} & 0 \end{pmatrix} \neq \sigma_x, \quad U^\dagger \sigma_y U = \begin{pmatrix} 0 & -ie^{i\psi} \\ ie^{-i\psi} & 0 \end{pmatrix} \neq \sigma_y, \quad U^\dagger \sigma_z U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_z.$$

Notum þáttunarreglur hornafalla. Athugum að

$$\cos(\alpha - \alpha_x) - \cos \phi = -2 \sin\left(\frac{\alpha - \alpha_x + \phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \alpha_x - \phi}{2}\right) = 0$$

sem gefur annað hvort að $\alpha - \alpha_x + \phi = 0$ eða að $\alpha - \alpha_x - \phi = 0$. Athugum síðan næst að $\sin \phi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)$ sem gefur þá eins með þáttunarreglum hornafalla að

$$\cos(\alpha - \alpha_y) - \sin \phi = \cos(\alpha - \alpha_y) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = -2 \sin\left(\frac{\alpha - \alpha_y + \frac{\pi}{2} - \phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \alpha_y - \frac{\pi}{2} + \phi}{2}\right) = 0$$

sem gefur þá að annað hvort er $\alpha - \alpha_y + \frac{\pi}{2} - \phi = 0$ eða $\alpha - \alpha_y + \phi - \frac{\pi}{2} = 0$. Nú verða α_x og α_y að vera óháð α svo af þessum fjórum hugsanlegu möguleikum koma aðeins tveir til greina:

$$\alpha_y - \alpha_x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{eða} \quad \alpha_y - \alpha_x = -\frac{\pi}{2}.$$

Veljum $\alpha_x = 0$ og þá gefa fylkin í lýsingunni í fyrra tilviki að $\tilde{\sigma}_x = \sigma_x$ og $\tilde{\sigma}_y = \sigma_y$. En seinna:

$$\tilde{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Dæmi 3.3.6. Að taka veldisvísisfall af Pauli-fylkjum

- (a) Látum $\hat{p} \in \mathbb{R}^3$ vera einingarvigur og látum $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ þar sem að Pauli-fylkin eru gefin með

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sýnið að

$$e^{-i\frac{\theta}{2}\vec{\sigma}\cdot\hat{p}} = I \cos \frac{\theta}{2} - i(\vec{\sigma} \cdot \hat{p}) \sin \frac{\theta}{2}.$$

- (b) Ferningsfylki A er einoka ef að andhverfa þess $A^{-1} = A^\dagger$ þar sem $A^\dagger$ er aðokafylkið. Mengi allra einoka ferningsfylkja er táknað með $U(n) := \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid A^{-1} = A^\dagger\}$. Hlutmengið $SU(n) := \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid A^{-1} = A^\dagger, \det(A) = 1\}$ er sérstaklega áhugavert.

Látum nú $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vera 2×2 tvinntalnafylki. Sýnið að til þess að $A \in SU(2)$ þá þarf $c = -\bar{b}$ og $d = \bar{a}$. Með öðrum orðum, sýnið að rita megi sérhvert stak í $SU(2)$ á forminu

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad \text{þar sem að} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

- (c) Finnið tvö fylki A og B sem eru þannig að $e^A e^B = e^{(A+B)}$ þó svo að $[A, B] \neq 0$.

Lausn: (a) Við byrjum á því að athuga að

$$e^{-i\frac{\theta}{2}(\vec{\sigma}\cdot\hat{p})} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i\frac{\theta}{2}\vec{\sigma}\cdot\hat{p})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i\frac{\theta}{2})^n}{n!} (\vec{\sigma}\cdot\hat{p})^n$$

Byrjum á því að athuga að

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma}\cdot\hat{p})^2 &= (\sigma_x\hat{p}_x + \sigma_y\hat{p}_y + \sigma_z\hat{p}_z)^2 \\ &= \hat{p}_x^2\sigma_x^2 + \hat{p}_y^2\sigma_y^2 + \hat{p}_z^2\sigma_z^2 + \hat{p}_x\hat{p}_y\{\sigma_x, \sigma_y\} + \hat{p}_x\hat{p}_z\{\sigma_x, \sigma_z\} + \hat{p}_y\hat{p}_z\{\sigma_y, \sigma_z\} \\ &= |\hat{p}|^2 I = I. \end{aligned}$$

þar sem að við notuðum að fyrir Pauli-fylkin gildir að þau eru sjálfoka þ.a. $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I$. Þar að auki höfum við að $\{\sigma_x, \sigma_y\} = \{\sigma_x, \sigma_z\} = \{\sigma_y, \sigma_z\} = 0$. En þar með sjáum við að fyrir sléttar tölur $n = 2k$ gildir að

$$(\vec{\sigma}\cdot\hat{p})^{2k} = I, \quad \text{en fyrir oddatölur} \quad (\vec{\sigma}\cdot\hat{p})^{2k+1} = (\vec{\sigma}\cdot\hat{p}).$$

Þar með fáum við að

$$\begin{aligned} e^{-i\frac{\theta}{2}(\vec{\sigma}\cdot\hat{p})} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i\frac{\theta}{2})^n}{n!} (\vec{\sigma}\cdot\hat{p})^n \\ &= I \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-i\frac{\theta}{2})^{2k}}{(2k)!} + \vec{\sigma}\cdot\hat{p} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-i\frac{\theta}{2})^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= I \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\frac{\theta}{2})^{2k}}{(2k)!} - i(\vec{\sigma}\cdot\hat{p}) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\frac{\theta}{2})^{2k+1}}{(2k+1)!} = I \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i(\vec{\sigma}\cdot\hat{p}) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \end{aligned}$$

(c) Látum

$$A = \begin{pmatrix} i\pi & 0 \\ 0 & -i\pi \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} i\pi & 1 \\ 0 & -i\pi \end{pmatrix}.$$

Þá er

$$\begin{aligned} [A, B] &= AB - BA \\ &= \begin{pmatrix} i\pi & 0 \\ 0 & -i\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\pi & 1 \\ 0 & -i\pi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i\pi & 0 \\ 0 & -i\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\pi & 1 \\ 0 & -i\pi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\pi^2 & i\pi \\ 0 & -\pi^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\pi^2 & -i\pi \\ 0 & -\pi^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2\pi i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \end{aligned}$$

svo A og B víxlast ekki. Nú má hornalínugera B þannig að rita meg:

$$B = P\Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{i}{2\pi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\pi & 0 \\ 0 & -i\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{i}{2\pi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En þar með er

$$e^B = P e^\Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{i}{2\pi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{i}{2\pi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Síðan er

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{i\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Höfum síðan að

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2\pi i & 1 \\ 0 & -2\pi i \end{pmatrix}$$

Þá er

$$C = U D U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{i}{4\pi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\pi i & 0 \\ 0 & -2\pi i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{i}{4\pi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

og þar með er

$$e^{A+B} = e^C = U e^D U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{i}{4\pi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2\pi i} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{i}{4\pi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En þar með fæst að

$$e^{A+B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = e^A e^B.$$

Heimadæmi 3: 5. september

Dæmi 4.4.2. Hnikunaraðferðin

Væntigildi vigursins $|\varphi\rangle$ er skilgreint sem stærðin $\langle H \rangle_\varphi = \frac{\langle \varphi | H | \varphi \rangle}{\langle \varphi | \varphi \rangle}$.

(a) Sýnið að ef væntigildið hefur útgildi í $|\varphi\rangle = |\varphi\rangle_e$ þá sé $|\varphi\rangle_e$ eiginvigur H .

(b) Látum $|\varphi\rangle = |\varphi(\alpha)\rangle$. Sýnið að ef

$$\left. \frac{\partial \langle H \rangle_{\varphi(\alpha)}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0} = 0,$$

þá sé $E_m \leq \langle H \rangle_{\varphi(\alpha_0)}$ ef α_0 samsvarar lággildi en $\langle H \rangle_{\varphi(\alpha_0)} \leq E_M$ ef α_0 er hággildi.

(c) Skoðum nú tvívítt kerfi með Hamilton-virkja á forminu

$$H = \begin{pmatrix} a+c & b \\ b & a-c \end{pmatrix}.$$

Látum síðan

$$|\phi(\alpha)\rangle = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix},$$

og ákvarðið gildin á α_0 með því að leita að útgildum $\langle \varphi(\alpha) | H | \varphi(\alpha) \rangle$.

Lausn: (a) Hnikum fellinu $\langle H \rangle_{|\psi\rangle}$ með því að skoða $|\psi\rangle = |\psi_0\rangle + \delta |\varphi\rangle$ þar sem að $|\psi_0\rangle$ er útgildi fellisins. Við fáum þá að

$$\begin{aligned} \langle H \rangle_\psi &= \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \frac{(\langle \psi_0 | + \delta \langle \varphi |) H (|\psi_0\rangle + \delta |\varphi\rangle)}{(\langle \psi_0 | + \delta \langle \varphi |) (|\psi_0\rangle + \delta |\varphi\rangle)} \\ &= \frac{1}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle + 2\delta \langle \psi_0 | \varphi \rangle + \mathcal{O}(\delta^2)} (\langle \varphi_0 | H | \varphi_0 \rangle + 2\delta \langle \varphi | H | \psi_0 \rangle + \mathcal{O}(\delta^2)) \\ &= \frac{1}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle} \left(1 - 2\delta \frac{\langle \psi_0 | \varphi \rangle}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle} + \mathcal{O}(\delta^2) \right) (\langle \varphi_0 | H | \varphi_0 \rangle + 2\delta \langle \varphi | H | \psi_0 \rangle + \mathcal{O}(\delta^2)) \\ &= \frac{\langle \psi_0 | H | \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle} + 2\delta \left(\frac{\langle \varphi | H | \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle} - \frac{\langle \psi_0 | H | \psi_0 \rangle \langle \varphi | \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle^2} \right) \end{aligned}$$

þar sem í þriðju línu notuðum við $(1+x)^n \approx 1+nx$. Afleiða af felli $F[f]$ er síðan skilgreind þ.a.

$$\delta F[f] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[f + \epsilon g] - F[f]}{\epsilon}$$

og til þess að finna útgildi þá krefjumst við að fellaafleiðan hverfi en það þýðir að

$$\left(\frac{\langle \varphi | H | \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle} - \frac{\langle \psi_0 | H | \psi_0 \rangle \langle \varphi | \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle^2} \right) = 0$$

fyrir öll $|\varphi\rangle$ en með smá umritun þá sést að það gefur einmitt að

$$H |\psi_0\rangle = \frac{\langle \psi_0 | H | \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle} |\psi_0\rangle = \langle H \rangle_{\psi_0} |\psi_0\rangle$$

svo sér í lagi er útgildið eigingildi á H en þar með þarf það nauðsynlega að vera stærsta eða minnsta gildið.

(b) Þetta leiðir beint af (a).

(c) Við athugum fyrst að

$$\begin{aligned}\langle H \rangle_{\varphi(\alpha)} &= \langle \varphi(\alpha) | H | \varphi(\alpha) \rangle = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\alpha}{2}) & \sin(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+c & b \\ b & a-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\alpha}{2}) \\ \sin(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{\alpha}{2}) & \sin(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a+c)\cos(\frac{\alpha}{2}) + b\sin(\frac{\alpha}{2}) \\ b\cos(\frac{\alpha}{2}) + (a-c)\sin(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix} \\ &= (a+c)\cos^2(\frac{\alpha}{2}) + 2b\sin(\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\alpha}{2}) + (a-c)\sin^2(\frac{\alpha}{2}) \\ &= a + b\sin(\alpha) + c\cos(\alpha).\end{aligned}$$

sem gefur því að

$$\frac{\partial \langle H \rangle_{\varphi(\alpha)}}{\partial \alpha} = b\cos(\alpha) - c\sin(\alpha) = 0 \implies \boxed{\tan(\alpha_0) = \frac{b}{c}.}$$

Athugum síðan að eigingildi A má ákvarða samkvæmt

$$0 = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a+c-\lambda & b \\ b & a-c-\lambda \end{pmatrix} = (a+c-\lambda)(a-c-\lambda) - b^2$$

sem gefur að

$$\boxed{\lambda_{\pm} = a \pm \sqrt{b^2 + c^2}.}$$

En það er einmitt það sem að við fáum ef að við stingum $\alpha_0 = \arctan(b/c)$ inn í $\langle H \rangle_{\varphi(\alpha_0)}$.

Dæmi 3.3.7. Tímaþróun fyrir tveggja kerfi með tvö eiginástönd

Lítum á Hamilton-virkjan

$$H = \hbar \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix}$$

miðað við grunninn $|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $|-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Eigingildi og eiginvigrar H eru gefnir með:

$$E_{\pm} = \pm \hbar \sqrt{A^2 + B^2}, \quad |\chi_{\pm}\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |\pm\rangle \pm \sin \frac{\theta}{2} |\mp\rangle.$$

(a) Látum $|\varphi(t)\rangle = c_+(t)|+\rangle + c_-(t)|-\rangle$ tákna ástandið við tíma t . Ákvarðið diffurjöfnuhneppið sem að stuðlarnir $c_+(t)$ og $c_-(t)$ njóta.

(b) Látum upphafssástandið vera gefið með:

$$|\varphi(t=0)\rangle = |\varphi(0)\rangle = \lambda |\chi_+\rangle + \mu |\chi_-\rangle$$

með $|\lambda|^2 + |\mu|^2 = 1$ og þar sem að $|\chi_{\pm}\rangle$ tákna eiginástönd Hamilton-virkjans. Sýnið að rita megir

$$c_+(t) = \lambda e^{-i\Omega t/2} \cos \frac{\theta}{2} - \mu e^{i\Omega t/2} \sin \frac{\theta}{2}$$

með $\Omega = 2\sqrt{A^2 + B^2}$. Sýnið að auki að $\ddot{c}_+(t) + \left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 c_+(t) = 0$.

(c) Gerum ráð fyrir að $c_+(0) = 0$. Ákvarðið λ og μ upp að fasa sem og $c_+(t)$. Sýnið að líkurnar á að finna kerfið í ástandi $|+\rangle$ við tíma t eru gefnar með

$$p_+(t) = \sin^2 \theta \sin^2 \left(\frac{\Omega t}{2} \right)$$

(d) Sýnið að ef hinsvegar $c_+(t=0) = 1$ þá sé

$$c_+(t) = \cos \frac{\Omega t}{2} - i \cos \theta \sin \frac{\Omega t}{2}.$$

Finnið $p_+(t)$ og $p_-(t)$ í þessu tilfelli.

Lausn: (a) Skoðum þá Schrödinger-jöfnuna

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H |\psi(t)\rangle$$

sem gefur þá á fylkjaformi

$$\begin{cases} i\hbar \dot{c}_+(t) = \hbar(Ac_+(t) + Bc_-(t)), \\ i\hbar \dot{c}_-(t) = \hbar(-Ac_-(t) + Bc_+(t)). \end{cases}$$

(b) Rifjum upp (og leggjum áherslu á) að fyrir eiginástönd Hamilton-virkjans þá gildir að

$$e^{-\frac{i}{\hbar} H t} |\chi_+\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} E_+ t} |\chi_+\rangle$$

og eins fyrir $|\chi_{-}\rangle$ og þar sem að tímaþróun í kerfi er lýst með þessum hætti þá er þægilegast að tímaþróa kerfi miðað við eiginástönd Hamilton-virkjans. Fáum því hér að:

$$|\varphi(t)\rangle = \lambda e^{-iE_{+}t/\hbar} |\chi_{+}\rangle + \mu e^{-iE_{-}t/\hbar} |\chi_{-}\rangle ,$$

sem gefur því að

$$\begin{aligned} c_{+}(t) &= \langle + | \varphi(t) \rangle \\ &= \langle + | \left(\lambda e^{-iE_{+}t/\hbar} \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle + \mu e^{-iE_{-}t/\hbar} \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle \right) \\ &= \lambda e^{-i\Omega t/2} \cos \frac{\theta}{2} - \mu e^{i\Omega t/2} \sin \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Með því að taka tvær tímaafleiður af ofangreindri niðurstöðu höfum við

$$\ddot{c}_{+}(t) = - \left(\frac{\Omega}{2} \right) c_{+}(t) .$$

(c) Þá viljum við reikna:

$$p_{+}(t) = |\langle + | \varphi(t) \rangle|^2 .$$

Nú gefur upphafsskilyrðið okkur að $\lambda \cos \frac{\theta}{2} - \mu \sin \frac{\theta}{2} = 0$ en þetta gefur að $\lambda = \mu \tan \frac{\theta}{2}$ svo

$$1 = |\lambda|^2 + |\mu|^2 = |\mu|^2 (1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}) = \frac{|\mu|^2}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}$$

Þannig að upp að fasahorni γ höfum við ákvarðað að

$$\mu = \cos \frac{\theta}{2} e^{i\gamma}$$

en þá er $\lambda = \sin \frac{\theta}{2} e^{i\gamma}$ og við getum tekið $e^{i\gamma}$ út fyrir sviga í $|\varphi(t)\rangle$. Setjum því $\gamma = 0$ til einföldunar og án skerðingar á víðgildi því heildarfasahorn breytir ekki eðlisfræðilegum eiginleikum ástandsins. Stingum þessu inn og fáum:

$$\begin{aligned} p_{+}(t) &= |\langle + | \varphi(t) \rangle|^2 = |c_{+}(t)|^2 \\ &= \left(\lambda e^{-i\Omega t/2} \cos \frac{\theta}{2} - \mu e^{i\Omega t/2} \sin \frac{\theta}{2} \right) \overline{\left(\lambda e^{-i\Omega t/2} \cos \frac{\theta}{2} - \mu e^{i\Omega t/2} \sin \frac{\theta}{2} \right)} \\ &= \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(e^{-i\Omega t/2} - e^{i\Omega t/2} \right) \left(e^{i\Omega t/2} - e^{-i\Omega t/2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \sin^2 \theta (-2i) \sin \left(\frac{\Omega t}{2} \right) (2i) \sin \left(\frac{\Omega t}{2} \right) \\ &= \sin^2 \theta \sin^2 \frac{\Omega t}{2}. \end{aligned}$$

(d) Þetta er bara það sama og (c) nema við skiptum á hlutverki á $p_{+}(t)$ og $p_{-}(t)$.

Heimadæmi 4: 12. september

Dæmi 4.4.7. Schrödinger vs Heisenberg

Látum $A(t)$ vera tímaháðan Hermískan virkja miðað við Schrödinger ramma. Látum Hamilton-virkjann $H(t)$ einnig vera tímaháðan. Sýnið að

$$i\hbar \frac{dA_H}{dt} = [A_H(t), H_H(t)] + i\hbar \left(\frac{\partial A(t)}{\partial t} \right)_H,$$

þar sem að $H_H(t)$ og $(\partial A/\partial t)_H$ eru fengnir út frá $H(t)$ og $(\partial A(t)/\partial t)$ með sömu ummyndunarreglu og fyrir $A(t)$.

Lausn: Rifjum upp að tímaþróunarvirkinn er hér gefinn með:

$$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H}, \quad \text{og þá andhverfa hans með} \quad U^{-1}(t, t_0) = e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H}.$$

En því fæst

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dA_H}{dt} &= i\hbar \frac{d}{dt} (U^{-1}AU) \\ &= i\hbar \left(e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H} A(t) e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H} \right) \\ &= i\hbar \left(\frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H} H A e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H} + e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H} \frac{\partial A}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H} - \frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H} A H e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H} \right) \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H} [A, H] e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H} + i\hbar e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H} \frac{\partial A}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H} \\ &= [A_H, H_H] + i\hbar \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_H \end{aligned}$$

þar sem að við notuðum að

$$[A_H, H_H] = [U^{-1}AU, U^{-1}HU] = U^{-1}AUU^{-1}HU - U^{-1}HUU^{-1}AU = U^{-1}[A, H]U.$$

Dæmi 5.5.1. Þverstaðlaður grunnur eiginástanda

Sýnið með strangheiðarlegum reikningum að eiginvigrarnir $|\chi_s\rangle$ sem eru gefnir með

$$|\chi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\delta_s} |\varphi_n\rangle, \quad \delta_s = \frac{2\pi s}{N}, \quad s \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

mynda þverstaðlaðan grunn fyrir ástandsrúmið.

Lausn: Fáum

$$\begin{aligned} \langle \chi_s | \chi_\ell \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} e^{i(m\delta_\ell - n\delta_s)} \underbrace{\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle}_{= \delta_{nm}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{in(\delta_\ell - \delta_s)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i n}{N}(\ell - s)} \end{aligned}$$

Athugum fyrst að ef $\ell = s$ þá eru allir N liðirnir í summunni jafnir 1 svo þá er $\langle \chi_s | \chi_s \rangle = 1$. Hinsvegar ef $\ell \neq s$ þá er þetta kvótaröð með kvóta $x = e^{\frac{2\pi i}{N}(\ell - s)}$ en fyrir kvótaröð gildir að

$$\sum_{n=0}^{N-1} x^n = \frac{1 - x^N}{1 - x}$$

svo fyrir $\ell \neq s$ höfum við því

$$\langle \chi_s | \chi_\ell \rangle = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{2\pi i(\ell - s)}}{1 - e^{\frac{2\pi i(\ell - s)}{N}}} = 0$$

því $\ell - s$ er heiltala svo $e^{2\pi i(\ell - s)} = 1$.

Heimadæmi 5: 19. september

Dæmi 6.5.1. Þinfeldið er óháð grunninum

Sýnið að þinfeldið $|\varphi \otimes \psi\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ sem er skilgreint fyrir eftirfarandi tvö ástönd

$$|\varphi\rangle = \sum_{n=1}^N c_n |n\rangle \in \mathcal{H}_1 \text{ og } |\psi\rangle = \sum_{m=1}^M d_m |m\rangle \in \mathcal{H}_2 \text{ samkvæmt}$$

$$|\varphi \otimes \psi\rangle = \sum_{n,m} c_n d_m |n \otimes m\rangle.$$

Lausn: Látum $|\tilde{n}\rangle$ vera annan grunn á $\mathcal{H}_1$. Þá má finna línulega vörpun þannig að tengja megi saman grunnvigrana samkvæmt

$$|n\rangle = \sum_{\tilde{n}} R_{\tilde{n}n} |\tilde{n}\rangle$$

En þetta þýðir þá sér í lagi að

$$|\varphi\rangle = \sum_{n=1}^N c_n |n\rangle = \sum_{n=1}^N \sum_{\tilde{n}=1}^N c_n R_{\tilde{n}n} |\tilde{n}\rangle = \sum_{\tilde{n}} \tilde{c}_{\tilde{n}} |\tilde{n}\rangle$$

þar sem að við skilgreindum $\tilde{c}_{\tilde{n}} = \sum_{n=1}^N c_n R_{\tilde{n}n}$. Eins má gera fyrir grunnvigrana í $\mathcal{H}_2$ sem gefur

$$\begin{aligned} |\varphi \otimes \psi\rangle &= \sum_{n,m} c_n d_m |n \otimes m\rangle = \sum_{n,m} c_n d_m \left| \sum_{\tilde{n}} R_{\tilde{n}n} |\tilde{n}\rangle \otimes \sum_{\tilde{m}} S_{\tilde{m}m} |\tilde{m}\rangle \right\rangle \\ &= \sum_{n,m,\tilde{n},\tilde{m}} c_n d_m R_{\tilde{n}n} S_{\tilde{m}m} |\tilde{n} \otimes \tilde{m}\rangle \\ &= \sum_{\tilde{n},\tilde{m}} \tilde{c}_{\tilde{n}} d_{\tilde{m}} |\tilde{n} \otimes \tilde{m}\rangle. \end{aligned}$$

sem sýnir að niðurstaðan er óháð vali á grunni.

Dæmi 6.5.2. Þinfeldi tveggja 2×2 fylkja

Látum $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Reiknið þinfeldið $C = A \otimes B$.

Lausn: Þá er

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} aB & bB \\ cB & dB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha & a\beta & b\alpha & b\beta \\ a\gamma & a\delta & b\gamma & b\delta \\ c\alpha & c\beta & d\alpha & d\beta \\ c\gamma & c\delta & d\gamma & d\delta \end{pmatrix}.$$

Dæmatími 5: 18. september

Dæmi 6.5.3. Eiginleikar ástands-virkja

- (a) Fylkjastökin $\rho_{ii} = \langle i|\rho|i\rangle$, $\rho_{jj} = \langle j|\rho|j\rangle$, $\rho_{ij} = \langle i|\rho|j\rangle$ og $\rho_{ji} = \langle j|\rho|i\rangle$ má nota til að smíða 2×2 fylkið $A = \begin{pmatrix} \rho_{ii} & \rho_{ij} \\ \rho_{ji} & \rho_{jj} \end{pmatrix}$. Sýnið að (i) $\rho_{ii} \geq 0$ og $\rho_{jj} \geq 0$, (ii) $\det A = \rho_{ii}\rho_{jj} - |\rho_{ij}|^2 \geq 0$.
- (b) Gerum nú ráð fyrir að ρ lýsi hreinu ástandi þannig að rita megum $\rho = |\varphi\rangle\langle\varphi|$. Gerum þar að auki ráð fyrir að rita megum

$$\rho = \lambda\rho' + (1 - \lambda)\rho'', \quad \text{þar sem} \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Sýnið að þá gildir að $\rho = \rho' = \rho''$.

Dæmi 6.5.4. Fínvik og Zeeman-hrif fyrir raftvennd

Skoðum raftvennd sem samanstendur af rafeind og jáeind, andeind rafeindarinnar.

- (a) Reiknið orku grunnástandsins sem fall af grunnástandi vetnisatómsins $E_0 = -13,6 \text{ eV}$.
- (b) Pauli-fylkin eru gefin með $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, miðað við grunninn $\left\{ |+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Reiknið þinfeldin:

$$\sigma_x \otimes \sigma_x, \quad \sigma_y \otimes \sigma_y, \quad \sigma_z \otimes \sigma_z.$$

og útskýrið hvað hver þessara virkja gerir við ástöndin $|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle$ og $|--\rangle$.

- (c) Ákvarðið hvað $\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_2 = \sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y + \sigma_z \otimes \sigma_z$ gerir við $|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle$ og $|--\rangle$.
- (d) Skilgreinum nú eftirfarandi fjóra viga:

$$|I\rangle = |++\rangle, \quad |II\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle), \quad |III\rangle = |--\rangle, \quad |IV\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle).$$

Sýnið að þessi ástönd myndi þverstaðlaðan grunn fyrir Hilbert-rúmið $\mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Sýnið þar að auki að þetta séu eiginvigar $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$ og ákvarðið tilheyrandi eigingildi þeirra.

- (e) Skilgreinum nú ofanvarpsvirkjana P_A og P_B á hlutrum sem samsvara eigingildum $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$. Skrifðu sér í lagi ofanvarpsvirkjana á forminu $\lambda I + \mu \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$.
- (f) Skoðum nú virkja á forminu $P_{12} = \frac{1}{2}(I + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)$. Sýnið að P_{12} sé ofanvarpsvirki og að P_{12} víxlar á spuna í sæti 1 og 2, þ.e. sýnið að

$$P_{12}|++\rangle = |++\rangle, \quad P_{12}|+-\rangle = |-+\rangle, \quad P_{12}|-+\rangle = |+-\rangle, \quad P_{12} |--\rangle = |--\rangle.$$

- (g) Skilgreinum nú Hamilton-virkja sem er gefinn með

$$\mathcal{H}_0 = E_0 I + A \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2,$$

þar sem $A > 0$. Ákvarðið eigingildi og eiginviga $\mathcal{H}_0$.

- (h) Nú er kveikt á einsleitu segulsviði $\vec{B}$ í z -stefnu. Sýnið að Hamilton-virkinn sé gefinn með:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - \frac{e\hbar}{2m} B (\sigma_z \otimes I - I \otimes \sigma_z).$$

Skilgreinum svo $\frac{e\hbar}{2m} B = -Ax$ og ákvarðið eigingildi $\mathcal{H}$ sem fall af x og rissið upp mynd.

Dæmi 6.5.5. Spunabylgjur og seguleindir

Einfalt líkan af járnseglun lýsir henni sem keðju af lengd $N \gg 1$ þar sem að hver eind keðjunnar hefur spuna $\frac{1}{2}$ og bilið á milli einda keðjunnar er ℓ . Einfaldasta nálgunin er að gera ráð fyrir að einungis nágrannaverkun skipti máli. Þá má skrifa Hamilton-fall keðjunnar á eftirfarandi formi:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}NAI - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \vec{\sigma}_n \otimes \vec{\sigma}_{n+1}.$$

- (a) Færið rök fyrir því að öll eigingildi $\mathcal{H}$ séu jákvæð. Sýnið að grunnástandið $|\Phi_0\rangle$ samsvarar því að annaðhvort vísi allir spunarnir upp eða allir spunarnir niður.
- (b) Sýnið að rita megir

$$\mathcal{H} = NAI - A \sum_{n=0}^{N-1} P_{n,n+1} = A \sum_{n=0}^{N-1} (I - P_{n,n+1})$$

þar sem að $P_{n,n+1} = \frac{1}{2}(I + \vec{\sigma}_n \otimes \vec{\sigma}_{n+1})$ er ofanvarpsvirkinn frá því í lið (f) í dæmi 6.5.4.

- (c) Skilgreinum nú ástandið

$$|\psi_n\rangle = |++++\dots+-+\dots\rangle$$

sem er þ.a. það er $|-\rangle$ í n -ta sæti en öll hin sætin eru $|+\rangle$. Ákvarðið hvað $\mathcal{H}$ gerir við $|\psi_n\rangle$.

- (d) Skilgreinum nú ástöndin:

$$|k_s\rangle := \sum_{m=0}^{N-1} e^{ik_s n \ell} |\psi_n\rangle, \quad \text{með} \quad k_s = \frac{2\pi s}{N\ell}, \quad s \in \{0, 1, \dots, N-1\}.$$

Sýnið að $|k_s\rangle$ séu eiginvigrar $\mathcal{H}$ og ákvarðið tilheyrandi eigingildi E_k . Sýnið auk þess að fyrir lítil gildi á k_s þá er sveiflutíðni bylgjunnar $\omega_k = \frac{1}{\hbar} E_k \sim k_s^2$. Þetta skammtaástand $|k_s\rangle$ lýsir seguleindinni.

Dæmi 5.5.5. Vetnisjónin H_2^+

Skoðum einfalt líkan af vetnisjóninni H_2^+ sem samanstendur af tveimur róteindum sem liggja í $x = \pm \frac{r}{2}$ á x -ás. Umhverfis þær hringsólar rafeind.

- (a) Gerum nú ráð fyrir að rafeindin sé einnig á x -ás. Skrifð niður tilheyrandi rafmætti, $U(x)$ fyrir rafeindina og teiknið graf sem sýnir rafmættið sem fall af x .
- (b) Lýsa má kerfinu með Hamilton-virkja á forminu:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} E_0 & -A \\ -A & E_0 \end{pmatrix}.$$

Þar sem að E_0 táknar grunnástand vetnisatómsins. Ákvarðið eigingildi og eiginvigrar $\mathcal{H}$. Útskýrið hvers vegna $\mathcal{H}$ tekur þetta formkorn. Hvernig ber að túlka A ? Útskýrið hvers vegna við höfum að $A = A(r)$ og færið rök fyrir því að $A(r)$ sé vaxandi fall þar að auki sem að $\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = 0$.

- (c) Látum $E_{\pm}(r)$ tákna eigingildi $\mathcal{H}$ sem samsvara eiginástöndum rafeindarinnar. Færið rök fyrir því að heildarorka jónarinnar sé þá gefin með $E'_{\pm}(r) = E_{\pm}(r) + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$.
- (d) Nú er $A(r)$ gefið með $A(r) = \frac{ce^2}{4\pi\epsilon_0} e^{-r/b}$. Skilgreinum frávikið frá grunnástandi vetnisatómsins sem stærðina $\Delta E(r) := E'_+(r) - E_0$ og sýnið að lággildið sé $\Delta E(r_0) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} \left(1 - \frac{b}{r_0}\right)$.

Heimadæmi 5: 26. september

Dæmi 6.5.7. Bell-ójafnan og $E(\hat{a}, \hat{b})$

Látum $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$.

(a) Reiknið sveifluvæðirnar a_{+-} , a_{-+} og a_{--} í samræmi við jöfnu (6.46) í bókinni.

(b) Sýnið að

$$E(\hat{a}, \hat{b}) = \langle \Phi | (\vec{\sigma} \cdot \hat{a}) \otimes (\vec{\sigma} \cdot \hat{b}) | \Phi \rangle = -\hat{a} \cdot \hat{b}.$$

Lausn:

(a) Athugum fyrst að

$$|+, \hat{b}\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |-\rangle, \quad |-, \hat{b}\rangle = -\sin \frac{\theta}{2} |+\rangle + \cos \frac{\theta}{2} |-\rangle.$$

En það þýðir þá að

$$\begin{aligned} a_{++} &= \left(\langle + | \otimes \langle +, \hat{b} | \right) \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle - |-+\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\theta}{2}, \\ a_{+-} &= \left(\langle + | \otimes \langle -, \hat{b} | \right) \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle - |-+\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta}{2}, \\ a_{-+} &= \left(\langle - | \otimes \langle +, \hat{b} | \right) \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle - |-+\rangle) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta}{2}, \\ a_{--} &= \left(\langle - | \otimes \langle -, \hat{b} | \right) \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle - |-+\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

(b) Nú er

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{a} = \sigma_x a_x + \sigma_y a_y + \sigma_z a_z = \begin{pmatrix} a_z & a_x - ia_y \\ a_x + ia_y & -a_z \end{pmatrix}.$$

Með beinhörðum reikningum höfum við því að

$$\begin{aligned} E(\hat{a}, \hat{b}) &= \langle \Phi | (\vec{\sigma} \cdot \hat{a}) \otimes (\vec{\sigma} \cdot \hat{b}) | \Phi \rangle \\ &= \frac{1}{2} (\langle 01 | - \langle 10 |) \left(\begin{pmatrix} a_z & a_x - ia_y \\ a_x + ia_y & -a_z \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_z & b_x - ib_y \\ b_x + ib_y & -b_z \end{pmatrix} \right) (|01\rangle - |10\rangle) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_z b_z & a_z(b_x - ib_y) & (a_x - ia_y)b_z & (a_x - ia_y)(b_x - ib_y) \\ a_z(b_x + ib_y) & -a_z b_z & (a_x - ia_y)(b_x + ib_y) & -b_z(a_x - ia_y) \\ (a_x + ia_y)b_z & (a_x + ia_y)(b_x - ib_y) & -a_z b_z & -a_z(b_x - ib_y) \\ (a_x + ia_y)(b_x + ib_y) & -b_z(a_x + ia_y) & -a_z(b_x + ib_y) & a_z b_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_z(b_x - ib_y) - (a_x - ia_y)b_z \\ -a_z b_z - (a_x - ia_y)(b_x + ib_y) \\ (a_x + ia_y)(b_x - ib_y) + a_z b_z \\ -b_z(a_x + ia_y) + a_z(b_x + ib_y) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (-a_z b_z - (a_x - ia_y)(b_x + ib_y) - (a_x + ia_y)(b_x - ib_y) - a_z b_z) \\ &= -a_z b_z - a_x b_x - a_y b_y \\ &= -\hat{a} \cdot \hat{b}. \end{aligned}$$

Þórðardæmi frá lokaprófi árið 2020

Tveir skammtabitar eru í ástandinu

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{30}} (|00\rangle + 2|01\rangle + 3|10\rangle + 4|11\rangle).$$

- (i) Sýnið að þetta ástand sé flækt.
- (ii) Ákvarðið þéttleikafylkið sem lýsir ástandi fyrri skammtabitans $\rho_1 = \text{Tr}_2 \rho$ þar sem $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Ákvarðið einnig þéttleikafylki $\rho_2 = \text{Tr}_1 \rho$. Finnið eigingildi fylkjanna.
- (iii) Finnið líkur þess að finna fyrri skammtabitann í ástandinu

$$|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle).$$

Finnið tilsvareandi líkur fyrir seinni skammtabitann. Hverjar eru líkur þess að finna báða skammtabita í ástandinu $|a\rangle$?

Lausn:

- (i) Rifjum upp að fyrir tveggja bita skammtakerfi þá gildir að

$$a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle$$

er flækt þ.p.a.a. $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$.

Okkur nægir því að athuga að $\det \left[\frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right] = -\frac{1}{15} \neq 0$ svo þetta ástand er flækt.

- (ii) Þéttleikafylkið er gefið með

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}.$$

Almennt má reikna hlutsporið fyrir tveggja bita ástand með

$$\rho = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & r & s \end{pmatrix}, \quad \rho_1 = \text{Tr}_2 \rho = \begin{pmatrix} a+f & c+h \\ i+n & k+s \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \text{Tr}_1 \rho = \begin{pmatrix} a+k & b+l \\ e+r & f+s \end{pmatrix}.$$

Útskýrum aðeins hvernig að þetta var fengið. Samkvæmt skilgreiningunni er

$$\rho_1 = \text{Tr}_2 \rho = I \otimes \langle 0| \rho I \otimes |0\rangle + I \otimes \langle 1| \rho I \otimes |1\rangle.$$

En nú má skrifa virkjana á fylkjaformi sem

$$I \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Þar með höfum við að

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rho \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rho \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+f & c+h \\ i+n & k+s \end{pmatrix}.$$

Eins má reikna ρ_2 með þessum hætti. Í þessu dæmi höfum við því

$$\rho_1 = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}.$$

Eigingildi beggja þessara fylkja eru

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{30}(15 \pm \sqrt{221}).$$

(iii) Við athugum að

$$|aa\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle).$$

svo

$$|a\rangle\langle a| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |aa\rangle\langle aa| = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En það gefur að

$$\text{Tr}(\rho_1 |a\rangle\langle a|) = \text{Tr}\left(\frac{1}{30} \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \text{Tr}\left(\frac{1}{60} \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 36 & 36 \end{pmatrix}\right) = \frac{16+36}{60} = \frac{13}{15}.$$

$$\text{Tr}(\rho_2 |a\rangle\langle a|) = \text{Tr}\left(\frac{1}{30} \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \text{Tr}\left(\frac{1}{60} \begin{pmatrix} 24 & 24 \\ 34 & 34 \end{pmatrix}\right) = \frac{24+34}{60} = \frac{29}{30}.$$

$$\text{Tr}(\rho |aa\rangle\langle aa|) = \text{Tr}\left(\frac{1}{30} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{5}{6}.$$

Takið einnig eftir að $\frac{13}{15} \cdot \frac{29}{30} \approx 0,838$ en $\frac{5}{6} \approx 0,833$.

Miðmísserispróf í Skammtafræði 1

Dæmi 1: Rafeind er í spunaástandi

$$|\phi\rangle = B((1 - 2i)|+\rangle + 2|-\rangle),$$

þar sem $|\pm\rangle$ eru stöðluð eiginástönd virkjans S_z .

- (a) Ákvarðið fastann B þannig að spunaástandið sé staðlað.
- (b) Reiknið væntigildi mælistærðanna S_z og S_x í þessu ástandi.
- (c) Hvaða mæligildi koma til greina fyrir S_z og hvaða líkur eru á hverju um sig?
- (d) Mæling er framkvæmd á S_x strax á eftir mælingu á S_z . Hvaða mæligildi koma til greina í seinni mælingunni og með hvaða líkum?

Lausn: (a) Við athugum að

$$1 = \langle\phi|\phi\rangle = |B|^2 \left[|1 - 2i|^2 + 2^2 \right] = 9|B|^2 \implies |B| = \frac{1}{3}.$$

(b) Væntigildin má síðan reikna með

$$\begin{aligned}\langle\phi|S_z|\phi\rangle &= \frac{\hbar}{2} \langle\phi|\sigma_z|\phi\rangle = \frac{\hbar}{18} (1 + 2i \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - 2i \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{18}, \\ \langle\phi|S_x|\phi\rangle &= \frac{\hbar}{2} \langle\phi|\sigma_x|\phi\rangle = \frac{\hbar}{18} (1 + 2i \quad 2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - 2i \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2\hbar}{9}.\end{aligned}$$

(c) Hugsanleg gildi á S_z eru $\pm\frac{\hbar}{2}$. Líkurnar eru

$$\text{Upp: } \left| \frac{1}{3}(1 - 2i) \right|^2 = \frac{5}{9}, \quad \text{Niður: } \left| \frac{2}{3} \right|^2 = \frac{4}{9}.$$

(d) Ef við þekkjum spuna í z -stefnu þá vitum við ekkert um spuna í x -stefnu. Því eru hugsanleg gildi sem við getum mælt $\pm\frac{\hbar}{2}$ með helmingslíkum á hvoru um sig.

Heimadæmi 8: 17. október

Dæmi 9.7.1. Heisenberg ójafnan

(a) Látum $\varphi(x)$ vera þverstaðlað ástand og skilgreinum

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left| x\varphi(x) + \alpha \frac{d\varphi}{dx} \right|^2 \geq 0.$$

þar sem $\alpha \in \mathbb{R}$. Sýnið að

$$I(\alpha) = \langle X^2 \rangle - \alpha + \alpha^2 \langle K^2 \rangle$$

og sýnið að

$$\langle X^2 \rangle \langle K^2 \rangle \geq \frac{1}{4}.$$

(b) Hvernig er hægt að breyta ofangreindum rökum til þess að sýna að $\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}$.

(c) Sýnið að ef jafnaðarmerkið gildir þá sé φ Gauss-bylgjupakki.

Lausn: Við fáum með beinum reikningum að

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left| x\varphi(x) + \alpha \frac{d\varphi}{dx} \right|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[x^2 |\varphi|^2 + \alpha^2 \frac{d\varphi^*}{dx} \frac{d\varphi}{dx} + \alpha x \varphi^* \frac{d\varphi}{dx} + \alpha x \varphi \frac{d\varphi^*}{dx} \right]. \end{aligned}$$

Með því að hluttegra þannig að allar afleiðurnar endi á φ en ekki á φ^* og henda öllum jaðarliðunum þá fáum við

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \varphi^* \left[x^2 \varphi - \alpha^2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \alpha x \frac{d\varphi}{dx} - \alpha \frac{d}{dx} (x\varphi) \right] \\ &= \langle X^2 \rangle + \frac{\alpha^2}{\hbar^2} \langle P^2 \rangle - \alpha \end{aligned}$$

þar sem að við notuðum að $P = -i\hbar \frac{d}{dx}$. Þar sem að $I(\alpha) \geq 0$ þá fáum við með því að finna lággildi sem fall af α að

$$I'(\alpha) = \frac{2\alpha}{\hbar^2} \langle P^2 \rangle - 1 \stackrel{!}{=} 0 \implies \alpha = \frac{\hbar^2}{2\langle P^2 \rangle}$$

En það gefur því að lággildið er tekið í

$$I\left(\frac{\hbar^2}{2\langle P^2 \rangle}\right) = \langle X^2 \rangle + \frac{\hbar^2}{4\langle P^2 \rangle} - \frac{\hbar^2}{2\langle P^2 \rangle} \geq 0 \implies \langle X^2 \rangle \langle P^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}.$$

Með því að hliðra um $\langle X \rangle$ og $\langle P \rangle$ þá fæst að

$$\Delta X \Delta P \geq \sqrt{\langle X^2 \rangle \langle P^2 \rangle} \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Athugum loks að jafnaðarmerkið gefur að

$$I(\alpha) = 0 \implies x\varphi(x) + \alpha \frac{d\varphi}{dx} = 0 \implies \frac{d}{dx} \left(\alpha e^{\frac{1}{2\alpha} x^2} \varphi(x) \right) = 0 \implies \varphi(x) = \varphi_0 e^{-\frac{1}{2\alpha} x^2}.$$

Dæmi 2.

Ástandi agnar sem hreyfist í einni vídd er lýst með ket-vigrinum $|\psi\rangle$. Virkjarnir $U(\lambda)$ og $W(\sigma)$ eru skilgreindir þannig að

$$\begin{aligned}\langle x|U(\lambda)|\psi\rangle &= e^{i\lambda x}\psi(x), \\ \langle x|W(\sigma)|\psi\rangle &= \psi(x+\sigma),\end{aligned}$$

þar sem að $\lambda, \sigma \in \mathbb{R}$ og $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$.

- (a) Sýnið að U og W séu einoka virkjar.
- (b) Finnið sjálfoka virkja $A(\lambda)$ og $B(\sigma)$ þannig að $U(\lambda) = e^{iA(\lambda)}$ og $W(\sigma) = e^{iB(\sigma)}$.
- (c) Sýnið að $[U(\lambda), W(\sigma)] = 0$ þá og því aðeins að $\lambda\sigma = 2\pi n$ þar sem $n \in \mathbb{Z}$.

Lausn: Við athugum fyrst að

$$\langle x|U^\dagger(\lambda)|\psi\rangle = e^{-i\lambda x}\psi(x), \quad \langle x|W^\dagger(\sigma)|\psi\rangle = \psi(x-\sigma)$$

En af því leiðir beint að $U^\dagger U = I = W^\dagger W$. Þá eru virkjarnir A og B gefnir með

$$A(\lambda) = \lambda X, \quad B(\sigma) =$$

og loks athugum við að

$$[U(\lambda), W(\sigma)] =$$

Heimadæmi 9: 24. október

Dæmi 1.

Rúmspeglun má lýsa með virkjanum Π sem verkar á föll samkvæmt $\Pi f(x) = f(-x)$.

- (a) Sýnið að Π sé sjálfoka. Hver eru eigingildi Π ?
- (b) Við segjum að virki A sé jafnstæður ef $\Pi A \Pi = A$. Sýnið að jafnstæður virki víxlar við rúmspeglunarvirkjann, þ.e.a.s. að $[\Pi, A] = 0$.
- (c) Látum nú spunalausa ögn með massa m hreyfast í mætti $V(x)$ í einni vídd. Hvaða skilyrði þarf $V(x)$ að uppfylla til að Hamiltonvirkinn sé jafnstæður? Sýnið að ef þetta skilyrði er uppfyllt, og $|\psi\rangle$ er eiginástand H með eigingildi E þá sé $\Pi|\psi\rangle$ einnig eiginástand H með sama eigingildi.
- (d) Notið niðurstöðuna úr liðnum hér á undan, ásamt þeirri staðreynd að orkuróf spunalausrar agnar í einni vídd er ávallt án margfeldni, til að draga ályktun um hegðun eiginfalla jafnstæðs Hamiltonvirkja við rúmspeglun.

Lausn: Við byrjum á því að athuga að $\Pi^2 f(x) = \Pi f(-x) = f(x)$ svo Π er sjálfoka. Athugum síðan að

$$\Pi f(x) = \lambda f(x) \implies f(x) = \Pi^2 f(x) = \Pi(\lambda f(x)) = \lambda \Pi f(x) = \lambda^2 f(x)$$

en þar með eru eigingildi $f(x)$ nauðsynlega $\lambda = \pm 1$. Skoðum síðan

$$[\Pi, A] = \Pi A - A \Pi = \Pi A \Pi^2 - A \Pi = A \Pi - A \Pi = 0.$$

Athugum síðan að fyrir Hamilton-virkjann

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

þá fáum við að

$$\Pi H \Pi \psi(x) = \Pi H \psi(-x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(-x) \psi(x)$$

en af því leiðir því að til þess að Hamilton-virkinn sé jafnstæður þá þarf $V(-x) = V(x)$ að vera jafnstætt fall. En af þessu leiðir því að $[\Pi, H] = 0$ svo eiginástönd Hamiltonvirkjans eru einnig eiginástönd Π . Höfum síðan að

$$H(\Pi \psi) = \Pi H \psi = \Pi E \psi = E \Pi \psi.$$

svo $\Pi \psi$ er eiginástand H með sama eigingildi. Loks athugum við að þar sem að orkurófið er án margfeldni og við höfum að $\psi(x)$ og $\Pi \psi(x)$ hafa sömu eigingildi en þar með er $\psi(x) = \psi(-x)$ svo bylgjuföllin eru einnig jafnstæð.

Dæmi 2.

Ögn með massa m er í einvíðum óendanlega djúpum mættisbrunni,

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{ef } 0 < x < a, \\ \infty & \text{annars.} \end{cases}$$

Ástandi agnarinnar klukkan $t = 0$ er lýst með bylgjufallinu

$$\psi(x, 0) = \begin{cases} A \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) & \text{ef } 0 < x < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

- (a) Ákvarðið væntigildi mælistærðanna X og P klukkan $t = 0$.
- (b) Nú er orka agnarinnar mæld. Hvert er væntigildi X eftir mælinguna?
- (c) Hvaða líkur eru á að mælingin á orku agnarinnar gefi lægstu mögulegu orku í mættinu $V(x)$?

Lausn: (a) Við byrjum á því að ákvarða stuðulinn A en hann má ákvarða samkvæmt:

$$|A|^2 \int_0^{\frac{a}{2}} \sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right) dx = \frac{|A|^2 a}{4} \stackrel{!}{=} 1 \implies A = \frac{2}{\sqrt{a}}.$$

Væntigildin á X og P eru síðan gefin með

$$\langle X \rangle_{t=0} = |A|^2 \int_0^{\frac{a}{2}} x \sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right) dx = \frac{a^2 A^2}{16} = \frac{1}{4}a.$$

$$\langle P \rangle_{t=0} = -i\hbar |A|^2 \int_0^{\frac{a}{2}} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \frac{d}{dx} \left(\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right) dx = -\frac{2\pi i \hbar |A|^2}{a} \int_0^{\frac{a}{2}} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) dx = 0.$$

(b) Eftir mælingu á orkunni þá fellur ástandið niður í eitt af eiginástöndum Hamilton-virkjans en þau eru gefin með

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

en öll þau ástönd hafa væntigildi $\frac{a}{2}$ svo það er væntigildi X eftir mælinguna á orku agnarinnar.

(c) Loks þurfum við að liða upphafsástandið í línulega samantekt af eiginástöndum Hamilton-virkjans. Skrifum því

$$\psi(x, 0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} a_n \psi_n(x)$$

Við rifjum síðan upp að leiðin til þess að ákvarða stuðlana a_n er með því að nýta sér að eiginástöndin eru hornrétt hver á annað þannig að með því að margfalda báðar hliðar með $\psi_m(x)$ og tegra fæst:

$$a_m = \int_0^a \psi_m(x) \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} a_n \psi_n(x) dx = \int_0^{\frac{a}{2}} \psi_m(x) \psi(x) dx = \frac{4\sqrt{2} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)}{4\pi - m^2\pi}$$

ef $m \neq 2$ annars er $a_2 = 1/\sqrt{2}$. En til þess að svara spurningunni þurfum við einungis a_1 svo við höfum að líkurnar eru:

$$|a_1|^2 = \left(\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\right)^2 = \frac{32}{9\pi^2} \approx 0,36.$$

Heimadæmi 10: 31. október

Dæmi 1.

Ögn með massa m og orku $E > V_0 > 0$ hreyfist í einni vídd í þröskuldsætti

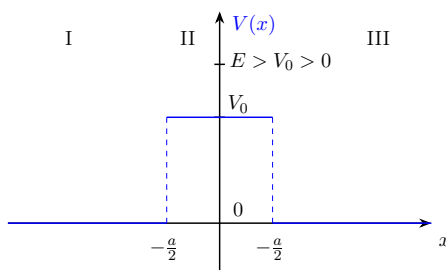
$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{ef } |x| < \frac{a}{2}, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

(a) Sýnið að gegnstreymisstuðullinn sé gefinn með

$$T = \frac{4E(E - V_0)}{4E(E - V_0) + V_0^2 \sin^2\left(\frac{a}{\hbar} \sqrt{2m(E - V_0)}\right)}$$

(b) Teiknið graf sem sýnir T sem fall af a fyrir fast gildi á $E > V_0$.

Lausn: (a) Teiknum mynd af mættinu:



Mynd 1: Þröskuldsættið.

Með því að leysa Schrödinger-jöfnuna á hverju svæði fyrir sig þá fæst að

$$\psi_{\text{I}}(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

$$\psi_{\text{II}}(x) = Ce^{i\kappa x} + De^{-i\kappa x}$$

$$\psi_{\text{III}}(x) = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx}$$

þar sem við skilgreindum

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}, \quad \kappa = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - V_0)}.$$

Við krefjumst þess síðan að $G = 0$ (ekkert endurkastast úr óendanlegu) og að innfallið sé $A = 1$ og notum síðan jaðarskilyrðin í $\pm \frac{a}{2}$ til þess að fá

$$e^{-ik\frac{a}{2}} + Be^{ik\frac{a}{2}} = Ce^{-i\kappa\frac{a}{2}} + De^{i\kappa\frac{a}{2}}$$

$$Ce^{i\kappa\frac{a}{2}} + De^{-i\kappa\frac{a}{2}} = Fe^{ik\frac{a}{2}}$$

$$ike^{-i\kappa\frac{a}{2}} - i\kappa Be^{i\kappa\frac{a}{2}} = i\kappa C^{-i\kappa\frac{a}{2}} - i\kappa De^{i\kappa\frac{a}{2}}$$

$$i\kappa Ce^{i\kappa\frac{a}{2}} - i\kappa De^{-i\kappa\frac{a}{2}} = i\kappa Fe^{ik\frac{a}{2}}$$

sem við getum endurskrifað á fylkjaformi sem

$$\begin{pmatrix} -e^{ik\frac{a}{2}} & e^{-i\kappa\frac{a}{2}} & e^{i\kappa\frac{a}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\kappa\frac{a}{2}} & e^{-i\kappa\frac{a}{2}} & -e^{ik\frac{a}{2}} \\ i\kappa e^{ik\frac{a}{2}} & i\kappa e^{-i\kappa\frac{a}{2}} & -i\kappa e^{i\kappa\frac{a}{2}} & 0 \\ 0 & i\kappa e^{i\kappa\frac{a}{2}} & -i\kappa e^{-i\kappa\frac{a}{2}} & -i\kappa e^{ik\frac{a}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \\ D \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-ik\frac{a}{2}} \\ 0 \\ i\kappa e^{-i\kappa\frac{a}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

En þetta er einfalt jöfnuhneppi sem hefur lausnir

$$\begin{aligned} B &= \frac{e^{-iak}(k^2 - \kappa^2)}{k^2 + \kappa^2 + 2ik\kappa \cot(a\kappa)}, \\ C &= -\frac{2e^{-\frac{1}{2}ia(k-\kappa)}k(k+\kappa)}{e^{2ia\kappa}(k-\kappa)^2 - (k+\kappa)^2}, \\ D &= \frac{2e^{-\frac{1}{2}ia(k-3\kappa)}k(k-\kappa)}{e^{2ia\kappa}(k-\kappa)^2 - (k+\kappa)^2}, \\ F &= \frac{2ie^{-iak}k\kappa}{2ik\kappa \cos(a\kappa) + (k^2 + \kappa^2) \sin(a\kappa)}. \end{aligned}$$

En þar með er gegnstreymisstuðullinn gefinn með

$$\begin{aligned} T = |F|^2 &= \frac{4k^2\kappa^2}{4k^2\kappa^2 \cos^2(a\kappa) + (k^2 + \kappa^2)^2 \sin^2(a\kappa)} \\ &= \frac{4k^2\kappa^2}{4k^2\kappa^2 (\cos^2(a\kappa) + \sin^2(a\kappa)) + (k^2 - \kappa^2)^2 \sin^2(a\kappa)} \\ &= \frac{4E(E - V_0)}{4E(E - V_0) + V_0^2 \sin^2(a\kappa)} \end{aligned}$$

þar sem að í lokaskrefinu notuðum við að

$$k^2\kappa^2 = \frac{4m^2}{\hbar^4}E(E - V_0), \quad (k^2 - \kappa^2)^2 = \frac{4m^2V_0^2}{\hbar^4}$$

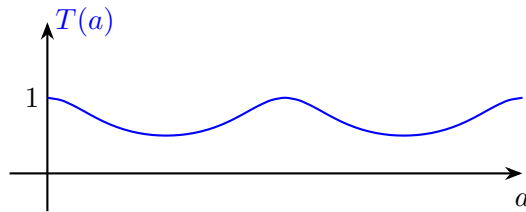
(b) Til þess að teikna grafið þurfum við fyrst að átta okkur á útgildunum

$$T'(a) \stackrel{!}{=} 0 \implies \sin\left(\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(E - V_0)}\right) = 0 \implies \frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(E - V_0)} = n\pi \implies a = \frac{n\hbar\pi/2}{\sqrt{2m(E - V_0)}}.$$

En í þessu dæmi er a strangt jákvæð stærð (lengd brunnsins) og gildin á T í þessum útgildum eru gefin með

$$T_{\max} = T(0) = 1, \quad T_{\min} = T\left(\frac{\hbar\pi/2}{\sqrt{2m(E - V_0)}}\right) = \frac{4E(E - V_0)}{(2E - V_0)^2} > 0.$$

og fallið sveiflast milli þessara gilda með lotu $\hbar\pi/\sqrt{2m(E - V_0)}$. Grafið verður því:



Mynd 2: Graf af hegðun gegnstreymisstuðulsins sem fall af lengd þröskuldsins, a .

Dæmi 10.7.4. Hverfipungi $j = \frac{1}{2}$ og $j = 1$

(a) Nýtið ykkur niðurstöðuna í jöfnum (10.22-10.23) úr Bellac, þ.e.

$$\begin{aligned}\langle j'm'|J_0|jm\rangle &= m\delta_{j'j}\delta_{m'm}, \\ \langle j'm'|J_{\pm}|jm\rangle &= [j(j+1) - mm']^{1/2}\delta_{j'j}\delta_{m',m\pm 1}.\end{aligned}$$

til að ákvarða S_x, S_y og S_z fyrir spuna $j = \frac{1}{2}$.

(b) Notið síðan jöfnu (10.23) til þess að ákvarða J_x, J_y og J_z fyrir spuna $j = 1$.

(c) Örspönnuðirnir

$$T_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad T_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

tengjast J_x, J_y og J_z fyrir spuna $j = 1$ með þeim hætti að ef

$$\hat{r} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

þá gildir að $J_i = U^\dagger T_i U$ þar sem

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Lausn: (a) Út frá fylkjastökunum sjáum við að fyrir $j' = j = \frac{1}{2}$ fæst fyrir $m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ að

$$\langle -\frac{1}{2}|S_{\pm}|-\frac{1}{2}\rangle = 0, \quad \langle \frac{1}{2}|S_{\pm}|-\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}}\delta(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \pm 1),$$

$$\langle -\frac{1}{2}|S_{\pm}|\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}}\delta(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \pm 1), \quad \langle \frac{1}{2}|S_{\pm}|\frac{1}{2}\rangle = 0.$$

sem gefur okkur að

$$S_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = S_z$$

En hér er $S_z = S_0$ og $S_{\pm} = S_x \pm iS_y$ sem gefur að

$$S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Við reiknum þá aftur fylkjastök nú með $j' = j = 1$ og $m = -1, 0, 1$. Fáum þá

$$\langle -1|J_{\pm}| -1\rangle = 0, \quad \langle -1|J_{\pm}|0\rangle = \sqrt{2}\delta(-1, 0 \pm 1), \quad \langle -1|J_{\pm}|1\rangle = 0,$$

$$\langle 0|J_{\pm}| -1\rangle = \sqrt{2}\delta(0, -1 \pm 1), \quad \langle 0|J_{\pm}|0\rangle = 0, \quad \langle 0|J_{\pm}|1\rangle = \sqrt{2}\delta(0, 1 \pm 1),$$

$$\langle 1|J_{\pm}| -1\rangle = 0, \quad \langle 1|J_{\pm}|0\rangle = \sqrt{2}\delta(1, 0 \pm 1), \quad \langle 1|J_{\pm}|1\rangle = 0.$$

sem gefur því að

$$J_+ = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_- = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

og þar með ályktum við að

$$J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Með smá Mathematica kóða fæst að

```
In[1]:= Tx = {{0, 0, 0}, {0, 0, -I}, {0, I, 0}};
Ty = {{0, 0, I}, {0, 0, 0}, {-I, 0, 0}};
Tz = {{0, -I, 0}, {I, 0, 0}, {0, 0, 0}};
Jx = 1/Sqrt[2] {{0, 1, 0}, {1, 0, 1}, {0, 1, 0}};
Jy = 1/Sqrt[2] {{0, -I, 0}, {I, 0, -I}, {0, I, 0}};
Jz = {{1, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, -1}};
U = 1/Sqrt[2] {{-1, 0, 1}, {-I, 0, -I}, {0, Sqrt[2], 0}};

In[2]:= ConjugateTranspose[U] . Tx . U == Jx // Simplify
ConjugateTranspose[U] . Ty . U == Jy // Simplify
ConjugateTranspose[U] . Tz . U == Jz // Simplify

Out[2]= True
True
True
```

Heimadæmi 11: 13. nóvember

Dæmi 1

Ástandi vetnisfrumeindar á tilteknum tíma er lýst með bylgjufallinu:

$$\psi(x, y, z) = N(x + y + z)e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}/(2a_0)}$$

þar sem a_0 er Bohr-geislinn og $N > 0$ er fasti.

- (a) Ákvarðið N með því að staðla bylgjufallið.
- (b) Hvaða mæligildi koma til greina fyrir orku frumeindarinnar og $\vec{L}^2$ í þessu ástandi?
- (c) Hvaða líkur eru á að mæling á L_z gefi 0?
- (d) Gerum ráð fyrir að mæling á L_z gefi 0. Hvaða mæligildi koma til greina fyrir virkjann $L_x^2 + L_y^2$ eftir það?

Lausn: Við athugum þá að:

$$\begin{aligned} 1 = \|\psi\|^2 &= N^2 \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^4 \sin \theta (\sin \phi \sin \theta + \cos \phi \sin \theta + \cos \theta)^2 e^{-r/a_0} \\ &= 4\pi N^2 \int_0^\infty dr r^4 e^{-r/a_0} = 96\pi a_0^5 N^2. \end{aligned}$$

sem gefur að

$$N = \frac{1}{\sqrt{96\pi a_0^5}}.$$

Athugum síðan að við getum umritað ψ þannig að hæðið á bylgjuföllumunum verði skýrara. Fáum hér að:

$$f(\theta, \phi) = (\sin \phi \sin \theta + \cos \phi \sin \theta + \cos \theta) = \sum_{l,m} c_{lm} Y_l^m(\theta, \phi)$$

sem gefur okkur að:

$$c_{lm} = \int d\Omega (Y_l^m(\theta, \phi))^* f(\theta, \phi)$$

Hér fæst því að:

$$\psi(r, \theta, \phi) = N \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \left((i-1) Y_1^1 + (i+1) Y_1^{-1} + \sqrt{2} Y_1^0 \right) r e^{-r/(2a_0)}.$$

En geislalægi hlutinn er í beinu hlutfalli við $R_{nl}(r) = R_{21}(r) = \frac{1}{4a_0^2} r e^{-r/2a_0}$ svo að $n = 2$. Þannig að einu gildin sem að koma til greina á orkunni eru með $n = 2$, $l = 1$ og $m \in \{-1, 0, 1\}$. En orkugildin í vetnisatóminu eru

$$E_n = -\frac{R_\infty}{n^2} = -\frac{R_\infty}{4}.$$

Hugsanleg gildi fyrir $\vec{L}^2$ eru síðan

$$l(l+1)\hbar^2 = 2\hbar^2$$

því $l = 1$ fyrir öll ástöndin. Þar sem $|1+i| = |1-i| = \sqrt{2}$ þá eru jafnar líkur á öllum ástöndunum með $m = 0, -1, 1$ svo líkurnar á því að L_z gefi núll eru $1/3$. Loks ef mæling á L_z gefur núll þá fellur ástandið niður í

$$\psi_0 = MY_1^0 r e^{-r/(2a_0)}$$

þar sem að M er stöðlunarfasti. Í því tilviki er $\vec{L}^2\psi_0 = (L_x^2 + L_y^2 + L_z^2)\psi_0 = (L_x^2 + L_y^2)\psi_0$ svo einu mæligildin sem koma til greina fyrir virkjann $L_x^2 + L_y^2$ eru þau sömu og fyrir $\vec{L}^2$ þ.e. $2\hbar^2$.

Dæmi 2

Þrjár agnir, allar með spunatölu $s = \frac{1}{2}$, víxlverka með Hamiltonvirkjanum

$$H = -A(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3 + \vec{S}_3 \cdot \vec{S}_1)$$

(a) Finnið öll eigingildi H og margfeldni þeirra.

(b) Hvert er ástand kerfisins klukkan $t > 0$ ef það er $|\psi(0)\rangle = |++-\rangle$ klukkan $t = 0$?

Hér er aðeins öðruvísi lausn til að sýna aðra leið sem var hægt að gera þetta.

Lausn: (a) Við athugum að $\vec{S}_1 = \frac{\hbar}{2}(\sigma_{1x}, \sigma_{1y}, \sigma_{1z})$ svo það er einfalt mál að reikna þinfeldin sem koma fyrir. Fáum að:

$$H = -\frac{A\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

sem hefur eigingildi $\pm \frac{3A\hbar^2}{4}$ með margfeldni 4 hvort um sig.

(b) Þurfum að ákvarða hvaða línulega samantekt af eiginástöndum Hamilton-virkjans þetta eru. Athugum fyrst að ástandið sem við höfum má skrifa á þinfeldisformi sem:

$$|++-\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Þurfum að ákvarða hvaða línulega samantekt þetta er af eiginástöndum Hamilton-virkjans en þau eru

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En þá má ákvarða hvernig línuleg samantekt upphafsástandið er af þessum eiginástöndum og

við fáum

$$|++-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en þar með verður ástandið sem fall af t gefið með:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{3}e^{+3A\hbar t/4} |3\rangle - \frac{1}{3}e^{-3A\hbar t/4} |7\rangle + \frac{2}{3}e^{-3A\hbar t/4} |8\rangle$$

þar sem $|i\rangle$ táknar i -ta eiginvigur Hamilton-virkjans.

Heimadæmi 12: 14. nóvember

Dæmi 1

- (a) Ástandi hreintóna sveifls klukkan $t = 0$ er lýst með bylgjufallinu

$$\psi(x, 0) = A(1 - 2\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x)^2 e^{-m\omega x^2/(2\hbar)},$$

þar sem $A \in \mathbb{C}$ er fasti. Hvert er væntigildi orku sveifilsins í þessu ástandi?

- (b) Klukkan $t = T > 0$ hefur bylgjufallið þróast yfir í

$$\psi(x, T) = B(1 + 2\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x)^2 e^{-m\omega x^2/(2\hbar)},$$

með $B \in \mathbb{C}$. Ákvarðið lægsta mögulega gildi T .

Lausn: (a) Byrjum á því að kynna einingarlausar stærðir með því að setja $\alpha = \frac{m\omega}{\hbar}$ og $y = \sqrt{\alpha}x$ þá má rita

$$\psi(x, 0) = A(1 - 2y)^2 e^{-y^2/2} = A(1 - 4y + 4y^2)e^{-y^2/2}.$$

Við athugum síðan að fyrstu þrjú orkulægstu ástöndin eru gefin með

$$\begin{aligned} |0\rangle &= \psi_0 = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-y^2/2}, \\ |1\rangle &= \psi_1(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \sqrt{2}y e^{-y^2/2}, \\ |2\rangle &= \psi_2(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2}}(2y^2 - 1)e^{-y^2/2}. \end{aligned}$$

svo ástandið sem við höfum fengið hlítur að vera línuleg samantekt af þessum þremur ástöndum sem gefur eftirfarandi jöfnuhneppi:

$$a + \sqrt{2}by + \frac{c}{\sqrt{2}}(2y^2 - 1) = 1 - 4y + 4y^2 \implies (a, b, c) = (3, -2\sqrt{2}, +2\sqrt{2})$$

með öðrum orðum er

$$\psi(x, 0) = A(3|0\rangle - 2\sqrt{2}|1\rangle + 2\sqrt{2}|2\rangle).$$

stuðullinn A ákvarðast þar með af því að $1 = A^2(9 + 8 + 8)$ sem gefur að $A = \frac{1}{5}$. En þar sem $H = \hbar\omega(N + \frac{1}{2})$. En þá er væntigildið á orkunni einfaldlega:

$$\langle\psi|H|\psi\rangle = \frac{\hbar\omega}{2} + \hbar\omega\langle\psi|N|\psi\rangle = \frac{\hbar\omega}{2} + \hbar\omega\left(0 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 1 \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)^2\right) = \frac{73}{50}\hbar\omega.$$

(b) Þurfum fyrst að ákvarða hvaða línulega samantekt þetta er af eiginástöndunum sem um ræðir. Með sömu aðferð og hér að ofan fæst að

$$\psi(x, T) = \frac{e^{i\phi}}{5} \left(3|0\rangle + 2\sqrt{2}|1\rangle + 2\sqrt{2}|2\rangle\right).$$

Tímaþróunarvirkinn er síðan þannig að:

$$\psi(x, t) = \frac{3}{5}e^{-it/2}|0\rangle - \frac{2\sqrt{2}}{5}e^{-3it/2}|1\rangle + \frac{2\sqrt{2}}{5}e^{5it/2}|2\rangle$$

þurfum því að ákvarða t þannig að

$$e^{-it/2} = e^{i\phi}, \quad e^{-3it/2} = -e^{i\phi}, \quad e^{-5it/2} = e^{i\phi}.$$

en þetta getur gerst þegar $t = T = \frac{\pi}{2}$ ef $e^{i\phi} = -i$.

Dæmi 2

Samfasa ástand hreintóna sveifils er ástand sem uppfyllir

$$a|z\rangle = z|z\rangle,$$

þar sem a er lækunarvirkinn og $z \in \mathbb{C}$ er fasti.

- (a) Reiknið væntigildi staðsetningarvirkjans X og skriðþungavirkjans P í stöðluðu samfasa ástandi $|z\rangle$.
- (b) Reiknið víxlana $[a, (a^\dagger)^n]$ og $[a, e^{\alpha a^\dagger}]$ fyrir heiltölu n og fasta $\alpha \in \mathbb{C}$.
- (c) Sýnið að ástandið $e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle$ sé samfasa ástand.

Lausn: (a) Við höfum fyrst að:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P}), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P}).$$

en þessi vennisl má leysa fyrir $\hat{X}$ og $\hat{P}$ og fá

$$X = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2} \hat{X} = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2} (a + a^\dagger), \quad P = (m\omega\hbar)^{1/2} \hat{P} = \left(\frac{m\omega\hbar}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{i}(a - a^\dagger)$$

En nú er $a|z\rangle = z|z\rangle$ og þar með $\langle z|a^\dagger = \langle z|z^*$ svo við fáum því að:

$$\begin{aligned} \langle z|X|z\rangle &= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2} \langle z|a + a^\dagger|z\rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2} (z + z^*) = \left(\frac{2\hbar}{m\omega}\right)^{1/2} \text{Re}(z), \\ \langle z|P|z\rangle &= \left(\frac{m\omega\hbar}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{i} \langle z|a - a^\dagger|z\rangle = 2 \left(\frac{m\omega\hbar}{2}\right)^{1/2} \frac{z - z^*}{2i} = (2m\omega\hbar)^{1/2} \text{Im}(z). \end{aligned}$$

(b) Sýnum með þrepun að $[a, (a^\dagger)^n] = n(a^\dagger)^{n-1}$. Þetta gildir fyrir $n = 0, 1, 2$. Nú fæst fyrir $n \geq 3$ að

$$[a, (a^\dagger)^{n+1}] = a^\dagger[a, (a^\dagger)^n] + [a, a^\dagger](a^\dagger)^n = n(a^\dagger)^n + (a^\dagger)^n = (n+1)(a^\dagger)^n.$$

þar sem að við notuðum þrepunarforsenduna og $[a, a^\dagger] = I$. Þá getum við nýtt þessa niðurstöðu til að reikna víxilinn:

$$[a, e^{\alpha a^\dagger}] = \left[a, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!} \right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} n(a^\dagger)^{n-1} = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\alpha a^\dagger)^{n-1}}{(n-1)!} = \alpha e^{\alpha a^\dagger}$$

(c) Þá fæst að

$$a(e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle) = \left([a, e^{\alpha a^\dagger}] - e^{\alpha a^\dagger}a\right)|0\rangle = [a, e^{\alpha a^\dagger}]|0\rangle = \alpha e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle.$$

Dæmatími 12: 13. nóvember

Dæmi 1

Sýnið að grunnástand agnar án spuna í miðlægu mætti sé ávallt s -ástand.

Lausn: Sýnum þetta með sönnun með mótsögn. Rifjum upp að s -ástand er ástand sem hefur $\ell = 0$ (Fyrir ofan jöfnu 10.79). Byrjum því á því að gera ráð fyrir að grunnástandið, $\psi(r, \theta, \phi) = \psi(r)Y_l^m(\theta, \phi)$ hafi $\ell > 0$ og orku E og sýnum að þá væri til orkuminna ástand sem er mótsögn. Nú gefur $H\psi = E\psi$ okkur að

$$\left[-\frac{1}{2M} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r\psi(r)) + \left(\frac{l(l+1)}{2Mr^2} + V(r) \right) \psi(r) \right] = E\psi(r).$$

Látum síðan $\psi_i(r, \theta, \phi) = \psi_i(r)$ vera lausnir á Schrödinger-jöfnunni með $\ell = 0$ sem hafa orkugildi E_i hver um sig. En nú fæst:

$$\begin{aligned} E &= \langle \psi | H | \psi \rangle = \int_0^\infty \psi^*(r) \left[-\frac{1}{2M} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \left(\frac{\ell(\ell+1)}{2Mr^2} + V(r) \right) \right] \psi(r) \\ &\geq \int_0^\infty \psi^*(r) \left[-\frac{1}{2M} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + V(r) \right] \psi(r) \end{aligned}$$

þar sem að í öðru jafnaðarmerkinu slepptum við $\ell(\ell+1)$ liðnum því $\ell > 0$ var jákvætt. En nú má skrifa $\psi(r)$ sem línulega samantekt af ástöndunum sem hafa $\ell = 0$ þannig að

$$\psi(r) = \sum_i c_i \psi_i(r).$$

þar sem $\sum_i |c_i|^2 = 1$ svo við fáum að:

$$E \geq \sum_i \sum_j \int_0^\infty c_i^* \psi_i^*(r) \left[-\frac{1}{2M} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + V(r) \right] c_j \psi_j(r) = \sum_i E_i |c_i|^2.$$

en þar sem $|c_i| \leq 1$ fyrir sérhvert i þá er til a.m.k. eitt i þannig að $E > E_i$ sem er mótsögn.

Dæmi 2

Reiknið líkurnar fyrir vetnisfrumeind í grunnástandi að rafeindin sé lengra en einn Bohr-geisla frá kjarnanum.

Lausn: Eiginástönd vetnisatómsins eru gefin með:

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta, \phi).$$

Grunnástand vetnisatómsins er því gefið með:

$$\psi_{100}(r, \theta, \phi) = R_{10}(r)Y_0^0(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}.$$

Líkurnar á því að finna ögnina fyrir utan kúlu með geisla $r = a$ þar sem a er Bohr-geislinn eru

$$p = \int_a^\infty dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta r^2 \sin \theta \langle \psi | \psi \rangle = \frac{4}{a^3} \int_a^\infty dr r^2 e^{-2r/a} = \frac{5}{e^2} \approx 0,677.$$

Dæmi 3

Hamiltonvirki einsátta þrívíðs sveifils er

$$H = \frac{1}{2m}\vec{P}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\vec{R}^2$$

Ákvarðið þrjú lægstu orkueigingildi sveifilsins og margfeldni þeirra. Reyndu að leiða út formúlu fyrir margfeldni n -ta örvaða orkueigingildisins.

Lausn: Orkugildi einvíða sveifilsins eru $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ svo orkugildi þrívíða sveifilsins eru

$$E(n_x, n_y, n_z) = \hbar\omega \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right).$$

Þrjú lægstu orkugildin verða því:

$$E(0, 0, 0) = \frac{3}{2}\hbar\omega, \quad E(1, 0, 0) = \frac{5}{2}\hbar\omega, \quad E(1, 1, 0) = \frac{7}{2}\hbar\omega$$

Seinni tvö hafa margfeldni því t.d. er $E(1, 0, 0) = E(0, 1, 0)$. Leiðum síðan út almenna formúlu fyrir margfeldni ástandanna.

Hvað eru margar leiðir til að fá $n = n_x + n_y + n_z$?

Nú má velja $n_x \in [[0, n]]$ sem eru $(n + 1)$ valkostir. Eftir það má velja $n_y \in [[0, n - n_x]]$ sem eru $(n - n_x + 1)$ valkostir. Loks verðum við að velja $n_z = n - n_x - n_y$. Heildarmargfeldnin, d , verður því

$$d = \sum_{n_x=0}^n (n - n_x + 1) = (n + 1)^2 - \sum_{n_x=0}^n n_x = (n + 1)^2 - \frac{n(n + 1)}{2} = \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2).$$

Dæmi 11.5.1. Fylkjastök virkjanna Q og P

- (a) Reiknið fylkjastökin $\langle n|Q|m \rangle$ og $\langle n|P|m \rangle$ fyrir Q og P miðað við grunninn $|n \rangle$.
- (b) Reiknið $\|\varphi_n\|^2$ fyrir $|\varphi_n \rangle = (a + a^\dagger)^2 |n \rangle$.
- (c) Reiknið væntigildið af Q^4 í ástandinu $|n \rangle$.

Lausn: Við athugum að

$$\langle n|Q|m \rangle = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2} \langle n|\hat{Q}|m \rangle$$

Nú er $|n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0 \rangle$ svo $\langle n| = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle 0| a^n$ og við fáum því að

$$\langle n|Q|m \rangle = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{n!m!}} \langle 0|a^n \hat{Q} (a^\dagger)^m |0 \rangle$$

Við athugum síðan að við höfum samkvæmt skilgreiningunum að

$$[\hat{Q}, \hat{P}] = iI, \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{Q} + i\hat{P}), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{Q} - i\hat{P}).$$

svo við athugum að:

$$[a, \hat{Q}] = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{Q} + i\hat{P}), \hat{Q} \right] = \frac{i}{\sqrt{2}}[\hat{P}, \hat{Q}] = \frac{1}{\sqrt{2}}I.$$

En þar með fæst með þrepun að:

$$[a^n, \hat{Q}] = \frac{n}{\sqrt{2}}a^{n-1}.$$

En þetta þýðir því að:

$$\langle 0|a^n \hat{Q}(a^\dagger)^m|m\rangle = \langle 0|\hat{Q}a^n(a^\dagger)^m + \frac{n}{\sqrt{2}}a^{n-1}(a^\dagger)^m|0\rangle$$

Þetta var nú ekki sniðugt Matthias. Við hefðum bara átt að athuga að

$$\hat{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger), \quad \hat{P} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(a - a^\dagger)$$

svo

$$\langle n|Q|m\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \langle n|\frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger)|m\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\langle n|a|m\rangle + \langle n|a^\dagger|m\rangle \right) = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} (\sqrt{m}\delta_{n,m-1} + \sqrt{m+1}\delta_{n,m+1}).$$

Eins fæst fyrir P .

Látum

$$\begin{aligned} |\varphi_n\rangle &= (a + a^\dagger)^2 |n\rangle \\ &= (aa + a^\dagger a + a^\dagger a^\dagger + aa^\dagger) |n\rangle \\ &= a\sqrt{n}|n-1\rangle + a^\dagger\sqrt{n}|n-1\rangle + a^\dagger\sqrt{n+1}|n+1\rangle + a\sqrt{n+1}|n+1\rangle \\ &= \sqrt{n(n-1)}|n-2\rangle + n|n\rangle + \sqrt{(n+1)(n+2)}|n+2\rangle + (n+1)|n\rangle \\ &= (2n+1)|n\rangle + \sqrt{n(n-1)}|n-2\rangle + \sqrt{(n+1)(n+2)}|n+2\rangle \end{aligned}$$

þar sem að við notuðum hækkunar- og lækkunarreglurnar

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad a |n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle.$$

En þar með er

$$\|\varphi_n\|^2 = \langle \varphi_n|\varphi_n\rangle = (2n+1)^2 + n(n-1) + (n+1)(n+2) = 3(2n^2 + 2n + 1).$$

Nú kemur tengingin:

$$Q^4 = \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 (a + a^\dagger)^4$$

en þar með er

$$\langle n|Q^4|n\rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 \|\varphi_n\|^2 = 3 \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 (2n^2 + 2n + 1).$$

Dæmatímar í Skammtafræði 1 - Haust 2024

Matthias Harksen
Science Institute, University of Iceland

26. ágúst 2024

Dæmatími 1: 21. ágúst

Dæmi 1.6.1. Fermi mat og víddargreining

- (a) Metið orkuna sem að ljóseind, nifteind og rafeind hafa í eV ef þær hafa (de Broglie) bylgjulengd $\lambda = 1 \text{ \AA}$.
- (b) Hljóðeindir (e. phonons) svipa til ljóseinda (e. photons) nema að bylgjan sem um ræðir er hljóðbylgja en ekki ljósbylgja. Þegar að bylgjulengd hljóðs er meiri heldur en bilið milli grinda í kristalbyggingu þá geta myndast hljóðeindir. Metið orku hljóðeindar $E_h = \hbar\omega$ fyrir hljóðbylgju í stáli $c_s = 5 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ ef bylgjutala hljóðeindarinnar er $k = 1 \frac{1}{\text{nm}}$.
- (c) Stærsta sameindin sem að við höfum mælt agnar/bylgju tvíeðli fyrir er C^{60} sameindin. Meðalhraði sameindanna er 220 m/s þegar að þær fara í gegnum raufarnar. Hver er de Broglie bylgjulengd þeirra og hvernig passar það við stærð sameindanna?
- (d) Skoðum sameind sem að samanstendur af tveimur atómum. Hugsum okkur að þetta sé eins og stöng með lóð M_1 og M_2 á sitthvorum enda og heildarlengd $r_0 = 2a_0 = 0,53 \text{ \AA}$ (Bohr-geislinn) milli atómana. Látum atómið hafa hverfipunga $\hbar$. Hversu hratt snýst þá stöngin um massamiðju sína? Hver er heildarorka snúningsins E_{rot} ?
- (e) Sameindin í (d)-lið getur einnig víbrað/titrað meðfram ás stangarinnar umhverfis jafnvægisstöðuna $r = r_0 = 2a_0$ og hegðar sér eins og gormur með gormstuðul $k = \frac{e^2}{(2a_0)^3}$. Hver er sveiflutíðni sameindarinnar ω_v og tilheyrandi orka $E_v = \hbar\omega_v$?
- (f) Planck-orkuna E_P og Planck-lengdina ℓ_P má smíða með víddargreiningu eingunis sem fall af $G, \hbar$ og c . Ákvarðið formkornið á þessum stærðum.

Dæmi 2.4.1. Innfeldi og staðall

Nota má innfeldið til þess að skilgreina staðal samkvæmt $\|\varphi\|^2 = (|\varphi\rangle, |\varphi\rangle) = \langle\varphi|\varphi\rangle$.

- (a) Sýnið að staðallinn uppfylli þríhyrningsjöfnuna $\|\chi + \varphi\| \leq \|\chi\| + \|\varphi\|$.
- (b) Sýnið að $||\|\chi\| - \|\varphi\|| \leq \|\chi + \varphi\|$.
- (c) Sýnið að $\|\chi + \varphi\|^2 + \|\chi - \varphi\|^2 = 2(\|\chi\|^2 + \|\varphi\|^2)$.
- (d) Öfugt: Sýnið að ef staðallinn uppfyllir skilyrðið í (c)-lið þá skilgreini hann innfeldi

$$(\phi, \chi) = (\chi, \phi) = \frac{1}{4} \left(\|\chi + \phi\|^2 - \|\chi - \phi\|^2 \right).$$

Dæmi 2.4.2. Víxlar og spor

- (a) Sýnið að $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$.
- (b) Sýnið að $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
- (c) Sýnið að sporið sé rásað, þ.e. $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(BCA) = \text{Tr}(CAB)$.
- (d) Sýnið að sporið sé óháð því hvaða grunn við veljum. Með öðrum orðum sýnið að undir hnitaskiptum $A \rightarrow A' = SAS^{-1}$ þá sé $\text{Tr}(A') = \text{Tr}(A)$.

Dæmi 2.4.3. Ákveðan og sporið

- (a) Látum $A(t)$ vera tímaháð fylki en látum B vera tímaóháð. Ákvarðið lausnir deildajafnanna

$$\frac{dA(t)}{dt} = A(t)B, \quad \frac{dA(t)}{dt} = BA(t).$$

- (b) Látum A vera hornalínugeranlegt. Sýnið að

$$\det(e^{At_1}) \det(e^{At_2}) = \det(e^{A(t_1+t_2)}).$$

- (c) Sýnið loks að $\det(e^A) = e^{\text{Tr}(A)}$ og að $\det(A) = e^{\text{Tr}(\ln(A))}$.

Dæmi 2.4.4. Ofanvarpsvirki í $\mathbb{R}^3$

Látum $\vec{u}_1$ og $\vec{u}_2$ vera vigra í $\mathbb{R}^3$ sem eru línulega óháðir (en ekki nauðsynlega hornréttir). Látum $\mathcal{P}$ vera ofanvarpsvirkja á planið M sem vigrarnir $\vec{u}_1$ og $\vec{u}_2$ spanna, þ.a. $M = \{s\vec{u}_1 + t\vec{u}_2 \mid (s, t) \in \mathbb{R}^2\}$. Látum nú $\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus M$. Sýnið að rita megi

$$\mathcal{P}\vec{v} = \sum_{i,j=1}^2 C_{ij}^{-1}(\vec{v} \cdot \vec{u}_i)\vec{u}_j, \quad \text{þar sem} \quad C_{ij} = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \\ \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 \end{pmatrix}.$$

2.4.11. Virkjaleikfimi

- (a) Látum A og B vera tímaóháð fylki og skilgreinum

$$f(t) = e^{tA} B e^{-tA}.$$

Sýnið að

$$\frac{df}{dt} = [A, f(t)], \quad \frac{d^2 f}{dt^2} = [A, [A, f(t)]] .$$

- (b) Sýnið að

$$e^{tA} B e^{-tA} = B + t[A, B] + \frac{t^2}{2}[A, [A, B]] + \dots$$

- (c) Látum nú sér í lagi virkjana A, B, C uppfylla

$$[A, B] = iC, \quad [B, C] = iA.$$

Sýnið að þá gildi að

$$e^{iBt} A e^{-iBt} = A \cos(t) + C \sin(t).$$

- (d) Gerum nú ráð fyrir að bæðia A og B víxlist við víxilinn sinn, þ.e.a.s. að $[A, [A, B]] = 0$ og að $[B, [A, B]] = 0$. Sýnið að þá gildi að

$$(i) \quad e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A, B]}, \quad (ii) \quad e^A e^B = e^B e^A e^{[A, B]}.$$

Dæmatími 1: 21. ágúst (Lausnir)

Dæmi 1.6.1. Fermi mat og víddargreining

- (a) Metið orkuna sem að ljóseind, nifteind og rafeind hafa í eV ef þær hafa bylgjulengd $\lambda = 1 \text{ \AA}$.

Lausn: Ljóseindin hefur orku $E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = 12,4 \text{ keV}$. Til þess að ákvarða orkuna á rafeindinni og nifteindinni þurfum við að nota de Broglie bylgjulengdina $\lambda_B = \frac{h}{p}$ þá fæst $E_n = \frac{p^2}{2m_n} = \frac{h^2}{2\lambda^2 m_n} = 82 \text{ meV}$ og eins $E_e = \frac{h^2}{2\lambda^2 m_e} = 151 \text{ eV}$.

- (b) Hljóðeindir (e. phonons) svipa til ljóseinda (e. photons) nema að bylgjan sem um ræðir er hljóðbylgja en ekki ljósbylgja. Þegar að bylgjulengd hljóðs er meiri heldur en bilið milli grinda í kristalbyggingu þá geta myndast hljóðeindir. Metið orku hljóðeindar $\hbar\omega$ fyrir hljóðbylgju í stáli $c_s = 5 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ ef bylgjutala hljóðeindarinnar er $k = 1 \frac{1}{\text{nm}}$.

Lausn: Þá er $E_h = \hbar\omega = \hbar c_s k = 3,3 \text{ meV}$.

- (c) Stærsta sameindin sem að við höfum mælt agnar/bylgju tvíeðli fyrir er C^{60} sameindin. Meðalhraði sameindanna er 220 m/s þegar að þær fara í gegnum raufarnar. Hver er de Broglie bylgjulengd þeirra og hvernig passar það við stærð sameindanna?

Lausn: de Broglie bylgjulengd C^{60} sameindar er $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{60 \cdot 12 m_u v} = 2,5 \text{ pm}$.

- (d) Skoðum sameind sem að samanstendur af tveimur atómum. Hugsum okkur að þetta sé eins og stöng með lóð M_1 og M_2 á sitthvorum enda og heildarlengd $r_0 = 2a_0 = 0,53 \text{ \AA}$ (Bohr-geislinn) milli atómana. Látum atómið hafa hverfipunga $\hbar$. Hversu hratt snýst þá stöngin um massamiðju sína? Hver er heildarorka snúningsins E_{rot} ?

Lausn: Massamiðjan er í fjarlægð $r_1 = \frac{M_2 r_0}{M_1 + M_2}$ frá massanum M_1 en $r_2 = \frac{M_1 r_0}{M_1 + M_2}$ frá hinum endanum. Hverfitregða stangarinnar er þá gefin með

$$I = M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} r_0^2 = \mu r_0^2.$$

þar sem að $\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$ er smækkaði massi kerfisins. Þá er $\hbar = L = I\omega$ sem gefur því að $\omega = \frac{\hbar}{I}$. Snúningsorkan er síðan $E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{\hbar^2}{2\mu r_0^2}$.

- (e) Sameindin í (d)-lið getur einnig víbrað/titrað meðfram ás stangarinnar umhverfis jafnvægisstöðuna $r = r_0 = 2a_0$ og hegðar sér eins og gormur með gormstuðul $k = \frac{e^2}{(2a_0)^3}$. Hver er sveiflutíðni sameindarinnar ω_v og tilheyrandi orka $E_v = \hbar\omega_v$?

Lausn: Þá er sveiflutíðnin $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \frac{e}{2a_0} \sqrt{\frac{1}{2a_0 \mu}}$.

- (f) Planck-orkuna E_P og Planck-lengdina ℓ_P má smíða með víddargreiningu eingunis sem fall af $G, \hbar$ og c . Ákvarðið formkornið á þessum stærðum.

Lausn: Fáum

$$E_P = G^\alpha \hbar^\beta c^\gamma$$

Þar sem að einingar stærðanna eru $[E_P] = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$, $[G] = \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$, $[\hbar] = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$ og $[c] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$ þá fæst með víddargreiningu

$$\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} = [E_P] = [G]^\alpha [\hbar]^\beta [c]^\gamma = \left(\frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}\right)^\alpha \left(\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}\right)^\beta \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^\gamma$$

sem gefur því jöfnuhneppið

$$\begin{cases} \text{kg:} & 1 = -\alpha + \beta \\ \text{m:} & 2 = 3\alpha + 2\beta + \gamma \\ \text{s:} & -2 = -2\alpha - \beta - \gamma \end{cases}$$

Leggjum saman síðustu tvær jöfnurnar fæst $\alpha + \beta = 0$ og með fyrstu jöfnunni gefur þetta því að $\beta = \frac{1}{2}$ og þá $\alpha = -\frac{1}{2}$ en þá er $\gamma = 2 - 3\alpha - 2\beta = \frac{5}{2}$. Því er

$$E_P = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} = 1,95 \cdot 10^9 \text{ J} \implies \ell_P = \frac{\hbar c}{E_P} = \sqrt{\hbar \frac{G}{c^3}} = 1,6 \cdot 10^{-35} \text{ m}.$$

Dæmi 2.4.1. Innfeldi og staðall

Nota má innfeldið til þess að skilgreina staðal samkvæmt $\|\varphi\|^2 = (|\varphi\rangle, |\varphi\rangle) = \langle\varphi|\varphi\rangle$.

- (a) Sýnið að staðallinn uppfylli þríhyrningsjöfnuna $\|\chi + \varphi\| \leq \|\chi\| + \|\varphi\|$.
- (b) Sýnið að $||\|\chi\| - \|\varphi\|| \leq \|\chi + \varphi\|$.
- (c) Sýnið að $\|\chi + \varphi\|^2 + \|\chi - \varphi\|^2 = 2(\|\chi\|^2 + \|\varphi\|^2)$.
- (d) Öfugt: Sýnið að ef staðallinn uppfyllir skilyrðið í (c)-lið þá skilgreini hann innfeldi

$$(\phi, \chi) = (\chi, \phi) = \frac{1}{4} \left(\|\chi + \phi\|^2 - \|\chi - \phi\|^2 \right).$$

Lausn:

Dæmi 2.4.2. Víxlar og spor

- (a) Sýnið að (i) $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$ (ii) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$.
- (b) Spor virkjans A er skilgreint sem summa stakanna á hornalínunni

$$\text{Tr}(A) = \sum_n A_{nn}.$$

Sýnið að $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

- (c) Sýnið að sporið sé rásað, þ.e. $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(BCA) = \text{Tr}(CAB)$.
- (d) Sýnið að sporið sé óháð því hvaða grunn við veljum. Með öðrum orðum sýnið að undir hnitaskiptum $A \rightarrow A' = SAS^{-1}$ þá sé $\text{Tr}(A') = \text{Tr}(A)$.

Lausn: (a) Við athugum að

$$[A, BC] = ABC - BCA$$

og eins athugum við að

$$B[A, C] + [A, B]C = BAC - BCA + ABC - BAC = ABC - BCA = [A, BC].$$

(b) Látum $C = AB$ og $D = BA$ þá gildir að fylkjastökin eru gefin með

$$C_{nm} = \sum_k A_{nk} B_{km}, \quad D_{nm} = \sum_k B_{nk} A_{km}.$$

Þannig að við fáum

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(C) = \sum_n \sum_k A_{nk} B_{kn} = \sum_k \sum_n B_{kn} A_{nk} = \text{Tr}(D) = \text{Tr}(BA).$$

(c) Með því að láta $X = A$ og $Y = BC$ fæst með (b)-lið að

$$\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(XY) = \text{Tr}(YX) = \text{Tr}(BCA).$$

eins fæst $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CAB)$ ef við látum $X = AB$ og $Y = C$.

(d) Þar sem að sporið er rásað fæst að $\text{Tr}(A') = \text{Tr}(SAS^{-1}) = \text{Tr}(S^{-1}SA) = \text{Tr}(A)$.

Dæmi 2.4.3. Ákveðan og sporið

(a) Látum $A(t)$ vera tímaháð fylki en látum B vera tímaóháð. Ákvarðið lausnir deildajafnanna

$$\frac{dA(t)}{dt} = A(t)B, \quad \frac{dA(t)}{dt} = BA(t).$$

(b) Látum A vera hornalínugeranlegt. Sýnið að

$$\det(e^{At_1}) \det(e^{At_2}) = \det(e^{A(t_1+t_2)}).$$

(c) Sýnið loks að $\det(e^A) = e^{\text{Tr}(A)}$ og að $\det(A) = e^{\text{Tr}(\ln(A))}$.

Lausn: (a) Höfum að fyrir $A(t) = A(0)e^{Bt}$ fæst að

$$\frac{d}{dt}(A(t)) = A(0)Be^{Bt} = A(t)B$$

þar sem að við notuðum að $[B, B] = 0$. Hinsvegar ef $A(T) = e^{BT}A(0)$ þá fæst

$$\frac{d}{dt}A(t) = Be^{Bt}A(0) = BA(t).$$

(b) Látum λ_n vera eigingildi A þá gildir að

$$\det(A) = \prod_n \lambda_n$$

þannig að

$$\det(e^A) = \prod_n e^{\lambda_n} = e^{\sum_n \lambda_n} = e^{\text{Tr}(A)}.$$

Þá fæst að

$$\det(e^{At_1}) \det(e^{At_2}) = e^{(\sum_n \lambda_n)t_1} e^{(\sum_n \lambda_n)t_2} = e^{e^{(\sum_n \lambda_n)(t_1+t_2)}} = \det(e^{A(t_1+t_2)}).$$

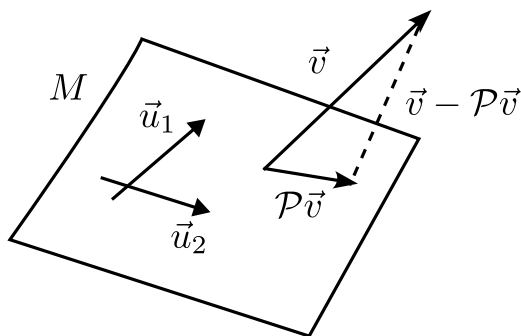
Dæmi 2.4.4. Ofanvarpsvirki í $\mathbb{R}^3$

Látum $\vec{u}_1$ og $\vec{u}_2$ vera vigra í $\mathbb{R}^3$ sem eru línulega óháðir (en ekki nauðsynlega hornréttir). Látum $\mathcal{P}$ vera ofanvarpsvirkja á planið M sem vigrarnir $\vec{u}_1$ og $\vec{u}_2$ spanna, þ.a. $M = \{s\vec{u}_1 + t\vec{u}_2 \mid (s, t) \in \mathbb{R}^2\}$. Látum nú $\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus M$. Sýnið að rita megi

$$\mathcal{P}\vec{v} = \sum_{i,j=1}^2 C_{ij}^{-1}(\vec{v} \cdot \vec{u}_i) \vec{u}_j, \quad \text{þar sem} \quad C_{ij} = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \\ \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 \end{pmatrix}.$$

Lausn: Þar sem að $\mathcal{P}$ er ofanvarpsvirki þá er $\mathcal{P}\vec{v} \in M$ og því er $\vec{v} - \mathcal{P}\vec{v}$ vigur sem er hornréttur á M og þar með á bæði $\vec{u}_1$ og $\vec{u}_2$. Við höfum því að

$$(\vec{v} - \mathcal{P}\vec{v}) \cdot \vec{u}_1 = 0, \quad \text{og} \quad (\vec{v} - \mathcal{P}\vec{v}) \cdot \vec{u}_2 = 0.$$



Mynd 1: Ofanvarp vigursins $\vec{v}$ niður í tvívíða hlutrúmið M sem $\vec{u}_1$ og $\vec{u}_2$ spanna.

Sér í lagi þar sem að $\mathcal{P}\vec{v} \in M$ þá má finna stuðla a, b þannig að rita megi

$$\mathcal{P}\vec{v} = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2,$$

markmiðið okkar er að ákvarða a og b . En hornréttta skilyrðið hér að ofan gefur okkur að

$$\vec{v} \cdot \vec{u}_1 - (a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2) \cdot \vec{u}_1 = \vec{0}, \quad \vec{v} \cdot \vec{u}_2 - (a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2) \cdot \vec{u}_2 = \vec{0}.$$

en þetta getum við umritað sem jöfnuhneppi fyrir a og b

$$\begin{cases} \vec{v} \cdot \vec{u}_1 - a\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 - b\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0, \\ \vec{v} \cdot \vec{u}_2 - a\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 - b\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 = 0. \end{cases}$$

eða á fylkjaformi

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \\ \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v} \cdot \vec{u}_1 \\ \vec{v} \cdot \vec{u}_2 \end{pmatrix}.$$

En fylkið vinstra megin er einmitt fylkið C_{ij} svo við sjáum að

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = C_{ij}^{-1} \begin{pmatrix} \vec{v} \cdot \vec{u}_1 \\ \vec{v} \cdot \vec{u}_2 \end{pmatrix}.$$

En þetta gefur því að

$$\mathcal{P}\vec{v} = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 = [C_{11}^{-1}(\vec{v} \cdot \vec{u}_1) + C_{21}^{-1}(\vec{v} \cdot \vec{u}_2)] \vec{u}_1 + [C_{21}^{-1}(\vec{v} \cdot \vec{u}_1) + C_{22}^{-1}(\vec{v} \cdot \vec{u}_2)] \vec{u}_2.$$

sem var það sem sýna átti.

2.4.11. Virkjaleikfimi

(a) Látum A og B vera tímaóháð fylki og skilgreinum

$$f(t) = e^{tA} B e^{-tA}.$$

Sýnið að

$$\frac{df}{dt} = [A, f(t)], \quad \frac{d^2 f}{dt^2} = [A, [A, f(t)]] .$$

(b) Sýnið að

$$e^{tA} B e^{-tA} = B + t[A, B] + \frac{t^2}{2}[A, [A, B]] + \dots$$

(c) Látum nú sér í lagi virkjana A, B, C uppfylla

$$[A, B] = iC, \quad [B, C] = iA.$$

Sýnið að þá gildi að

$$e^{iBt} A e^{-iBt} = A \cos(t) + C \sin(t).$$

Lausn: (a) Fáum að

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} (e^{tA} B e^{-tA}) = A e^{tA} B e^{-tA} + e^{tA} B (-A) e^{-tA} = A f(t) - f(t) A = [A, f(t)].$$

En það gefur að

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{df}{dt} \right) = \frac{d}{dt} ([A, f(t)]) = \frac{d}{dt} (A f(t) - f(t) A) = A \frac{df}{dt} - \frac{df}{dt} A = \left[A, \frac{df}{dt} \right] = [A, [A, f(t)]] .$$

(b) Fáum þá að

$$\begin{aligned} e^{iBt} A e^{-iBt} &= A + t[iB, A] + \frac{t^2}{2}[iB, [iB, A]] + \dots \\ &= A + it(-iC) + \frac{t^2}{2}[iB, i(-iC)] + \dots \\ &= A + Ct - \frac{t^2}{2}A + \dots \\ &= A \cos(t) + C \sin(t). \end{aligned}$$

(c) Látum $g(t) = e^{At} e^{Bt}$ og fáum þá að

$$g'(t) = A e^{At} e^{Bt} + e^{At} B e^{Bt} = e^{At} (A + B) e^{Bt}.$$

Margföldum svo með $1 = e^{-At} e^{At}$ (því $[A, A] = 0$) og fáum þá að

$$e^{At} (A + B) e^{-At} e^{At} e^{Bt} = (A + B + t[A, B]) g(t)$$

en þetta gefur því að $g'(t) = (A + B + t[A, B]) g(t)$ en sú diffurjafna hefur lausn

$$g(t) = e^{(A+B)t + \frac{1}{2}[A, B]t^2} g(0)$$

en við vitum að $g(t) = e^{At} e^{Bt}$ svo $g(0) = 1$ en þar með höfum við sýnt að

$$e^{At} e^{Bt} = e^{(A+B)t + \frac{1}{2}[A, B]t^2}$$

Loks víxlast A og B við $[A, B]$ og því megum við margfalda í gegn með $e^{-\frac{1}{2}[A, B]t^2}$ þannig að niðurstaðan fáiast.

Dæmi fyrir skammtafræði 1

Dæmi 1: Pauli-fylkin eru skilgreind þannig að

$$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Það er gott að hafa í huga að þau eru notuð í líkani fyrir spuna upp/niður og hafa eigingildi ± 1 .

(a) Sýnið að Pauli fylkin séu sjálfhverf (þ.e.a.s. að þau séu sín eigin andhverfa):

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I,$$

þar sem I táknar einingarfylkið. Sýnið auk þess að við höfum $-i\sigma_x\sigma_y\sigma_z = I$.

(b) Reiknið víxlana $[\sigma_x, \sigma_y]$, $[\sigma_x, \sigma_z]$ og $[\sigma_y, \sigma_z]$.

(c) Reiknið andvixilinn $\{\sigma_x, \sigma_y\} = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x$.

(d) Sýnið að $e^{it\sigma_x} = I \cos(t) + i\sigma_x \sin(t)$.

Dæmi 2: Tengsl við Lie-grúpuna $SU(2)$ og Lie-algebruna $\mathfrak{su}(2)$

Við segjum að ferningsfylki A sé einoka ef að andhverfa þess $A^{-1} = A^\dagger$ þar sem $A^\dagger$ er aðokafylkið.

Mengi allra einoka (e. unitary) ferningsfylkja er táknað með $U(n) := \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid A^{-1} = A^\dagger\}$.

Sér í lagi mun hlutmengið $SU(n) := \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid A^{-1} = A^\dagger, \det(A) = 1\}$ koma víða við sögu.

(a) Látum nú $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vera 2×2 tvinntalnafylki. Sýnið að til þess að $A \in SU(2)$ þá þarf $c = -\bar{b}$ og $d = \bar{a}$. Með öðrum orðum, sýnið að rita megí sérhvert stak í $SU(2)$ á forminu

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad \text{þar sem að} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

(b) Sýnið að rita megí

$$A = \operatorname{Re}(a)I + \operatorname{Im}(b)i\sigma_x + \operatorname{Re}(b)i\sigma_y + \operatorname{Im}(a)i\sigma_z.$$

Með öðrum orðum að $\{I, i\sigma_x, i\sigma_y, i\sigma_z\}$ myndi grunn (með rauntalnastuðlum) fyrir $SU(2)$.

(c) Skoðum nú örsnæðarhnikun frá einingarfylkinu $A = I + \epsilon B$. Sýnið að til þess að $A \in SU(2)$ þá þurfi $\operatorname{Tr}(B) = 0$ og almennasta formið á B er gefið með

$$B = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}, \quad z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) = 0.$$

Ályktið að $\{i\sigma_x, i\sigma_y, i\sigma_z\}$ myndi grunn fyrir snertlarúmið $\mathfrak{su}(2)$ við $SU(2)$ í grennd við einingarfylkið.

(d) Almennast gildir að

Gömul prófdæmi í Skammtafræði 1

1 Liða í kúluföll

(Dæmi 1 frá 2018) Á tilteknum tíma hefur ögn á hreyfingu í þrívíðu rúmi bylgjufall

$$\psi(\vec{r}) = c(rz + 3z^2 - r^2)e^{-br^5}$$

þar sem b, c eru jákvæðir fastar.

- (i) Hvaða gildi geta mælst á heildarhverfiþunganum $\vec{L}^2$ og hverfiþunganum L_z í stefnu z -áss og með hvaða líkum?
- (ii) Nú beitum við hækkunarvirkjanum L_+ á ψ og fáum $\psi_1 = L_+\psi$. Finnið ψ_1 og svarið sömu spurningum og í (i).

Lausn: (i) Við byrjum á því að umrita gefna bylgjufallið sem línulega samantekt af kúluföllum $Y_\ell^m(\theta, \phi)$. Takið eftir því að við erum ekkert spurð um geislalæga hluta bylgjufallsins svo að við þurfum ekki að ákvarða $R_{n\ell}$. Við byrjum á því að skrifa $\psi(\vec{r})$ í kúlunítum þannig að

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi, \\y &= r \sin \theta \sin \phi, \\z &= r \cos \theta.\end{aligned}$$

með rúmmálsfrymi $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$. En þar með sjáum við að

$$\psi(\vec{r}) = cr^2 e^{-br^5} (\cos \theta + 3 \cos^2 \theta - 1).$$

Búum síðan til litla töflu með kúluföllum til útskýringar:

Y_ℓ^m	Fall
Y_0^0	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$
Y_1^{-1}	$\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi}$
Y_1^0	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$
Y_1^1	$-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$
Y_2^{-2}	$\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{-2i\phi}$
Y_2^{-1}	$\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{-i\phi}$
Y_2^0	$\sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$
Y_2^1	$-\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$
Y_2^2	$\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$

Með smá störun sjáum við að þetta er línuleg samantekt af $Y_\ell^m = Y_0^0, Y_1^0, Y_2^0$. Nánar tiltekið

$$\psi(\vec{r}) = cr^2 e^{-br^5} \left(\sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_1^0 + \sqrt{\frac{16\pi}{5}} Y_2^0 \right).$$

En þar með sjáum við að hugsanleg gildi sem að við getum mælt hafa $\ell = 1, 2$ og $m = 0$. Gildin á heildarhverfiþunganum $\vec{L}^2$ eru því $\ell(\ell + 1)\hbar^2$ svo annað hvort $2\hbar^2$ með líkum $\frac{5}{17}$ eða

$6\hbar^2$ með líkum $\frac{12}{17}$ (líkurnar á því að finna hvort um sig eru $\frac{4\pi}{3}A^2$ og $\frac{16\pi}{5}A^2$ þar sem A^2 kemur frá stöðlun bylgjufallsins - en heildarsumman er 1 sem ákvarðar $A^2 = \frac{15}{68\pi}$). Eina hugsanlega gildið sem kemur til greina á hverfiþunga í stefnu z -áss er síðan 0 því $m = 0$ og eigingildin eru $m\hbar$.

(ii) Þegar að við verkum með L_+ þá verkar hann einungis á kúluföllinn þannig að hann hækkar gildið á m með eftirfarandi hætti

$$L_{\pm}Y_{\ell}^m = \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m\pm 1)}Y_{\ell}^{m\pm 1}$$

En þar með höfum við að

$$\psi_1(\vec{r}) = L_+\psi(\vec{r}) = cr^2e^{-br^5}\left(\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\sqrt{Y_1^1} + \sqrt{\frac{16\pi}{5}}\sqrt{Y_2^1}\right).$$

Við þurfum síðan ekki á því að halda en svona til framtíðar þá minnumst við á að geislalægi hlutinn $R_{n\ell}$ er með samskonar töflu:

$R_{n,\ell}$	Function
$R_{1,0}$	$2\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2}e^{-r/a_0}$
$R_{2,0}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2}\left(1 - \frac{r}{2a_0}\right)e^{-r/(2a_0)}$
$R_{2,1}$	$\frac{1}{\sqrt{24}}\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2}\frac{r}{a_0}e^{-r/(2a_0)}$
$R_{3,0}$	$\frac{2}{27\sqrt{3}}\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2}\left(1 - \frac{2r}{3a_0} + \frac{2r^2}{27a_0^2}\right)e^{-r/(3a_0)}$
$R_{3,1}$	$\frac{8}{27\sqrt{6}}\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2}\frac{r}{a_0}\left(1 - \frac{r}{6a_0}\right)e^{-r/(3a_0)}$
$R_{3,2}$	$\frac{4}{81\sqrt{30}}\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2}\frac{r^2}{a_0^2}e^{-r/(3a_0)}$

(Dæmi 1 frá 2019) Á tilteknum tíma hefur ögn á hreyfingu í þrívíðu rúmi bylgjufall

$$\psi(\vec{r}) = cx^2e^{-br^3}$$

þar sem b, c eru jákvæðir fastar.

- (i) Hvaða gildi geta mælst á heildarhverfiþunganum $\vec{L}^2$ og hverfiþunganum L_z í stefnu z -áss og með hvaða líkum?
- (ii) Hvað gildi geta mælst á L_x , hverfiþunganum í stefnu x -áss og með hvaða líkum?

2 Spuna Hamiltonvirki

(Dæmi 2 frá 2018) Tvær agnir, ögn 1 og ögn 2, báðar með spuna 2 eru kyrrstæðar í rúminu og víxlverka með Hamilton-virkja

$$H = -A\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$$

þar sem $A > 0$ er fasti og $\vec{S}_j = (S_{jx}, S_{jy}, S_{jz})$ er spunavirkinn fyrir ögn númer $j = 1, 2$.

- (i) Finnið öll eigingildi H og margfeldni þeirra.
- (ii) Virkinn $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z) = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ lýsir heildarspuna kerfisins. Látum $|j, m\rangle$ tákna sameiginleg eiginket $\vec{S}^2 = \vec{S} \cdot \vec{S}$ og S_z með eigingildi $j(j+1)\hbar^2$ og $m\hbar$. Ef kerfið er í ástandinu $|4, 2\rangle$ hvaða gildi geta mælst á S_{1z} og með hvaða líkum?

(Dæmi 2 frá 2019) Þrjár agnir, ögn 1, ögn 2 og ögn 3, allar með spuna $\frac{1}{2}$, eru kyrrstæðar í rúminu og víxlverka með Hamiltonvirkja

$$H = -A(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3 + \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_3),$$

þar sem $A > 0$ er fasti og $\vec{S}_j = (S_{jx}, S_{jy}, S_{jz})$ er spunavirkinn fyrir ögn númer $j = 1, 2, 3$.

- (i) Finnið öll eigingildi H og margfeldni þeirra.
- (ii) Ef kerfið er í ástandinu $|\psi(0)\rangle = |++-\rangle$ á tímanum $t = 0$ finnið ástand spunanna fyrir $t > 0$. Hér merkir $++-$ að spunar agna 1 og 2 eru $\frac{1}{2}\hbar$ en spuni agnar 3 er $-\frac{1}{2}\hbar$ í stefnu z -áss.

3 Hreintóna sveifill

(Dæmi 3 frá 2018) Þrívígur einsátta hreintóna sveifill er í ástandinu

$$|\psi\rangle = c(|1, 1, 0\rangle + |2, 0, 0\rangle + |0, 1, 0\rangle),$$

þar sem c er stöðlunarfasti á tímanum $t = 0$. Eins og venjulega er

$$|n_x, n_y, n_z\rangle = (n_x!n_y!n_z!)^{-1/2} (a_x^\dagger)^{n_x} (a_y^\dagger)^{n_y} (a_z^\dagger)^{n_z} |0, 0, 0\rangle.$$

þar sem $|0, 0, 0\rangle$ er grunnástandið.

- (i) Finnið ástand sveifilsins á tímanum $t > 0$.
- (ii) Reiknið væntigildi brautarhverfiþungans í stefnu z -áss á tímanum $t = 0$ og gerið grein fyrir því hvernig það breytist með tíma.

(Dæmi 3 frá 2019)

(i) Spunalaus ögn er á hreyfingu í einni vídd í mætti V_1 sem á sér bundið ástand. Táknum orku grunnástandsins með E_1 . Önnur eins ögn hreyfist í mætti V_2 þar sem $V_2 \leq V_1$ og látum E_2 vera grunnástandsorku hennar. Sýnið að $E_2 \leq E_1$.

(ii) Gerum nú ráð fyrir að ögn hreyfist í mætti

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, & |x| \leq a, \\ \infty, & |x| > a. \end{cases}$$

Sýnið að grunnástandsorka hennar E_0 uppfyllir ójöfnurnar

$$E_0 \geq \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2}, \quad E_0 \geq \frac{1}{2}\hbar\omega.$$

4 Skammtatölvur

(Dæmi 2 frá 2017) Anna og Baldur deila flæktu skammtaástandi þannig að Anna er með fyrsta skammtabitann en Baldur með seinni skammtabitann.

(i) Ef skammtabitarnir eru í ástandinu

$$|\psi_+\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

hverjar eru þá líkurnar á því að bæði Anna og Baldur finni skammtabitann sinn í ástandinu $|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$?

(ii) Sama spurning nema fyrir ástandið

$$|\psi_-\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}.$$

(iii) Í fyrirlestri sýndum við hvernig að nota má ástandið $|\psi_+\rangle$ til þess að fjarflytja skammtaástandi. Er hægt að nota ástandið $|\psi_-\rangle$ til þess að gera hið sama? Útskýrið.

(Dæmi 4 frá 2018) Táknum ástand tveggja skammtabita í reikningsgrunninum með $|i_1 i_2\rangle$ þar sem $i_1, i_2 \in \{0, 1\}$. Látum H_1 tákna Hadamard gátt fyrir fyrri skammtabitann og látum CNOT vera stýrða NOT gátt fyrir tvo skammtabita þar sem fyrri skammtabitinn stýrir hinum síðari, þ.e. verkun CNOT er lýst með:

$$|00\rangle \mapsto |00\rangle, \quad |01\rangle \mapsto |01\rangle, \quad |10\rangle \mapsto |11\rangle, \quad |11\rangle \mapsto |10\rangle.$$

- (i) Sýnið að $W = H_1 \text{CNOT} H_1$ er skammtagátt fyrir tvo skammtabita og finnið hvað W gerir við ketin í reikningsgrunninum.
- (ii) Ef U er skammtagátt þannig að $U|00\rangle = (|01\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}$ og $U|11\rangle = (|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$, hvað getið þið sagt um $U|01\rangle$ og $U|10\rangle$?

(Dæmi 4 frá 2019)

- (i) Táknum ástand tveggja skammtabita í reikningsgrunninum með $|i_1 i_2\rangle$ þar sem $i_1, i_2 \in \{0, 1\}$. Látum U vera skammtagátt sem er skilgreind með

$$|00\rangle \mapsto |01\rangle, \quad |01\rangle \mapsto |10\rangle, \quad |10\rangle \mapsto |11\rangle, \quad |11\rangle \mapsto |00\rangle.$$

Gerum ráð fyrir að ástand skammtabita sé $|\psi\rangle$. Sýnið að $|\psi\rangle$ sé flækt ef og aðeins ef $U|\psi\rangle$ sé flækt

- (ii) Gerum ráð fyrir að skammtabitarnir séu í ástandinu

$$|\phi\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle).$$

Nú fjarlægjum við síðari skammtabitann. Finnið þéttleikafylkið sem lýsir ástandi fyrri skammtabitans. Er ástandið hreint eða blandað?

5 Truflanareikningur

(Dæmi 4 frá 2014) Vetrinatóm í grunnástandi verður fyrir truflun $W = \lambda X^2$.

- (i) Reiknið í lægstu nálgun í λ breytinguna á orku grunnástandsins.
- (ii) Fyrir hvaða ótrufluð ástönd vetrar $|n\ell m\rangle$ getur innfeldið $\langle n\ell m|V|100\rangle$ verið frábrugðið núll?

(Dæmi 4 frá 2016) Vetrinatóm er truflað með mætti $W = \lambda r^2$.

- (i) Finnið fyrsta stigs leiðréttingu á orku grunnástandsins.
- (ii) Finnið efri og neðri mörk á annars stigs leiðréttinguna á orku grunnástandsins.
- (iii) Látum H_0 vera ótruflaðan Hamilton-virkja vetrinatómsins. Fyrir hvaða skammtatölur getur $\langle n\ell m|e^{H_0+W}|000\rangle$ verið frábrugðið núll?

(Dæmi 5 frá 2017) Notið fyrsta stigs tímaóháðan truflunarreikning til þess að ákvarða klofnun á fyrsta örvaða ástandi vetnisatómsins vegna truflunarinnar $W = \lambda XY$.

(Dæmi 5 frá 2018) Tvívíður einsátta hreintóna sveifill er í fyrsta örvaða ástandi. Sveifillinn verður fyrir truflun af völdum mættis $W = \lambda X^2 Y^2$. Ákvarðið klofnun þessa ástands af völdum truflunarinnar í lægstu nálgun í λ .

Lausn: Við byrjum á því að athuga að fyrir tvívíðan einsátta kjörsveifil gildir að orkueigin-gildi hans eru gefin með

$$E(n_x, n_y) = \hbar\omega(n_x + n_y + 1).$$

og því er fyrsta örvaða ástandið margfalt ástand $|01\rangle$ og $|10\rangle$ með orku $E_0^{(1)} = 2\hbar\omega$. Okkur nægir því að reikna eigin-gildi fyrir fylkið:

$$W_{ij} = \begin{pmatrix} \langle 01|W|01\rangle & \langle 01|W|10\rangle \\ \langle 10|W|01\rangle & \langle 10|W|10\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle 0|X^2|0\rangle \langle 1|Y^2|1\rangle & \langle 0|X^2|1\rangle \langle 1|Y^2|0\rangle \\ \langle 1|X^2|0\rangle \langle 0|Y^2|1\rangle & \langle 1|X^2|1\rangle \langle 0|Y^2|0\rangle \end{pmatrix}$$

En til þess er gott að rifja upp að

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P}), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P}).$$

En það gefur því að

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\hat{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger).$$

En þar með höfum við að

$$\begin{aligned} \langle n|X|k\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left[\sqrt{k}\delta_{n,k-1} + \sqrt{k+1}\delta_{n,k+1} \right], \\ \langle n|X^2|k\rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega} \left[\sqrt{k(k-1)}\delta_{n,k-2} + (2k+1)\delta_{n,k} + \sqrt{(k+1)(k+2)}\delta_{n,k+2} \right]. \end{aligned}$$

Einu fylkjastökin sem okkur vantar í þessu dæmi eru hinsvegar:

$$\langle 0|X^2|0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}, \quad \langle 0|X^2|1\rangle = 0, \quad \langle 1|X^2|0\rangle = 0, \quad \langle 1|X^2|1\rangle = \frac{3\hbar}{2m\omega}.$$

en þar með ályktum við að

$$W_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{3\hbar^2}{4m^2\omega^2} & 0 \\ 0 & \frac{3\hbar^2}{4m^2\omega^2} \end{pmatrix}.$$

svo það er engin klofnun í orkugildunum eftir fyrsta stigs truflun í λ .

(Dæmi 5 frá 2019) Tvívíður einsátta hreintóna sveifill er í öðru örvaða ástandi, þ.e. ástandi með orku $E_2 = 3\hbar\omega$. Sveifillinn verður fyrir truflun af völdum mættis $W = \lambda X^2 Y^2$. Ákvarðið klofnun E_2 af völdum truflunarinnar í lægstu nálgun í λ .

Lausn: Eins og áður eru orkueigingildin

$$E(n_x, n_y) = \hbar\omega(n_x + n_y + 1).$$

og því er fyrsta örvaða ástandið margfalt ástand $|20\rangle$, $|02\rangle$ og $|11\rangle$ með orku $E_0^{(2)} = 3\hbar\omega$. Okkur nægir því að reikna eigingildi fyrir fylkið:

$$W_{ij} = \begin{pmatrix} \langle 20|W|20\rangle & \langle 20|W|11\rangle & \langle 20|W|02\rangle \\ \langle 11|W|20\rangle & \langle 11|W|11\rangle & \langle 11|W|02\rangle \\ \langle 02|W|20\rangle & \langle 02|W|11\rangle & \langle 02|W|02\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5\hbar^2}{4m^2\omega^2} & 0 & \frac{\hbar^2}{2m^2\omega^2} \\ 0 & \frac{9\hbar^2}{4m^2\omega^2} & 0 \\ \frac{\hbar^2}{2m^2\omega^2} & 0 & \frac{5\hbar^2}{4m^2\omega^2} \end{pmatrix}.$$

þar sem að við þurfum aukalega á fylkjastökunum

$$\langle 2|X^2|2\rangle = \frac{5\hbar}{2m\omega}, \quad \langle 2|X^2|0\rangle = \langle 0|X^2|2\rangle = \frac{\sqrt{2}\hbar}{2m\omega}.$$

að halda frá því í dæminu á undan. En eigingildin á þessu fylki eru gefin með:

$$\lambda \frac{3\hbar^2}{4m^2\omega^2}, \quad \lambda \frac{7\hbar^2}{4m^2\omega^2}, \quad \lambda \frac{9\hbar^2}{4m^2\omega^2}.$$

(Dæmi 5 frá 2014) Þrívíður einsátta hreintóna sveifill með tíðni ω verður fyrir truflun

$$W = \lambda XY^2Z.$$

(i) Finnið hliðrun á orku grunnástandsins í lægstu nálgun sem ekki er 0.

(ii) Ákvarðið klofnun á orku fyrsta örvaða ástands af völdum V í lægstu nálgun.

Lausn: (i) Okkur nægir að reikna

$$\Delta E_1^{(0)} = \langle 000|W|000\rangle = \langle 0|X|0\rangle \langle 0|Y^2|0\rangle \langle 0|Z|0\rangle = 0.$$

svo að fyrsta stigs nálgun hverfur. Þurfum því að reikna annars stigs en til þess þarf að reikna

$$\Delta E_2^{(0)} = \lambda^2 \sum_{k \neq 0} \frac{|\langle k|W|0\rangle|^2}{E_0^{(0)} - E_0^{(k)}}$$

En því þurfum við að reikna fylkjastökin:

$$\langle n_x n_y n_z | W | 000 \rangle = \langle n_x | X | 0 \rangle \langle n_y | Y^2 | 0 \rangle \langle n_z | Z | 0 \rangle$$

en nú er

$$\langle n_x | X | 0 \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \delta_{n_x,1}, \quad \langle n_z | Z | 0 \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \delta_{n_z,1}, \quad \langle n_y | Y^2 | 0 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} [\delta_{n_y,0} + \sqrt{2}\delta_{n_y,2}].$$

sem gefur okkur því að ástöndin sem koma til greina eru $|000\rangle$ og $|020\rangle$ en það fyrr nefnda er grunnástandið svo summan er ekki yfir það ástand þar með er

$$\Delta E_2^{(0)} = -\lambda^2 \frac{|\langle 020|W|000\rangle|^2}{\hbar\omega} = -\lambda^2 \frac{\hbar^3}{4m^4\omega^5}.$$